DÉFORMATIONS DU FIBRÉ DE POINCARÉ

VALENTIN SAVIN

We give a description, in terms of analytic groups cohomology, of the deformations of the Poincaré bundle over a moduli space of vector bundles on an analytic variety X. Knowing that X itself can be described in terms of groups cohomology, we obtain a cohomological analogue of the Kodaira-Spencer map, when X is considered to be the parameter space of the Poincaré bundle.

2000 AMS Subject Classification : 14D20, 14H60, 32G13, 20G10.
Key words : stable vector bundles, moduli spaces, group cohomology, group deformations.

1. INTRODUCTION

La théorie des déformations des fibrés vectoriels sur une variété analytique (ou algébrique) X, nous amène à la construction des espaces de modules - ce sont des variétés dont l'ensemble des points géométriques est un ensemble de classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels.
La compréhension de ces espaces est un des objets d'étude centraux en géométrie analytique ou algébrique. On a ainsi remarqué que beaucoup de propriétés de X se répercutent sur ces espaces, et que certaines variétés peuvent être reconstruites à partir de ces espaces de modules.
Si M est un *bon* espace de modules de fibrés vectoriels alors il est l'espace de paramètres d'une famille universelle, qu'on appelle aussi fibré de Poincaré,

$$W \longrightarrow X \times M.$$

Dans certains cas particuliers et lorsque M est l'espace de modules de fibrés stables sur une courbe projective ([10]), une surface $K3$ ([8]), ou une variété abélienne ([9]), X est un espace universel de déformations pour ces fibrés. Par conséquent l'application d'évaluation

$$x \longmapsto W_x$$

identifie X à une composante connexe d'un certain espace de modules de fibrés vectoriels sur M. Un tel résultat peut être interprété comme un résultat de dualité, l'application ci-dessus s'identifiant à l'application biduale.
Bien sûr, dans le cas général on ne peut pas s'attendre à un tel résultat (il suffit de considérer des espaces de modules discrets), néanmoins un problème qui apparaît naturellement est de déterminer sous quelles conditions X est un espace complet de déformations, ce qui se traduit par la surjectivité de l'application de déformation infinitésimale (Kodaira-Spencer) en chaque point de X. On remarque aussi, que pour montrer l'injectivité de l'application Kodaira-Spencer, il suffit de construire une famille particulière vérifiant cette propriété (grace au caractère fonctoriel de cette l'application), ce qui n'est pas le cas lorsqu'on veut vérifier la surjectivité.

Le but de cet article est de donner, dans le cas analytique, une description en termes de cohomologie de groupes du problème ci-dessus.
Le point de départ est un théorème de S. Kosarew ([6]) qui montre qu'un espace de Stein peut être récupéré à partir de son $GL_r(\mathbb{C})$-spectrum. A l'aide de ce théorème nous identifions localement X à un ensemble de cohomologie de groupes. Cela est fait en considérant $\underline{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement fini, avec des ouverts de Stein de X. D'autre part, les fibrés vectoriels de rang r trivialisés par $\underline{\mathcal{U}}$ sont classifiés par l'ensemble des Čech-cocycles

$$Z = Z^1(\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathcal{O}_X))$$

et on a une opération par conjugaison du groupe $G = C^0(\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathcal{O}_X))$, qui correspond aux isomorphismes de fibrés vectoriels. Le quotient par cette opération sera dénoté par M. Afin de munir Z d'une structure analytique, on doit considérer seulement les Čech-cocycles bornés par rapport à la norme induite par celle sur $M_r(\mathbb{C})$. Si on se restreint aussi aux cocycles représentant des fibrés simples (ou stables), M est l'espace de modules de fibrés simples (respectivement stables) sur X. Au dessus de $X \times Z$ il y a un G-fibré tautologique T, obtenu en recollant $U_i \times Z \times \mathbb{C}^r$. Pour le moment, on va supposer que T descend en une famille universelle W, paramétrée par M. On note aussi

$$A = \mathrm{Mor}(Z, GL_r(\mathbb{C})).$$

Nous montrons que les déformations de W_x sont paramétrées par l'ensemble de cohomologie de groupes $H^1(G, A)$ et que l'application d'évaluation correspond à l'application canonique

$$H^1(G, GL_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G, A). \tag{1}$$

On remarque que si M est compact, alors $GL_r(\mathbb{C}) = A^G$. Si les ensembles cohomologiques ci-dessus sont des *variétés*, le problème de la surjectivité de (1) sur une composante connexe se traduit par la surjectivité des applications tangentes, ce qui revient à un problème similaire mais en cohomologie abélienne. Puisque ces ensembles cohomologiques ne sont pas généralement des variétés, nous remplaçons les ensembles cohomologiques par un foncteur cohomologique et nous donnons une description du foncteur tangent. Cela sera fait dans la deuxième section, théorème 3. Alors, si pour $\alpha \in Z^1(G, A)$ on dénote par $\mathfrak{a}_\alpha$ le G-module dont le groupe sous-jacent est l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A et l'action de G est celle induite par l'action sur A conjuguée par α, on obtient une application

$$H^1(G, M_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \longrightarrow H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}), \tag{2}$$

où $\alpha_x \in H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ est le cocycle d'évaluation en x. Cette application n'est rien d'autre que l'application Kodaira-Spencer en termes de cohomologie de groupes et dans le théorème 11, troisième section, nous faisons le lien avec le point de vue classique.

La dernière section peut être lue indépendamment des deux prémières, mais son objectif est de décrire une façon d'aborder la surjectivité de l'application (2). Notre approche consiste en à utiliser une filtration de G dont les quotients succesifs sont des groupes additifs. Sachant que la condition de surjectivité peut être exprimée par l'annulation d'un certain groupe de cohomologie de degré 1, nous devrons déformer le groupe G dans son groupe gradué associé, et utiliser l'annulation de la cohomologie de ce dernier - nous pensons que la cohomologie des groupes additifs, agissant sans points fixes, est nulle (à présent, nous ne connaissons pas de tels théorèmes d'annulation, mais nous montrons que cela est vrai pour le groupe additif $\mathbb{C}$ et, sous des conditions plus fortes, pour $M_r(\mathbb{C})$). Finalement, nous nous intéressons au problème des déformations des groupes filtrés.

