ACADEMIA ROMÂNĂ

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ „SIMION STOILOW”

Teză de doctorat
Rezumat

METRICI INVARIANTE ŞI DOMENII RIEMANN

Coordonator ştiinţific:
C.S.I Dr. Mihnea COLŢOIU

Doctorand:
Natalia GAŞIŢOI

Bucureşti, 2012

Introducere

Teza de doctorat este dedicată studiului domeniilor Riemann şi metricilor invariante la aplicaţiile biolomorfe.

Întrucât domeniile generice din spaţiul complex n-dimensional $\mathbb{C}^n$ nu au anvelopă de olomorfie în $\mathbb{C}^n$, problema prelungirii analitice a funcţiilor olomorfe, a condus în mod natural la definirea conceptului de domeniu Riemann peste $\mathbb{C}^n$, o pereche (X, p), unde X este un spaţiu Hausdorff, iar $p : X \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie local homeomorfă, studiul domeniilor Riemann fiind iniţiat de către matematicienii germani Hans Grauert şi Reinholdt Remmert. În această lucrare domeniile Riemann sunt investigate în contextul cercetării problemei Levi. Problema Levi a fost formulată de către Ludwig Otto Blumenthal în anul 1912 şi timp de patru decenii a rămas o problemă deschisă, fiind soluţionată complet de către Kyoshi Oka în anul 1953. Rezultatele lui K. Oka au servit drept impuls pentru o serie de studii consacrate diverselor extinderi şi generalizări ale problemei Levi. Importante contribuţii în această direcţie de cercetare au fost aduse şi de şcoala matematică românească, în special, prin lucrările Profesorului Mihnea Colţoiu.

Un alt subiect abordat în această teză îl constituie metricile invariante la aplicaţiile biolomorfe, care şi-au găsit numeroase aplicaţii în diverse direcţii de cercetare în analiza complexă. Bazele teoriei funcţiilor normale de mai multe variabile complexe, definite în termenii metricilor invariante, au fost puse la începutul anilor 80 ai secolului trecut în lucrările lui Piotr Dovbuş, Joseph Cima, Steven Krantz, Kyong Hahn, Ken-Ichi Funahashi. Anumite subiecte legate de aplicaţiile metricilor invariante la studiul funcţiilor normale sunt examinate în această lucrare.

Structura lucrării. Teza de doctorat constă din Introducere, trei capitole şi o listă bibliografică cu 77 de titluri.

Cuvinte de mulţumire

Cu o profundă recunoştinţă îi adresez cele mai calde şi sincere mulţumiri conducătorului de doctorat, domnului Profesor Mihnea Colţoiu pentru sprijinul constant, îndrumare, încurajare, ajutorul acordat şi numeroase discuţii în decursul ultimilor ani.

Ţin să exprim sincere mulţumiri şi o deosebită recunoştinţă domnului Profesor Cezar Joiţa, care m-a susţinut mult şi mi-a oferit permanent sfaturi valoroase şi îndrumare competentă.

Îmi exprim recunoştinţa şi le aduc sincere mulţumiri referenţilor ştiinţifici, Domnului Profesor Mihai Tibăr şi Domnului Profesor Constantin Costara pentru timpul şi efortul alocat parcurgerii manuscrisului tezei de doctorat şi pentru observaţiile constructive făcute.

Adresez calde mulţumiri conducerii Institutului de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române pentru susţinerea şi sprijinul financiar de care am beneficiat pe întreg parcursul stagiului doctoral.

Conţinutul lucrării

În Capitolul I se studiază problema despre proiectivitatea imaginii unui spaţiu algebric proiectiv printr-un morfism cu fibre echidimensionale.

Rezultatul principal al acestui capitol este conţinut în următoarea teoremă.

Teorema 1.3 ([3]). *Fie X şi Y spaţii complexe compacte reduse şi $p : X \to Y$ o aplicaţie olomorfă surjectivă. Admitem că X este algebric proiectiv, Y este normal şi că toate fibrele lui p au aceeaşi dimensiune. Atunci spaţiul Y este algebric proiectiv.*

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe următoarele afirmaţii.

