Introduction aux Champs Algébriques*

Valentin SAVIN

Introduction

La formulation rigoureuse des problèmes de modules a imposé l'usage des catégories et des foncteurs, et a mené au développement de la théorie des champs.

Ainsi, ces problèmes sont formulés en termes de *foncteurs de modules*, et un *espace de modules* est un schéma représentant un tel foncteur. Alors, un espace de modules M paramètre un objet universel et un morphisme $S \to M$ correspond à un objet sur S (l'image réciproque de l'objet universel). D'après Yoneda, un morphisme d'un schéma S dans un foncteur F correspond à un objet sur S (*i.e.* de FS). Autrement dit, le foncteur de modules peut lui-même jouer le rôle d'un espace de modules. Afin de manœvrer un foncteur de la même manière qu'un schéma, on lui impose une série de "conditions d'algébricité". Moralement, on impose à ce que le foncteur soit *localement représentable*, sachant que la plupart des propriétés algébriques sont locales. Cela conduit à la notion d'*espace algébrique*.

La définition d'un foncteur de modules est souvent obstruée par les automorphismes des objets qu'on veut "paramétrer". Une solution radicale consiste en à éliminer les automorphismes en passant au foncteur de classes d'isomorphismes. Même si on a l'impression d'avoir préservé "l'essentiel", cette opération est aussi grossière que le passage d'un groupe à l'ensemble de classes de conjugaisons. L'usage des catégories fibrées permet de formuler un problème de modules tout en préservant les automorphismes des objets. Les mêmes "conditions d'algébricité" imposées aux catégories fibrées conduisent à la notion de champ algébrique, qui est l'analogue d'un espace algébrique dans le cas des foncteurs.

Notations et conventions. Chaque fois qu'on considère une catégorie $\mathscr{C}$ on supposera qu'elle possède des produits et des produits fibrés. Par (Sch) on désignera la catégorie des schémas ou, lorsque ça sera précisé, la catégorie des schémas localement noethériens. Tout ce qui sera présenté dans cet exposé est aussi valable dans le cas relatif (*i.e.* remplacer (Sch) par (Sch/S) la catégorie des schémas au-dessus d'un scéma fixé S). On utilisera (Ens) pour désigner la catégorie des ensembles.

Première Partie : Faisceaux

1. Foncteurs représentables et objets universels

1.1. Rappels

Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est *fidèle* (resp. *plein*) si l'application $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S,T) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(FS,FT)$ est injective (resp. surjective) pour tous les objets $S,T \in \mathscr{C}$. Si elle est bijective on dit que F est

*Série d'exposés à l'IMAR, novembre 2003.

pleinement fidèle. On dit que F est *essentiellement surjectif* si tout objet de $\mathscr{C}'$ est isomorphe à l'image d'un objet de $\mathscr{C}$.

On appelle *transformation naturelle* (ou *morphisme de foncteurs* ou tout simplement *morphisme*) $\lambda : F \to G$ la donée pour chaque objet $S \in C$ d'une application $\lambda_S : FS \to GS$, telle que pour tout $\varphi : S \to T$ dans $\mathscr{C}$, on ait $\lambda_T \circ F\varphi = G\varphi \circ \lambda_S$. Si pout tout $S \in \mathscr{C}$, λ_S est un isomorphisme on dit que λ est un *isomorphisme de foncteurs*.
Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est une *équivalence de catégories* s'il existe $G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$, tel que $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}'}$ et $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

(1.1) PROPOSITION. *Un foncteur est une équivalence de catégories si, et seulement si, il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

1.2. Foncteurs représentables

Soient $X \in \mathscr{C}$ et $h_X : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ le foncteur contravariant définit par $h_X S = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, X)$. Pour chaque morphisme $\varphi : S \to T$ dans $\mathscr{C}$, on a $h_X\varphi = - \circ \varphi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, X)$. De plus, chaque morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathscr{C}$ induit une transformation naturelle $\lambda(f) : h_X \to h_Y$ définie, pour $S \in \mathscr{C}$, par $\lambda(f)_S = f \circ - : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, Y)$.

(1.2) LEMME. *L'application* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$, $f \mapsto \lambda(f)$, *est une bijection (lemme de Yoneda, version faible).*

(1.3) DÉFINITION. *Un foncteur* $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ *est représentable s'il existe* $X \in \mathscr{C}$, *tel que* $F \cong h_X$. *Dans ce cas on dit aussi que* X *est un espace de modules fin de* F.

(1.4) DÉFINITION. *On dit que* $Y \in \mathscr{C}$ *est un espace de modules grossier de* $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ *s'il existe un morphisme* $\lambda : F \to h_Y$ *vérifiant la propriété d'universalité suivante :*
Pour tout $Z \in \mathscr{C}$ *et tout* $\upsilon : F \to h_Z$ *il existe un unique* $f : Y \to Z$ *tel que* $\upsilon = \lambda(f) \circ \lambda$.

1.3. Objets universels

(1.5) DÉFINITION. *Soit* $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$. *On appelle objet universel de* F *un couple* (X, ξ), *où* $X \in \mathscr{C}$ *et* $\xi \in FX$ *vérifiant la propriété d'universalité suivante :*
Pour tout $S \in \mathscr{C}$ *et tout* $\eta \in FS$ *il existe un unique morphisme* $\varphi : S \to X$ *dans* $\mathscr{C}$, *tel que* $\eta = F\varphi(\xi)$.