2. COHOMOLOGIE DES GROUPES ANALYTIQUES

Dans cette section G dénotera un groupe analytique, y compris analytique-banachique. Par (An) on désignera la catégorie des espaces analytiques (y compris analytiques-banachiques) et tous les G-modules ou les G-groupes seront considérés munis également d'une structure analytique. De plus, les ensembles cohomologiques $H^i(G, A)$ seront, par définition, formés des i-cocycles analytiques $f : G^i \to A$. Soient A un G-groupe et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. L'action de G sur A induit une action de G sur $\mathfrak{a}$, qui en fait un G-module. Le but de cette section est de décrire l'espace tangent de $H^1(G, A)$, à l'aide des 1-coycles à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Cela nous permettrait de linéariser certains problèmes en cohomologie non-abélienne (comme par exemple, l'étude d'une application entre deux ensembles de cohomologie non-abélienne) par passage à l'espace tangent. Mais l'ensemble $H^1(G, A)$

n'est pas toujours muni d'une structure analytique, donc il ne s'agit pas à proprement parler d'un espace tangent. Pour contourner ce problème il faut remplacer l'ensemble cohomologique par un foncteur cohomologique, et considérer son foncteur tangent. Plus précisément :

Définition 1. Si A est un G-groupe, on définit deux foncteurs cohomologiques (contravariants)

$$Z^1(-\times G, A), H^1(-\times G, A) : (An) \longrightarrow (Ens)$$

$$\begin{array}{rcl} Z^1(S\times G, A) & = & \{f : S\times G \to A \mid f(s, g_1g_2) = f(s, g_1)^{g_2} f(s, g_2)\} \\ H^1(S\times G, A) & = & Z^1(S\times G, A)/\sim \end{array}$$

où $f_1 \sim f_2$, s'il existe $a : S \to A$, tel que $f_1(s, g) = a(s)^g f_2(s, g)a(s)$. Autrement dit, $H^1(-\times G, A)$ est le foncteur quotient de $Z^1(-\times G, A)$ par le foncteur $\mathrm{Hom}(-, A)$.

Remarque 2. Les égalités de la définition précédente ne sont pas seulement des égalités ensemblistes. Sachant que S n'est pas nécessairement réduit, elles doivent être regardées comme des égalités entre des morphismes d'espaces annelés.

On dénotera par $p_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/X^{i+1})$, pour $i \geq 0$. Considérons maintenant les foncteurs tangents, définis par

$$TZ^1(S\times G, A) = Z^1(S[p_1]\times G, A) \text{ et } TH^1(S\times G, A) = H^1(S[p_1]\times G, A),$$

où $S[p_1] = S\times p_1$. Si $Z^1(p_0\times G, A) = Z^1(G, A)$ possède une structure analytique représentant le foncteur $Z^1(-\times G, A)$, alors le foncteur tangent sera représenté par $TZ^1(G, A)$ (et de même pour $H^1(G, A)$). On a aussi deux morphismes naturels

$$TZ^1(-\times G, A) \xrightarrow{\pi} Z^1(-\times G, A) \xrightarrow{i} TZ^1(-\times G, A),$$

et de même pour le functeur $H^1(-\times G, A)$. Pour un élément $\alpha \in Z^1(G, A)$, on dénote par $\mathfrak{a}_\alpha$ le G-module (à droite) dont le groupe sous-jacent est $\mathfrak{a}$, et l'action de G est donnée par $v\cdot g = \alpha(g)^{-1}v^g\alpha(g)$, où $v \in \mathfrak{a}, g \in G$ et v^g dénote l'action de G induite par celle sur A. Avec ces notations on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Il existe des isomorphismes naturels :*
(1) $\pi(p_0)^{-1}(\alpha) \cong Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$.
(2) *Si α et β ont la même classe de cohomologie dans $H^1(G, A)$, alors $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$, et $\pi(p_0)^{-1}([\alpha]) \cong H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, où $[\alpha]$ dénote la classe de cohomologie de α.*

Preuve . (1) Soit $u \in \pi(p_0)^{-1}(\alpha)$, alors u peut être vu comme une application $u : p_1\times G \to A$, telle que $u(*, g) = \alpha(g)$, $\forall g \in G$. En particulier, u induit une application $\overline{u} : G \to \mathrm{Hom}(p_1, A) = TA$ telle que $\overline{u}(g) \in T_{\alpha(g)}A$, qui vérifie

$$\overline{u}(g_1g_2) = \overline{u}(g_1)^{g_2}\alpha(g_2) + \alpha(g_1)^{g_2}\overline{u}(g_2).$$

On définit $\tilde{u}(g) = \alpha(g)^{-1}\overline{u}(g) \in \mathfrak{a}$. Compte tenu de l'égalité ci-dessus, on trouve $\tilde{u}(g_1g_2) = \tilde{u}(g_1)\cdot g_2 + \tilde{u}(g_2)$, donc $\tilde{u} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Evidemment, u peut être récupéré à partir de $\tilde{u}$, ce qui démontre que l'application $u \mapsto \tilde{u}$ est bijective.
(2) Soit $a \in A$ tel que $\beta(g) = a^g\alpha(g)a^{-1}$. On vérifie facilement que si $f \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, alors $afa^{-1} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$. De plus l'application $f \longmapsto afa^{-1}$ passe au quotient et définit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie respectifs.

On va vérifier maintenant le dernier isomorphisme. $H^1(p_1\times G, A)$ est, par définition, le quotient de $Z^1(p_1\times G, A)$ par l'action de $\mathrm{Hom}(p_1, A) = TA$. Alors, il faut vérifier que l'action de TA sur

$Z^1(p_1 \times G, A)$ correspond, par l'isomorphisme de (1), à celle de $\mathfrak{a}_\alpha$ sur $Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Reprenons les notations de (1), et considérons $v \in T_a A$. Soient $v(u)$ l'élément de $Z^1(p_1 \times G, A)$ obtenu par l'action de v sur u, et $\beta(g) = a^g \alpha(g) a^{-1}$. Alors

$$\overline{v(u)}(g) = v^g \alpha(g) a^{-1} + a^g u(g) a^{-1} - a^g \alpha(g) a^{-1} v a^{-1} \in T_{\beta(g)} A$$

$$\widetilde{v(u)} = a[\alpha(g)^{-1}(a^{-1})^g v^g \alpha(g) + \alpha(g)^{-1} u(g) - a^{-1} v] a^{-1} \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\beta)$$

et ce dernier correspond, par l'isomorphisme ci-dessus, à $\tilde{u}(g) + (a^{-1}v) \cdot g - (a^{-1}v) \in Z^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. On en déduit que $[\widetilde{v(u)}] = [\tilde{u}]$ dans $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$, donc l'isomorphisme de (1) descend en une application surjective

$$\pi(*)^{-1}([\alpha]) \to H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha).$$

Pour vérifier l'injectivité, considérons $u, u_1 \in Z^1(p_1 \times G, A)$, tels que $[\tilde{u}] = [\tilde{u}_1]$ dans $H^1(G, \mathfrak{a}_\alpha)$. Alors il existe $v \in \mathfrak{a}_\alpha$, tel que $\tilde{u}_1(g) = \tilde{u}(g) + v \cdot g - v$, d'où $\overline{u}_1(g) = \overline{u}(g) + v^g \alpha(g) - \alpha(g) v$. On obtient $u_1 = v(u)$ et l'injectivité s'ensuit. $\square$

Remarque 4. Plus généralement, pour $S \in (An)$ et $\alpha_S \in Z^1(S \times G, A)$, il existe des isomorphismes naturels :

$$\pi(S)^{-1}(\alpha_S) \cong Z^1(S \times G, \mathfrak{a}_{\alpha_S}) \quad \text{et} \quad \pi(S)^{-1}([\alpha_S]) \cong H^1(S \times G, \mathfrak{a}_{\alpha_S}).$$

La démonstration est la même que celle du théorème précédent, il faut juste remplacer G par $S \times G$.

3. ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS

Soit X une variété complexe, compacte, irréductible et lisse. On dénotera par $\mathcal{G}l_r$ le faisceau des germes de fonctions analytiques sur X, à valeurs dans $GL_r(\mathbb{C})$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang r sur X, peut être identifié à l'ensemble cohomologique $H^1(X, \mathcal{G}l_r)$. Fixons $\underline{\mathcal{U}} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert, fini de X. Pour chaque $p \geq 0$ on dénote par I_p l'ensemble des $i = (i_0, \cdots, i_p)$, tels que $U_i = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$. La norme Euclidienne sur $\mathbb{C}^r$ induit une norme sur $M_r(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices complexes d'ordre r. Pour chaque famille $f = \{f_i : U_i \to M_r(\mathbb{C}) \mid i \in I_p\}$ on définit

$$\| f \| = \sup_{i \in I_p} \sup_{x \in U_i} \| f_i(x) \| .$$

L'ensemble des f, tels que $\| f \| < \infty$, forme une algèbre de Banach complexe, qui sera notée par $C^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{O}^{r \times r})$. L'ensemble de ses éléments inversibles est un ouvert dénoté par $C^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$. On définit aussi les opérateurs suivants

$$\begin{array}{ll} \delta^0 : C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \times C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \to C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r), & \delta^1 : C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \to C^2(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \\ \delta^0(g, f)_{ij} = g_i f_{ij} g_j^{-1} & \delta^1(f)_{ijk} = f_{jk} f_{ik}^{-1} f_{ij}. \end{array}$$

Soit $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = (\delta^1)^{-1}(Id)$ l'ensemble des 1-cocycles, où Id désigne l'élément identité. L'action de $C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ sur $C^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, définie par δ^0, se restreint à une action sur $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$. On définit

$$H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) / C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r).$$

Remarque 5. Nos définitions de C^0, Z^1, H^1, sont différentes des définitions habituelles. Nous supposerons toujours que les cocycles considérés sont bornés par rapport à la norme définie ci-dessus.

Bien évidemment, si $\underline{\mathcal{U}}$ est un recouvrement suffisamment fin, on a une correspondance bi-univoque entre les fibrés vectoriels de rang r sur X et les éléments de $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, et l'action de $C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ correspond aux isomorphismes de fibrés vectoriels. Par conséquent, $H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ est censé résoudre le problème de modules de fibrés vectoriels sur X. Mais pour que ce quotient existe dans la catégorie des espaces analytiques, il faut se restreindre aux 1-cocycles de $Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, représentant des fibrés simples (ou stables par rapport à une certaine polarisation de X). Plus précisément on a le résultat suivant (voir [11], théorèmes 2 et 5, pour la démonstration).

NORTON : *Il existe des recouvrements $\underline{\mathcal{U}}$ de X, arbitrairement fins, tels que l'ensemble des fibrés vectoriels simples sur X, $H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) \subset H^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, admette une structure d'espace analytique (pas nécessairement Hausdorff) vérifiant les propriétés habituelles d'un espace de modules grossier. De plus, si X est une variété projective et H est un fibré en droites ample, alors l'ensemble des fibrés stables par rapport à H est un ouvert de Hausdorff de $H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$.* $\square$

Dorénavant, on utilisera les notations $Z = Z^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$, $G = C^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r)$ et $M = H^1_s(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{G}l_r) = Z/G$. L'indice "$s$" désigne le fait qu'il s'agit des 1-cocycles représentant des fibrés simples (ou stables, selon le contexte). L'espace Z paramètre un fibré tautologique, noté par T, qui est défini à l'aide du recouvrement $\{U_i \times Z \mid i \in I\}$ et du 1-cocycle

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} \times Z & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ (x, (z_{ij})_{(i,j)\in I_1}) & \longmapsto & z_{ij}(x). \end{array}$$

On remarque que, pour $x \in X$ fixé, la restriction de T sur $\{x\} \times Z$ est un fibré trivial. On a aussi une action de G sur $U_i \times Z \times \mathbb{C}^r$ définie par

$$g \cdot (x, z, t) = (x, g_i z_{ij} g_j^{-1}, g_i(x)t), \quad g = (g_i) \in G, z = (z_{ij}) \in Z.$$

Cette action est compatible avec le 1-cocycle qui définit le fibré tautologique, et par conséquent on obtient une action de G sur T. On remarque aussi que, les éléments de Z étant des fibrés simples, $\mathrm{Stab}_G(z) = \mathbb{C}^* I_r$, $\forall z \in Z$, mais l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur T est celle par homothéties. Alors T ne descend pas en un fibré vectoriel sur M, mais tout de même, il descend en une famille locale W, qui donne une déformation universelle en chaque point de M (pour cela il suffit de considérer des trivialisations locales de la fibration $Z \to H$; voir aussi [11]). S'il existe un fibré en droites L sur Z, muni d'une action de G, telle que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur L^{-1} soit celle par homothéties, alors W peut être représenté par un fibré sur M, qu'on appellera fibré de Poincaré (il suffit de considérer le fibré quotient $T \otimes L/G$).

3.1. FIBRÉ DE POINCARÉ

Dorénavant on considérera $W = T \otimes L/G$ un fibré de Poincaré paramétré par M, où L est un fibré en droites sur Z avec une action (fixée) de G, telle que l'action de $\mathbb{C}^* I_r$ sur L^{-1} soit celle par homothéties. Par construction, le fibré W est une déformation universelle pour les fibrés sur X obtenus par restriction en un point de M. On peut regarder également W comme une famille de fibrés vectoriels sur M, paramétrée par X. Comme on l'a déjà remarqué dans l'Introduction, dans certains cas particuliers X est un espace universel de déformations, mais en général on ne peut pas s'attendre à un tel résultat. Tout de même on peut espérer que, sous certaines conditions, la variété X soit un espace complet de déformations. On verra plus loin que X peut être récupéré à partir d'un groupe de cohomologie non-abélienne. Le but de cette section est de décrire les déformations des fibrés W_x en termes de cohomologie de groupes. Cela nous permettra de voir l'application d'évaluation $x \mapsto W_x$, comme une application entre deux groupes de cohomologie non-abélienne. Alors l'application de déformation infinitésimale en un point $x \in X$ correspondra au passage aux espaces (foncteurs) tangents ; donc elle se traduira en termes de cohomologie abélienne.

On dénote par π la projection $Z \xrightarrow{\pi} M$. Puisque $T_x \to Z$ est trivial, on obtient $\pi^* W_x \cong L^{\oplus r}$. On s'intéressera aux déformations de W_x qui ont la même image réciproque sur Z. L'action à gauche de G sur Z, induit une action à droite de G sur $A = \mathrm{Mor}(Z, GL_r(\mathbb{C}))$.