Lema 1.1 ([3]). *Fie $\mathbb{P}_{\nu,n}$ spaţiul proiectiv care parametrizează polinoamele omogene, $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, de gradul ν şi $Z(F) := \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid F(z_0, \dots, z_n) = 0\}$ mulţimea zerourilor lui $F \in \mathbb{P}_{\nu,n}$.*
Dacă C este o submulţime analitică închisă în $\mathbb{P}^n$ de dimensiune pozitivă $\dim C \geq 1$, atunci mulţimea $\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim(Z(F) \cap C) = \dim(C)\}$ este o reuniune finită de subspaţii liniare din $\mathbb{P}_{\nu,n}$ de codimensiune cel puţin egală cu $\nu + 1$.

Teorema 1.2 ([3]). *Fie n, k şi d numere naturale nenule, $n, k, d \geq 1$. Atunci există un număr $\nu_0 \in \mathbb{Z}$, $\nu_0 \geq 1$ astfel încât pentru orice $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu \geq \nu_0$ se poate găsi un polinom omogen $F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_n]$ cu proprietatea că mulţimea $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ nu conţine nici o subvarietate din $\mathbb{P}^n$ de dimensiune k şi de gradul cel mult d.*

Lema 1.2 ([3]). *Fie X o submulţime analitică închisă din $\mathbb{P}^n$, Y un spaţiu complex compact redus şi $p : X \to Y$ un morfism surjectiv. Pentru un punct $y \in Y$ fixat notăm*

fibra corespunzătoare cu $X_y := p^{-1}(y)$.
Dacă $\dim X_y = m$ *notăm cu* $X_y^{(m)}$ *totalitatea tuturor componentelor ireductibile ale lui* X_y *de dimensiune* m. *Dacă pentru* $y \in Y$, *fibrele* X_y *ale lui* p *au toate aceeaşi dimensiune* m, *atunci există un număr întreg* d *astfel încât* $\deg X_y^{(m)} \leq d$ *pentru orice* $y \in Y$.

Al doilea capitol este dedicat studiului domeniilor Riemann. În secţiunea 2.1 sunt descrise conceptele de domeniu Riemann neramificat, punct frontieră accesibil al unui domeniu Riemann, domeniu Riemann extins. Sunt expuse unele proprietăţi ale domeniilor Riemann extinse care ulterior sunt aplicate la demonstraţia rezultatelor din acest capitol.

Construcţiile eclatatului spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine şi a eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar şi proprietăţile principale ale lor sunt descrise în secţiunea 2.2. În paragraful 2.3 este rezolvată problema Levi pentru eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar.

În lucrarea [12] Kyoshi Oka a rezolvat problema Levi, demonstrând că un domeniu Riemann neramificat (X, p) peste $\mathbb{C}^n$ este Stein dacă şi numai dacă funcţia $-\ln d_X(x)$ este plurisubarmonică pe X, unde $d_X(x)$ este funcţia distanţă la frontieră pe X. O consecinţă importantă a rezultatelor lui K. Oka este faptul că proprietatea unui domeniu Riemann X de a fi Stein este o proprietate locală a frontierei lui X, din teorema lui K. Oka imediat rezultând că o submulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}^n$ este Stein dacă şi numai dacă ea este local Stein.

Astfel, natural a apărut întrebarea, dacă acest rezultat este valabil în cazul general al unui spaţiu Stein Y în loc de $\mathbb{C}^n$.

F. Docquier şi H. Grauert în [4] au arătat că dacă (X, p) este un domeniu Riemann neramificat peste o varietate Stein Y şi $p : X \to Y$ este un morfism Stein, atunci X este Stein, de unde, în particular, rezultă că orice submulţime deschisă D local Stein a unei varietăţi Stein este Stein.