LEMME 6. *Soit F un fibré de rang r sur M tel que $\pi^* F \cong L^{\oplus r}$. Alors il existe un 1-cocycle $\alpha \in Z^1(G, A)$, qui définit une action de G sur $\mathcal{O}_Z^{\oplus r}$ telle que :*
1. *L'action de $\mathbb{C}^* I_r$ est celle par homothéties ; par conséquent $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L$ est muni d'une action de G dont la restriction sur $\mathbb{C}^* I_r$ est triviale,*
2. *F est isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L$ par cette action. On notera $F \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L /_{\alpha} G$.*

Preuve . Fixons un isomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L \to \pi^* F$. Alors, pour $z \in Z$ et $g \in G$, on obtient

$$\mathbb{C}^r \otimes L_z \xrightarrow{\varphi_z} (\pi^* F)_z = (\pi^* F)_{gz} \xrightarrow{\varphi_{gz}^{-1}} \mathbb{C}^r \otimes L_{gz}.$$

Compte tenu de l'action de G sur L, il existe $\alpha(g, z) \in GL_r(\mathbb{C})$ tel que $\varphi_{gz}^{-1} \circ \varphi_z(t, l) = (\alpha(g, z)t, gl)$. On vérifie facilement que $\alpha \in Z^1(G, A)$ et par construction on obtient $F \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L /_{\alpha} G$. $\square$

Remarque 7. Bien sûr, le cocycle α n'est pas uniquement déterminé. On peut vérifier que $\mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L /_{\alpha} G \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L /_{\beta} G$, si et seulement si $[\alpha] = [\beta]$ dans $H^1(G, A)$. On peut donc considérer $H^1(G, A)$ comme l'espace de paramètres des déformations (avec image réciproque fixée) des fibrés W_x sur M.

Le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ peut être vu comme le sous-groupe des morphismes constants de A. Alors, l'action de G sur $GL_r(\mathbb{C})$ est triviale et par conséquent $Z^1(G, GL_r(\mathbb{C})) = \mathrm{Mor}_{groupes}(G, GL_r(\mathbb{C}))$. Les cocycles qui définissent les fibrés $W_x \to M$ en font partie. En effet, pour $x \in X$, notons par α_x le cocycle d'évaluation en x, défini comme suit

$$\begin{array}{rcl} \alpha_x : G & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ g = (g_i)_{i \in I} & \longmapsto & g_j(x) \ , \quad \text{où } x \in U_j. \end{array}$$

Alors, $W_x \cong \mathcal{O}_Z^{\oplus r} \otimes L /_{\alpha_x} G$.

Remarque 8. Si $x \in U_j \cap U_k$ alors les cocycles $g \mapsto g_j(x)$ et $g \mapsto g_k(x)$ ont la même classe ce cohomologie dans $H^1(G, A)$; autrement dit, ils ont la même image par l'application canonique $H^1(G, GL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G, A)$. Pour montrer cela, il faut trouver $a \in A$ tel que $g_k(x) = a^g g_j(x) a^{-1}$. Il suffit de considérer $a(z) = z_{kj}(x)$.

On utilisera le résultat suivant dû à S. Kosarew (voir [6]) pour identifier localement la variété X à l'espace $H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ (en fait, nous devrons remplacer le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$. Cela sera fait dans le paragraphe suivant).

KOSAREW : *Soient r un entier ≥ 2 et U un espace de Stein complexe. Considérons l'application d'évaluation suivante*

$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_e(\mathrm{Mor}(U, GL_r(\mathbb{C})), GL_r(\mathbb{C})) \\ x & \longmapsto & \phi_x : f \mapsto f(x), \end{array}$$

où $\mathrm{Mor}(U, GL_r(\mathbb{C})) \overset{\text{not}}{=} G$ est le groupe topologique des applications holomorphes sur U à valeurs dans $GL_r(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Mor}_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ dénote l'ensemble des homomorphismes continues de groupes de G dans $GL_r(\mathbb{C})$, qui sont invariants par les actions (à gauche et à droite) de $GL_r(\mathbb{C})$ sur les deux groupes.

Alors, l'application d'évaluation ci-dessus est injective, et pour $\lambda \in \mathrm{Mor}_e(G, GL_r(\mathbb{C}))$ il existe :
1. *un point $x_0 \in U$,*
2. *un homomorphisme de groupes continu $\delta : H^0(U, \mathcal{O}_U^*) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, tel que $\delta(c) = 1$ pour toute fonction localement constante c,*

3. *un homomorphisme* $\mu : G/G^0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$, *où* G^0 *dénote la composante connexe de l'unité de* G *;* *tels que*

$$\lambda(f) = f(x_0) \cdot \delta(\det(f)) \cdot \mu(f \cdot G^0).$$

De plus, x_0, δ *et* μ *sont uniquement déterminés par* λ. □

Remarque 9. Si U est un espace de Stein contractile, alors $G^0 = G$ et par conséquent μ est trivial. Si de plus, on remplace $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$ dans le théorème ci-dessus, alors l'homomorphisme δ disparraît.

3.2. IDENTIFICATIONS, REFORMULATION DU PROBLÈME

Afin d'identifier la variété X à un espace cohomologique, il faut d'abord remplacer le groupe $GL_r(\mathbb{C})$ par $SL_r(\mathbb{C})$. Cela peut être fait en considérant des fibrés vectoriels sur X avec le déterminant fixé. En effet, considérons $d = (d_{ij}) \in Z^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathbb{C}^*)$ un fibré en droites sur X. Alors, en termes de cocycles, les fibrés vectoriels sur X, de rang r et déterminant d, sont donnés par

$$Z(d) = \{z \in Z^1((\underline{\mathcal{U}}, GL_r(\mathbb{C})) \mid \det(z_{ij}) = d_{ij},\ \forall (i,j) \in I_1\}$$

et les isomorphismes entre ces fibrés correspondent à l'action du groupe $G' = C^0(\underline{\mathcal{U}}, SL_r(\mathbb{C}))$ sur $Z(d)$. Dorénavant, on supposera que le recouvrement $\underline{\mathcal{U}}$ est choisi tel que les ouverts U_i soient de Stein et contractiles, et que $Z(d)$ ne contient que les cocycles correspondants aux fibrés simples. On définit également

$$A(d) = \mathrm{Mor}(Z(d), SL_r(\mathbb{C})).$$

Alors, les déformations, à déterminant fixé, des restrictions du fibré de Poincaré sur l'espace de modules $M(d) = Z(d)/G'$, sont données par l'ensemble de cohomologie non-abélienne $H^1(G', A(d))$. Les fibrés W_x sont définis par les cocycles $\alpha_x : g \mapsto g(x)$, $SL_r(\mathbb{C})$ étant vu comme le sous-groupe des morphismes constants de $A(d)$. On remarque ausi que $\alpha_x|_{SL_r(\mathbb{C})} = I_{SL_r(\mathbb{C})}$. Par conséquent une déformation locale β, de α_x, donne naissance à une déformation locale $\beta|_{SL_r(\mathbb{C})}$, de $I_{SL_r(\mathbb{C})}$, qui est un automorphisme intérieur de $SL_r(\mathbb{C})$. On en déduit que β est conjugué à un cocycle dont la restriction sur $SL_r(\mathbb{C})$ est l'identité. Par le théorème de S. Kosarew, un tel cocycle est l'évaluation dans un point $y \in X$. Cela identifie un petit voisinage de x, disons U_i quitte à considérer un recouvrement plus fin, à un voisinage de $\alpha_x \in H^1(G', SL_r(\mathbb{C}))$ (voir aussi la proposition 15 et la remarque 16). Alors, l'application $x \mapsto W_x$ se traduit localement à l'aide de l'application canonique

$$H^1(G', SL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G', A(d)).$$

On dénotera par $sl_r(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $SL_r(\mathbb{C})$ et par $\mathfrak{a}(d)$ l'algèbre de Lie de $A(d)$. Compte tenu de la description du foncteur tangent pour la cohomologie de groupes, la question sur la complétude de la déformation locale de W_x, fournie par X, se traduit par :

L'application $H^1(G', sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \to H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$ *est-elle surjective ?*

Bien que la motivation principale soit l'étude des déformations du fibré de Poincaré, on remarque que cette question peut être posée même dans l'absence de celui-la. On pourra donc regarder cette question comme une généralisation du théorème de Narasimhan-Ramanan ([10]), aussi bien aux variétés de dimension quelconque, qu'au contexte des espaces de modules grossiers. Bien entendu, certaines hypothèses devront être faites sur l'espace de modules $M(d)$, il s'agit essentiellement d'hypothèses de compacité, comme par exemple l'absence des fonctions holomorphes non-constantes.

Remarque 10. Si on veut étudier les déformations du fibré W_x sur l'espace de modules M, on est amené a étudier l'application

$$H^1(G, M_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \to H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}).$$

Il faut remarquer que l'ensemble cohomologique $H^1(G, GL_r(\mathbb{C}))$ contient plus d'informations que la variété X.

Pour appuyer cette reformulation du problème, on démontre également le théorème suivant.

THÉORÈME 11. *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme canonique*

$$H^1(G^{'}, \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x}) \cong \operatorname{Ker}\left(H^1(M(d), \operatorname{ad}(W_x)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(Z(d), \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r))\right),$$

où π dénote la projection canonique $Z(d) \xrightarrow{\pi} M(d)$ et $\mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r)$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $Z(d)$ à valeurs dans $sl_r(\mathbb{C})$.
Pour l'espace de modules M, cet isomorphisme s'écrit

$$H^1(G, \mathfrak{a}_{\alpha_x}) \cong \operatorname{Ker}\left(H^1(M, \operatorname{End}(W_x)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(Z, \mathcal{O}_Z(M_r))\right).$$

Pour montrer ce théorème on a besoin de savoir que la cohomologie d'un module induit est nulle.

Définition 12. Soient $\mathfrak{m}$ un G-module à droite, et $\operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m})$ l'ensemble des applications analytiques sur G à valeurs dans $\mathfrak{m}$. Pour $g \in G$ et $\gamma \in \operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m})$, on définit $(\gamma g)(h) = \gamma(gh)g,\ \forall h \in G$. Alors $\operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m})$ devient un G-module à droite, appelé G-module induit.

LEMME 13. *Avec les notations de la définition ci-dessus,*

$$H^1(G, Mor(G, \mathfrak{m})) = 0.$$

Preuve. Soit $f : G \longrightarrow \operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m})$ un 1-cocycle, donc f vérifie $f(g_1 g_2, h) = f(g_1, g_2 h) g_2 + f(g_2, h)$. On définit $\gamma \in \operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m})$ par $\gamma(h) = f(h, 1) h^{-1}$. Alors $(\gamma g - \gamma)(h) = f(g, h)$ et par conséquent $[f] = 0$ dans $H^1(G, \operatorname{Mor}(G, \mathfrak{m}))$. $\square$

Preuve du Théorème 11. On dénotera par $\underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}$ le faisceau sur $M(d)$ défini par $\Gamma(U, \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) = Z^1(G^{'}, \operatorname{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x})$, pour chaque ouvert $U \subset M(d)$. On a une application canonique

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r)) & \longrightarrow & \Gamma(U, \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) \\ \gamma & \longmapsto & (g \mapsto \gamma g - \gamma). \end{array}$$

L'application $\pi : Z(d) \to M(d)$ est une $G^{'}/U(r)$ fibration principale, où $U(r)$ dénote le groupe des racines complexes d'ordre r de l'unité. Alors, si U est un ouvert de trivialisation de π, on obtient

$$\operatorname{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x} \cong \operatorname{Mor}(G^{'}/U(r), \operatorname{Mor}(U, sl_r)_{\alpha_x})$$

et par le lemme ci-dessus, sa $G^{'}/U(r)$-cohomologie est nulle en degré 1. En utilisant la suite spectrale d'une extension de groupes, et compte tenu que l'action de $U(r)$ sur $\operatorname{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)$ est triviale, on trouve

$$H^1(G^{'}, \operatorname{Mor}(\pi^{-1}(U), sl_r)_{\alpha_x}) = 0.$$

On en déduit que l'application $\pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r) \to \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}$ est surjective. D'autre part, le noyau de cette application s'identifie au fibré $\operatorname{ad}(W_x)$ (ici on tient compte du fait que $W_x \cong \mathcal{O}_{Z(d)} \otimes L/_{\alpha_x} G^{'}$) et par conséquent on obtient la suite exacte

$$0 \to \operatorname{ad}(W_x) \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r) \longrightarrow \underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x} \to 0.$$

Par la suite exacte longue de cohomologie, et compte tenu que $H^0(\underline{\mathfrak{a}}(d)_{\alpha_x}) = Z^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$, on obtient un isomorphisme

$$H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x}) \cong \mathrm{Ker}\left(H^1(M(d), \mathrm{ad}(W_x)) \longrightarrow H^1(M(d), \pi_* \mathcal{O}_{Z(d)}(sl_r))\right).$$

Il reste juste à remarquer que, par la suite spectrale de Leray, le noyau ci-dessus est le même que celui de l'énonce du théorème. □

Remarque 14. Cette proposition est une redémonstration du fait que $H^1(G', \mathfrak{a}(d)_{\alpha_x})$ paramètre les déformations infinitésimales de W_x, avec déterminant et image réciproque fixés. En même temps, elle fait le lien entre le point de vue s'appuyant sur la cohomologie de groupes et le point de vue classique, i.e considérer $H^1(M(d), ad(W_x))$ comme espace infinitésimal de paramètres.