Un alt rezultat, similar cu cel al lui K. Oka, pentru cazul spaţiilor proiective complexe, a fost obţinut de către R. Fujita [6] şi A. Takeuchi [13].

M. Colţoiu şi C. Joiţa în lucrarea [2] au rezolvat problema Levi în cazul eclatatului şi anume au arătat că o submulţime deschisă local Stein a eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine este Stein atunci şi numai atunci când ea nu conţine o submulţime de forma $U \setminus A$, unde A este divizorul excepţional al eclatatului şi U este o vecinătate deschisă a lui A. Acest rezultat a motivat investigarea problemei Levi în cazul eclatatului de-a lungul unui subspaţiu liniar.

Fie L un subspaţiu liniar k-dimensional al lui $\mathbb{C}^{n+1}$ şi notăm cu X eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul lui L, iar cu A divizorul excepţional al lui X, $A = L \times \mathbb{P}^{n-k}$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul.

Teorema 2.1 ([9]). *O submulţime deschisă local Stein D a eclatatului X este Stein dacă şi numai dacă nu este satisfăcută următoarea condiţie (P): există un punct t_0 în L şi o vecinătate deschisă U a lui $t_0 \times \mathbb{P}^{n-k}$ astfel încât $U \setminus A$ este conţinută în D.*

Secţiunea 2.4 este dedicată problemei Levi pentru domeniile Riemann neramificate peste eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ al spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine, anume stabilirii condiţiilor suplimentare pe care trebuie să le satisfacă un domeniu Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, cu p morfism Stein, pentru ca el să fie Stein.

Să notăm cu $A = \mathbb{P}^n$ divizorul excepţional al eclatatului. Spunem că un domeniu Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ peste eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ satisface *condiţia (Q)* dacă există o mulţime deschisă $G \subset X$ şi o vecinătate deschisă W a mulţimii excepţionale A astfel încât:

i) $p\,|_G$ este injectivă şi

ii) $p(G) \supset W \setminus A$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este conţinut în următoarea teoremă.

Teorema 2.2 ([10]). *Un domeniu Riemann neramificat $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, cu p morfism Stein, este Stein dacă şi numai dacă el nu satisface condiţia (Q).*

Unul din rezultatele pe care se bazează demonstraţia acestei teoreme este următoarea lemă.

Lema 2.3 ([10]). *Fie $S \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ o mulţime analitică de codimensiune cel puţin egală cu 2 şi fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann neramificat peste $\mathbb{C}^n \setminus S$. Presupunem că X este pseudoconvex în fiecare punct frontieră x care se proiectează în $\mathbb{C}^n \setminus S$. Atunci X nu este Stein dacă şi numai dacă există o submulţime deschisă conexă $U \subset X$ şi o submulţime deschisă conexă $V \subset \mathbb{C}^n$ astfel încât $V \cap S \neq \emptyset$ şi aplicaţia $p\,|_U : U \to V \setminus S$ este biolomorfă.*

În Capitolul III al lucrării se studiază unele probleme referitoare la teoria funcţiilor normale de mai multe variabile complexe, care se definesc în termenii metricilor invariante la aplicaţiile biolomorfe.

În secţiunea 3.1 sunt descrise unele generalizări ale metricii Poincaré, definită pe discul unitate din planul complex, pentru cazul mai multor variabile complexe şi anume sunt expuse noţiunile şi rezultatele de bază referitoare la (semi)metrica Carathéodory, (semi)metrica Kobayashi şi (semi)metrica Bergman.

Problema despre existenţa aplicaţiei extremale pentru (semi)norma Kobayashi este discutată în secţiunea 3.3.

O atenţie deosebită este acordată domeniilor mărginite $D \subset \mathbb{C}^n$ pentru care fiecare punct frontieră este punct peak şi se demonstrează că pentru fiecare punct $p \in D$ şi toţi vectorii $v \in \mathbb{C}^n$ există o aplicaţie extremală pentru (semi)norma Kobayashi $K_D(p; v)$.