On note par $G'_i = \mathrm{Mor}(U_i, SL_r(\mathbb{C}))$, le groupe des applications holomorphes sur U_i à valeurs dans $SL_r(\mathbb{C})$. Fixons $j \in I$ tel que $x \in U_j$, donc le cocycle α_x est donné par $g \mapsto g_j(x)$. On définit $G'_{-j} = \prod_{i \neq j} G'_i$. Alors

$$G' = \prod_{i \in I} G'_i = G'_j \times G'_{-j}.$$

Proposition 15. *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme*

$$H^1(G'_j, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}) \cong H^1(G', sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}).$$

Preuve . On remarque que l'action de G'_{-j} sur $sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x}$ est triviale. Alors, en utilisant la suite spectrale d'une extension de groupes, il suffit de montrer que

$$H^1(G'_{-j}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x})^{G'_j} = 0.$$

Soit $[f] \in H^1(G'_{-j}, sl_r(\mathbb{C})_{\alpha_x})$ invariant par l'action de G'_j. Alors f est un morphisme de groupes $f : G'_{-j} \to sl_r(\mathbb{C})$, tel que $f(g) = h_j(x)^{-1} f(h_j g h_j^{-1}) h_j(x), \forall g \in G'_{-j}, h_j \in G'_j$. Puisque les sous-groupes G'_j et G'_{-j} commutent, on en déduit que $f(g)$ est dans le centre de $sl_r(\mathbb{C})$, donc $f(g) = 0$, pour tout $g \in G'_{-j}$. □

Remarque 16. On peut aussi montrer cette proposition, en vérifiant que l'application canonique $H^1(G'_j, SL_r(\mathbb{C})) \to H^1(G', SL_r(\mathbb{C}))$ est un isomorphisme local en α_x. Pour cela, considérons β une déformation locale de α_x dans $H^1(G', SL_r(\mathbb{C}))$. Alors $\beta_j = \beta|_{G'_j}$ est surjectif. D'autre part, β_j et $\beta_{-j} = \beta|_{G'_{-j}}$ doivent commuter, car G'_j et G'_{-j} commutent. On en déduit que $\mathrm{Im}(\beta_{-j}) \subset U(r)$, et par connexité on trouve $\beta_{-j} \equiv 1$, d'où $\beta = \beta_j$, ce qui démontre que l'application ci-dessus, est un isomorphisme local en α_x.

4. FIBRÉS RIGIDES, FILTRATION DE G.

Dans cette section on considère a un point fixé de X, et $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$. On dénotera par G_a le noyau du morphisme d'évaluation en a,

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL_r(\mathbb{C}) \\ g = (g_i)_{i \in I} & \longmapsto & g_{i_0}(a) \end{array}$$

et par M_a le quotient de Z par l'action de G_a. Alors M_a est l'espace de modules de fibrés a-rigides, i.e. des couple (E, φ), où E est un fibré vectoriel de rang r sur X, et $\varphi : \mathbb{C}^r \to E_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (il s'agit d'une structure parabolique sans poids de E). En même temps, compte tenu du fait que $\mathrm{stab}_{G_a}(z) = \{1\}$ pour tout $z \in Z$, le fibré tautologique T descend en une famille universelle $W \to X \times M_a$. Moyennant la cohomologie de groupes, l'application d'évaluation s'écrit dans ce contexte

$$H^1(G_a, GL_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G_a, \mathrm{Mor}(Z, GL_r(\mathbb{C}))).$$

On note que W_a est un fibré trivial sur M_a, correspondant au cocycle trivial de $H^1(G_a, GL_r(\mathbb{C}))$. Par conséquent, l'application de déformation infinitésimale en a, devient

$$H^1(G_a, M_r(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(G_a, \mathrm{Mor}(Z, M_r(\mathbb{C}))).$$

Si on s'intéresse aux espaces de modules de fibrés sur X, avec déterminant fixé, on doit remplacer $M_r(\mathbb{C})$ par $sl_r(\mathbb{C})$.

L'existence d'une famille universelle n'est pas l'unique avantage de l'espace de modules M_a. Nous avons aussi une propriété très spéciale satisfaite par le groupe G_a. Il peut être filtré par des sous-groupes distingués, dont les quotients successifs sont des groupes additifs de matrices complexes. Plus précisément, considérons les sous-groupes de G_a, définis par

$$G_a^k = \{g \in G_a \mid d_a^1 g_{i_0} = \cdots = d_a^k g_{i_0} = 0\}, \quad k \geq 0,$$

où $d_a^k g_{i_0}$ dénote la k-ème différentielle de g en a. Bien évidemment, G_a^k sont des sous-groupes distingués de G_a. On obtient de cette manière une filtration

$$(G \supset) G_a = G_a^0 \supset G_a^1 \supset \cdots G_a^k \supset G_a^{k+1} \supset \cdots.$$

Les quotients successifs de cette filtrations sont isomorphes aux groupes additifs des applications linéaires $\mathcal{L}(T_aX, M_r)$, où T_aX dénote l'espace tangent de X en a.

• La suite de l'article est indépendante des deux sections précédentes, qui en constituent une motivation. Nous nous placerons dans un contexte plus général : étant donné un espace vectoriel V, muni d'une action d'un groupe G, nous voulons savoir sous quelles conditions l'application de comparaison, ci-dessous, est surjective ?

$$H^1(G, V^G) \longrightarrow H^1(G, V)$$

Si le groupe G est muni d'une filtration $G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \cdots$, nous devrons utiliser des techniques de la théorie des déformations, afin de déformer G dans le groupe gradué associé $grG = \prod_{k \geq 0} G^k / G^{k+1}$. Cela n'est pas toujours possible pour G, mais sous certaines conditions, lorsque G est le groupe des unités d'une algèbre $\mathcal{G}$, nous allons montrer que le groupe G^1 peut être déformé dans son groupe gradué (on remarque aussi l'analogie entre G^1 et G_a). Cette approche sera décrite dans le paragraphe suivant. Il nous faut aussi utiliser l'annulation de la cohomologie du groupe gradué et des arguments de semi-continuité. Nous pensons que la cohomologie des groupes additifs, agissant sans points fixes, est nulle. A présent nous ne connaissons pas de tels résultats d'annulation ; néanmoins, on peut montrer facilement la proposition suivante.

Proposition 17. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$. Si l'action de $\mathbb{C}$ est sans points fixes sur $V \setminus \{0\}$, alors*

$$H^1(\mathbb{C}, V) = 0.$$

Preuve. On dénote par $\rho : \mathbb{C} \to Aut(V)$ le morphisme de groupes induisant l'action de $\mathbb{C}$ sur V. Puisque cette action est sans points fixes, on en déduit que la dérivée $\rho'(a)$ est inversible pour tout $a \in \mathbb{C}$. En effet, soient $a_0 \in \mathbb{C}$ et $v \in V$, tels que $\rho'(a_0)v = 0$. En dérivant l'égalité $\rho(a+b) = \rho(a)\rho(b)$, par rapport à a et à b, on obtient

$$\rho'(a+b) = \rho'(a)\rho(b) = \rho(a)\rho'(b). \tag{3}$$

On en déduit que $\rho'(a)v = 0$, pour tout $a \in \mathbb{C}$, et par conséquent l'application $a \mapsto \rho(a)v$ est constante sur $\mathbb{C}$. L'action de $\mathbb{C}$ étant sans points fixes, on trouve $v = 0$, donc $\rho'(a_0)$ est inversible. On considère maintenant un élément $f \in Z^1(\mathbb{C}, V)$. Donc f est une application $f : \mathbb{C} \to V$, vérifiant

$$f(a+b) = \rho(b)f(a) + f(b).$$

En dérivant par rapport à a et à b, on obtient les deux égalités suivantes.

$$f'(a+b) = \rho(b)f'(a) = \rho'(b)f(a) + f'(b) \tag{4}$$

$$f''(a+b) = \rho'(b)f'(a) = \rho'(a)f'(b) \tag{5}$$

Compte tenu que $\rho(a)$ et $\rho(b)$ commutent, on en déduit que les dérivées $\rho'(a)$ et $\rho'(b)$ commutent également. Alors, l'égalité (5) entraîne que le vecteur $v = \rho'(a)^{-1}f'(a)$ est indépendant de a. En multipliant l'égalité (4) par $(\rho(b)\rho'(a))^{-1} = (\rho'(b)\rho(a))^{-1}$ (voir l'égalité (3)), on obtient

$$f(a) = \rho(a)v - v.$$

On en déduit que tout 1-cocycle est une frontière, donc $H^1(\mathbb{C}, V) = 0$. $\square$

Remarque 18. Si on veut refaire la démonstration ci-dessus, en remplaçant $\mathbb{C}$ par le groupe matriciel M_r, les dérivées $f'(a)$ devront être remplacées par $d_A f(A+X)$, $A, X \in M_r$. Alors, on devrait savoir qu'il existe $X \in M_r$ tel que $d_A f(A+X)$ soit inversible. Mais cette condition est plus forte que celle d'avoir une action sans points fixes. En effet, la multiplication par X induit un morphisme de groupes $\mathbb{C} \to M_r$, et par conséquent une action ρ_X de $\mathbb{C}$ sur V. Alors, la condition ci-dessus est satisfaite si et seulement si ρ_X est une action sans points fixes.

On peut formuler cela comme suit.

PROPOSITION 19. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action ρ du groupe matriciel $(M_r, +)$. S'il existe $X \in M_r$ tel que ρ_X soit une action sans points fixes, alors*

$$H^1(M_r, V) = 0. \ \square$$

4.1. DÉFORMATIONS DES GROUPES FILTRÉS.

Dans ce paragraphe, par algèbre on comprendra une algèbre associative sur un corps quelconque K. Une algèbre filtrée sera une algèbre $\mathcal{G}$, munie d'une suite décroissante d'idéaux

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \supset \mathcal{G}^1 \supset \mathcal{G}^2 \supset \cdots$$

telle que $\mathcal{G}^i\mathcal{G}^j \subset \mathcal{G}^{i+j}$, $i, j \geq 0$. On désignera par G le groupe des unités de $\mathcal{G}$. Il sera muni d'une filtration définie par

$$G^i = (1 + \mathcal{G}^i) \cap G.$$

On dira que la filtration sur G est la translatée de celle sur $\mathcal{G}$. On peut vérifier facilement que G^i sont des sous-groupes distingués de G.
On dénotera par $\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{G}^i/\mathcal{G}^{i+1}$ et $F^{(i)} = G^i/G^{i+1}$. On utilisera la même notation, p_i, pour désigner la projection canonique de $\mathcal{G}^i$ sur $\mathcal{F}^{(i)}$, ou de G^i sur $F^{(i)}$. L'algèbre graduée associée à $\mathcal{G}$, respectivement le groupe gradué associé à G, seront définis par des produits directs

$$\mathcal{F} = \prod_{i \geq 0} \mathcal{F}^{(i)}, \quad \text{respectivement} \quad F = \prod_{i \geq 0} F^{(i)}.$$

On peut définir une multiplication sur $\mathcal{F}$ comme suit : Soient $a_i, b_i \in \mathcal{F}^{(i)}$ représentés par $x_i, y_i \in \mathcal{G}^i$. On définit $a_i b_i = p_{i+j}(x_i x_j)$.
Supposons que $\cap_{i \geq 0} \mathcal{G}^i = 0$. On définit sur $\mathcal{G}$ une topologie séparée, en considérant les idéaux $\mathcal{G}^i$ comme voisinages de zero. On dit que $\mathcal{G}$ est une algèbre filtrée complète, si $\mathcal{G}$ est complète dans cette topologie.
Dorénavant, on fixe $q_i : \mathcal{F}^{(i)} \to \mathcal{G}^i$, des application additives, telles que $p_i q_i = I$, où I dénote l'application identité. De plus, on supposera q_0 choisie telle que $q_0 p_0(1) = 1$. On dénotera aussi par $1 = p_0(1) \in \mathcal{F}^{(0)}$.

Remarque 20. Ces applications existent puisque $\mathcal{G}$ est une K-algèbre. Si on considère que $\mathcal{G}$ est muni seulement d'une structure d'anneau, on doit imposer l'existence des applications q_i. Un tel anneau s'appelle prédévélopable. Les résultats de ce paragraphe resteront valables lorsque $\mathcal{G}$ est un anneau dévélopable (i.e. prédévélopable et complet).

On définit aussi des applications additives $T_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}^{(i)}$, par

$$T_0(x) = p_0(x), \; T_i(x) = p_i(I - q_{i-1}p_{i-1}) \cdots (I - q_0 p_0)(x)$$

et on pose $T_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, $T(x) = (T_0(x), T_1(x), \cdots)$. Cette application est additive, injective et elle induit un homéomorphisme sur son image. De plus, T est surjective si et seulement si $\mathcal{G}$ est complète (cf. [2]).

Dorénavant, on supposera que $\mathcal{G}$ est complète. Sachant qu'en général $T(xy) \neq T(x)T(y)$, on va définir par la suite une nouvelle multiplication sur $\mathcal{F}$, pour laquelle T devient un isomorphisme multiplicatif. On dénotera par $\pi_{i,\lambda}$ la projection de $\mathcal{F}_{\geq i}$ sur $\mathcal{F}^{(i+\lambda)}$. On remarque que pour $x_i \in \mathcal{G}^i$ et $x_j \in \mathcal{G}^j$, on a $T(x_i x_j) - T(x_i)T(x_j) \in \mathcal{F}_{\geq i+j+1}$. Alors, pour $\lambda \geq 1$, on définit des applications bilinéaires $\bar{A}_\lambda : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ par

$$\bar{A}_\lambda(x_i, x_j) = \pi_{i+j,\lambda}[T(x_i x_j) - T(x_i)T(x_j)].$$

Cette définition s'étend par linéarité sur $\mathcal{G}$. Pour $a, b \in \mathcal{F}$ on définit $A_\lambda(a,b) = \bar{A}_\lambda(T^{-1}(a)T^{-1}(b))$. Ces applications sont bilinéaires. On introduit sur $\mathcal{F}$ une nouvelle multiplication, notée $\times$, par

$$a \times b = ab + A_1(a,b) + A_2(a,b) + \cdots .$$

Compte tenu que $T(x_i x_j) = T(x_i)T(x_j) + \bar{A}_1(x_i, x_j) + \bar{A}_2(x_i, x_j) + \cdots$, on en déduit que l'application T induit un isomorphisme d'algèbres de $(\mathcal{G}, +, \cdot)$ dans $(\mathcal{F}, +, \times)$.