De asemenea, în această secţiune, sunt trecute în revistă un şir de rezultate importante, ce vin să confirme că în spaţiul complex $\mathbb{C}^n$ sunt familii largi de domenii pentru care există aplicaţiile extremale pentru seminorma Kobayashi. Pentru acest tip de domenii, în secţiunea 3.4 este stabilit un criteriu de $\mathcal{K}-$normalitate a aplicaţiilor olomorfe. Pentru prima dată funcţiile $\mathcal{K}-$normale au fost definite de către J. Cima şi S. Krantz în [1], care au numit normale acele aplicaţii olomorfe $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ pentru care există o constantă $C > 0$ astfel încât pentru toate punctele $p \in D$ şi toţi vectorii tangenţi $v \in T_pD$ se verifică inegalitatea $f^*ds(p; v) \leq C \cdot K_D(p; v)$, unde $f^*ds(p; v)$ este imaginea inversă a metricii sferice prin aplicaţia f, iar $K_D(p; v)$ este seminorma Kobayasi pe D.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul criteriu de $\mathcal{K}$–normalitate a aplicaţiei olomorfe.

Teorema 3.2 ([8]). *Fie M o varietate complexă şi Y un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N înzestrată cu metrica hermitiană ds_N. O aplicaţie olomorfă $f : M \to Y$ este $\mathcal{K}$–normală pe varietatea complexă M atunci şi numai atunci când este normală familia de aplicaţii $\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}$, unde $E(M)$ este mulţimea aplicaţiilor extremale pentru seminorma Kobayashi.*

Ca urmare, putem accepta următoarea definiţie a aplicaţiei $\mathcal{K}-$normale.

Definiţia 3.12. Fie M o varietate complexă şi Y un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N. O aplicaţie olomorfă $f : M \to Y$ se numeşte $\mathcal{K}-$*normală* dacă este normală familia de aplicaţii $\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}$.

Remarcăm, că dacă M este discul unitate din planul complex, atunci această definiţie este echivalentă cu definiţia clasică a funcţiei normale introdusă de către O. Lehto şi K. I. Virtanen în memoriul din Acta Mathematica [11].

În secţiunea 3.5 se discută problema despre existenţa limitei $\mathcal{K}-$admisibile a unei aplicaţii olomorfe $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \overline{\mathbb{C}}$. Cu acest scop sunt prezentate noţiunea de domeniu $\mathcal{K}$–admisibil de deschidere $\alpha > 0$ cu vârful într-un punct frontieră al unui domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$ şi noţiunea de limită $\mathcal{K}$–admisibilă a unei funcţii $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ într-un punct frontieră.

Pentru un domeniu mărginit $D \subset \mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$, mulţimea

$$\mathcal{K}_\alpha(\xi) = \{z \in D \mid k_D(z, N(\xi)) < \alpha\},$$

unde $k_D(z, N(\xi))$ este distanţa Kobayashi de la punctul $z \in D$ la segmentul $N(\xi)$ normal interior domeniului D în punctul $\xi \in \partial D$, este numită domeniu $\mathcal{K}$–admisibil de deschidere $\alpha > 0$ cu vârful în punctul $\xi \in \partial D$.

Despre o funcţie $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ se spune că are limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$, dacă pentru orice $\alpha > 0$ şi orice şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ din $\mathcal{K}_\alpha(\xi)$, convergent la ξ, şirul corespunzător de valori ale funcţiei $\{f(z_j)\}_{j=1}^\infty$ converge la l în metrica sferică şi se notează $(\mathcal{K} - \lim f)(\xi) = l$.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este un criteriu de existenţă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii meromorfe f pe un domeniu mărginit D din spaţiul $\mathbb{C}^n$, pentru care în fiecare punct frontieră $\xi \in \partial D$ există o funcţie peak, analog cu cel obţinut de către P. Dovbuş în [5] pentru aplicaţiile olomorfe pe domeniile strict pseudoconvexe din $\mathbb{C}^n$.

Teorema 3.5 ([7]). *Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu mărginit, astfel încât fiecare punct din frontiera lui este punct peak. Fie $\xi \in \partial D$ un punct în care există normala exterioară ν_ξ. Dacă funcţia meromorfă $f \in \mathcal{O}(D, \overline{\mathbb{C}})$ are limita radială $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul ξ, atunci f are limita $\mathcal{K}$–admisibilă l în ξ dacă şi numai dacă $(K - \lim Q_f)(\xi) = 0$, unde*

$$Q_f(z) = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{ds(f(z); f'(z)v)}{K_B(z; v)} \right\},$$

este derivata sferică maximă relativ la (semi)norma Kobayashi.

Demonstraţia acestui criteriu se bazează pe următoarele leme.

Lema 3.4 ([7]). *Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ şi $\xi \in \partial D$ un punct frontieră de peak. Fie $h_j : \Delta \to D$, $j = 1, 2, \ldots$ un şir de aplicaţii olomorfe. Atunci pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $\alpha > 0$ se poate găsi un număr $\delta > 0$, astfel încât dacă*

$|h_j(0) - \xi| < \delta$, *atunci* $|h_j(\lambda) - \xi| < \varepsilon$ *pentru toţi* $\lambda \in \overline{d_\alpha}$, *unde* $\overline{d_\alpha} = \{\lambda \in \Delta \mid \rho(0, \lambda) \leq \alpha\}$ *este discul hiperbolic închis de rază* α *centrat în* 0.

Lema 3.5 ([7]). *Fie* D *un domeniu mărginit din spaţiul* $\mathbb{C}^n$ *astfel încât fiecare punct din frontiera lui este punct peak. Fie* z_0 *un punct interior, fixat arbitrar, al domeniului* D. *Atunci pentru* D *putem construi o exhaustiune compactă*

$$D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_k^{(\nu)}[z_0],$$

unde $B_k^{(\nu)}[z_0] = \{z \in D \mid k_D(z, z_0) \leq \nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *sunt bile închise centrate în* z_0 *de rază* ν *în metrica Kobayashi.*

Bibliografie selectivă

[1] J. A. Cima, S. G. Krantz, *The Lindelöf principle and normal functions of several complex variables,* Duke Math. J., **50** (1983), 303–328.

[2] M. Colţoiu, C. Joiţa, *The Levi problem in the blow-up,* Osaka J. Math., **47** (2010), 943–947.

[3] M. Colţoiu, N. Gaşiţoi, C. Joiţa, *On the image of an algebraic projective space,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I, **350** (2012), 239–241.

[4] F. Docquier, H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfoltigkeiten.* Math. Ann., **140** (1960), 94–123.

[5] P. V. Dovbush, *On the existence of admissible limits of functions of several complex variables,* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh., **28** (1987), 3, 73–77.

[6] R. Fujita, *Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe,* J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 443–473.

[7] N. Gashitsoi, *Criterion of the existence of $\mathcal{K}$–admissible limits of holomorphic maps,* Buletinul A.Ş a R.M., Matematica, n.3 (**40**) (2002), 46–52.

[8] N. Gashitsoi, *On a criterion of normality for mappings,* Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, n.2 **48** (2005), 94–98.

[9] N. Gaşiţoi, *The Levi problem in the blow-up along a linear subspace,* to appear in Math. Rep., **14 (64)** (2012), n. 3.

[10] N. Gaşiţoi, *The Levi problem for Riemann domains over the blow-up of $\mathbb{C}^{n+1}$ at the origin*, submitted to Osaka J. Math.

[11] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Boundary behavior and normal meromorphic functions,* Acta Math., **97** (1957), 47–65.

[12] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point critique intérieur,* Jap. J. Math., **23** (1953), 97–155.

[13] A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif,* J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 159–181.