Remarque 21. Du point de vue de la théorie des déformations, cet isomorphisme signifie qu'une algèbre filtrée est une déformation de l'algèbre graduée associée (on peut regarder $\times$ comme une déformation du produit $\cdot$ sur $\mathcal{F}$). De plus on peut montrer que les déformations de $\mathcal{F}$ sont en correspondance biunivoque avec certaines suites de cochaines $A_\lambda \in C^{2,\lambda}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ - ici on utilise la graduation de $\mathcal{F}$ pour définir une graduation sur $C^2(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ - pour les détails voir [2].

Nous revenons aux déformations des groupes filtrés. Par déformation d'un groupe nous entendons une déformation de la structure de groupe. Plus précisément, on dit qu'un groupe $(G, \times_1)$ peut être déformé dans un groupe $(G, \times_0)$ s'il existe une famille continue $\times_t$ de structures de groupe sur G (i.e. une application continue $\times : K \times G \times G \to G$), telle que $(G, \times_1) \cong (G, \times_t)$ pour tout $t \in K$ non nul.
Notre but est de déformer un groupe filtré dans son groupe gradué associé. Pour cela, il faut trouver des isomorphismes avec deux groupes qui ont le même ensemble sous-jacent. Reprenons les notations antérieures. On remarque que si $\mathcal{G}$ est une algèbre complète, alors pour $x_i \in \mathcal{G}^i$, $i \geq 1$, la somme $1 - x_i + x_i^2 \cdots$ converge. Par conséquent $1 + x_i$ est un élément inversible de $\mathcal{G}$, et on obtient

$$G^i = 1 + \mathcal{G}^i.$$

On définit $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1} = \{(1, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1\}$. Soient $a_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1$. On utilisera les notations suivantes

$$a = (0, a_1, a_2, \cdots) \in \mathcal{F}_{\geq 1} \quad \text{et} \quad \bar{a} = (1, a_1, a_2, \cdots) \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}.$$

La multiplication $\times$ sur $\mathcal{F}$, induit une opération, notée $\times_1$, sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Il est clair que $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$ n'est pas stable par rapport à l'addition sur $\mathcal{F}$. Néanmoins, nous pouvons définir une opération sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$, notée $\times_0$, en additionant seulement les composantes de degré ≥ 1. Avec ces notations, on a

$$\bar{a} \times_1 \bar{b} = T((1 + T^{-1}(a))(1 + T^{-1}(b))) = \bar{a} \times_0 \bar{b} + a \times b.$$

On définit également deux isomorphismes

$$T^1 : G^1 \to (\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_1) \quad \text{et} \quad \Phi : grG^1 \to (\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_0).$$

L'isomorphisme T^1 est obtenu par la restriction de l'application T, définie antérieurement. Si $g_1 \in G^1$, alors $T_0(g_1) = p_0(g_1) = 1$, et par conséquent $T(G^1) \subset \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Réciproquement, soit $\bar{a} \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. Puisque T est bijectif, il existe $x \in \mathcal{G}$, tel que $T(x) = \bar{a}$. Il s'ensuit que $p_0(x) = 1$, d'où $x - 1 \in \mathcal{G}^1$, et par conséquent $x \in G^1$.
Le deuxième isomorphisme est un isomorphisme de groupes gradués. Soit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots)$, où

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : F^{(i)} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{(i)} \\ \alpha_i = p_i(g_i) & \longmapsto & p_i(g_i - 1). \end{array}$$

Si $p_i(g_i) = p_i(h_i)$, alors $(g_i - 1) - (h_i - 1) = g_i(1 - g_i^{-1}h_i) \in \mathcal{G}^{i+1}$. Cela démontre que Φ est bien définie. Φ est un morphisme de groupes, puisque $p_i(g_i h_i - 1) = p_i(g_i - 1) + p_i(h_i - 1)$. Cela est une conséquence du fait que $g_i h_i - g_i - h_i + 1 = (g_i - 1)(h_i - 1) \in \mathcal{G}^{i+i} \subset \mathcal{G}^{i+1}$. L'application Φ est évidemment injective. De plus, pour $x_i \in \mathcal{F}^{(i)}, i \geq 1$, on a $\Phi_i(1 + q_i(x_i)) = p_i q_i(x_i) = x_i$, et la surjectivité de Φ s'ensuit.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 22. *Soient $\mathcal{G}$ une algèbre filtrée complète et G le groupe des unités, muni de la filtration translatée de celle sur $\mathcal{G}$*

$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \cdots$$

Alors G^1 est peut être déformé dans le groupe gradué associé grG^1.

Preuve . Pour $t \in K$, $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$, on définit

$$\bar{a} \times_t \bar{b} = \bar{a} \times_0 \bar{b} + t(a \times b).$$

Compte tenu des isomorphismes ci-dessus, il suffit de démontrer que $\times_t$ définit une structure de groupe sur $\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}$. On vérifie facilement que l'inverse d'un élément $\bar{a}$, par rapport à $\times_t$, est donné par $\bar{a}^{-1} = \frac{1}{t} T(x^{-1} T^{-1}(a))$, où $x = T^{-1}(\bar{a}) \in G^1$ $(t \neq 0)$.
On remarque également que pour $t \neq 0$, l'application $\bar{a} \mapsto \overline{ta}$, définit un isomorphisme de $(\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_t)$ dans $(\overline{\mathcal{F}}_{\geq 1}, \times_1)$. $\square$

RÉFÉRENCES

[1] D. J. Benson, *Representation et cohomology,* **I** *et* **II**. Cambridge Univ. Press, 1991.

[2] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras.* Ann. of Math. **79** (1964), 58-103.

[3] A. Grothendieck, *Techniques de constructions et théorèmes d'existance en géométrie algébrique,* **IV** *: Les schémas de Hilbert.* Séminaire Boubaki 1960/61, fascicule 2, exposé 221.

[4] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[5] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformation of complex analytic structures* **I**. Ann. of Math. **67**,2 (1958), 328-466.

[6] S. Kosarew, *Nonabelian duality on Stein spaces.* Amer. J. Math. **120** (1998), 637-648.

[7] S. Kosarew and C. Okonek, *Global moduli spaces and simple holomorphic bundles.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **25** (1989), 1-19.

[8] S. Mukai, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces.* Vector Bundles in Algebraic Varieties, Bombay 1884, 341-413.

[9] D. Mumford, *Abelian varieties.* Oxford Univ. Press, 1974.

[10] M. S. Narasimhan and S. Ramanan, *Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve.* Ann. of Math. **101** (1975), 391-417.

[11] V. A. Norton, *Analytic moduli of complex vector bundles.* Ind. Univ. Math. J, **28** (1979), 365-387.

[12] J. P. Serre, *Cohomologie galoisienne.* L.N.M. 5, Springer, 1994.

[13] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety* **I**, **II**. Publ. Math. I.H.E.S. **79/80** (1994/95).

Reçu le 30 mars 2002.

SAVIN VALENTIN
Université de Lille 3
UFR MSES, BP 149
59653 Villeneuve d'Ascq, cedex
France.
Courriel : savin@univ-lille3.fr