(1.6) LEMME. *(le lemme de Yoneda) Soient* $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ *et* $X \in \mathscr{C}$. *Alors, l'application* $\mathrm{Hom}(h_X, F) \to FX$, $\lambda \mapsto \lambda_X(\mathrm{Id}_X)$, *est une bijection.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathrm{Hom}(h_X, F)$. Soient S un objet de $\mathscr{C}$ et $f \in h_X S$. f correspond à un morphisme $f : S \to X$ de $\mathscr{C}$ et $(h_X f)(\mathrm{Id}_X) = f$. D'après la définition d'une transformation naturelle, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{\lambda_X} & F(X) \\ {\scriptstyle h_X f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ h_X(S) & \xrightarrow[\lambda_S]{} & F(S) \end{array}$$

Il s'en suit que $\lambda_S(f) = Ff(\lambda_X(\mathrm{Id}_X))$, autrement dit λ est uniquement déterminé par $\lambda_X(\mathrm{Id}_X)$. $\square$

(1.7) COROLLAIRE. *Un foncteur est représentable si, et seulement si, il possède un objet universel.*

Preuve. Si $\lambda : h_X \cong F$, alors $(X, \lambda_X(\mathrm{Id}_X))$ est un objet universel de F. $\square$

1.4. Exemples

(1.8) *Exemple. Le foncteur* $P : (\mathrm{Ens})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$, $P(S) =$ *l'ensemble de parties de* S, *est représenté par* $X = \{0,1\}$, $\xi = \{1\} \in P(X)$. *En effet, pour* $S' \subset S$ *il existe un unique* $\varphi : S \to X$ *tel que* $S' = \varphi^{-1}(1)$; *c'est ce qu'on appelle la fonction caractéristique de* S'.

(1.9) *Exemple. Le foncteur* $P : (\mathrm{Top})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$, $P(S) =$ *l'ensemble de sous-ensembles fermés de* S, *est représenté par* $X = \{0,1\}$, $\xi = \{1\} \in P(X)$. X *est muni de la topologie dont les fermés sont* $\emptyset, \{1\}, \{0,1\}$.

(1.10) *Exemple. Le foncteur* $P : (\mathrm{Hausd})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$, *défini comme ci-dessus, n'est pas représentable.*

(1.11) *Exemple. Le foncteur* $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$, $T \mapsto \mathcal{O}(T)$, *est représenté par* $\mathbb{A}^1_S$.

(1.12) *Exemple. Soit* $Q_n : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens}), Q_n(T) = \{$*familles* $(L, s_1, \cdots, s_n)\}/$*équivalence, où* L *est un faisceau inversible sur* T *engendré par ses section globales* $s_1, \cdots, s_n$ *et la relation d'équivalence est donnée par des isomorphismes préservant les sections. Alors, le foncteur* Q_n *est représenté par* $\mathbb{P}^n_S$.

(1.13) *Exemple. Soit* $\underline{\mathrm{Hilb}}_{\mathbb{P}^n} : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$, $\underline{\mathrm{Hilb}}_{\mathbb{P}^n}(S)$ *est l'ensemble de sous-schémas fermés* $Y \subset \mathbb{P}^n_S$, *plats sur* S. *Le foncteur* $\underline{\mathrm{Hilb}}_{\mathbb{P}^n}$ *est représentable*[1] *(Grothendieck).*

2. Topologies de Grothendieck, faisceaux

Du point de vue de la théorie des catégories, ce qui est important dans une catégorie ce sont les morphismes et non les objets ; de la même manière que dans un groupe ce qui est important c'est la loi de multiplication et non les éléments du groupe. C'est la traduction “philosiphique” du lemme de Yoneda. Néanmoins, lorsqu'on travaille avec la catégorie des espaces topologiques (ou schémas, ou autres) on aimerait avoir aussi des renseignements sur la nature topologique des objets ; par exemple, mettre en évidence les recouvrements ouverts de chaque objet (ou les morphismes étales, ou autres). C'est là qu'intervient la notion de topologie de Grothendieck sur une catégorie.

En même temps, un foncteur contravariant sur une catégorie joue le rôle d'un préfaisceau sur un espace topologique. Étant donnée une topologie de Grothendieck, on pourra introduire la notion de faisceau sur une catégorie ; autrement dit, séparer les données globales et recoler des données locales.

2.1. Définitions

(2.1) DÉFINITION. *Une topologie de Grothendieck sur* $\mathscr{C}$ *est la donnée, pour chaque* $U \in \mathscr{C}$, *d'ensembles de morphismes* $\{U_i \to U\}$, *qu'on appelle recouvrements de* U, *tels que*

1. *Tout isomorphisme* $\{V \to U\}$ *est un recouvrement,*
2. *Si* $\{U_i \to U\}$ *est un recouvrement de* U, *alors pour tout* $V \to U$, $\{U_i \times_U V \to V\}$ *est un recouvrement de* V,

[1] Ici (Sch) dénote la catégorie des schémas localement noethériens (sinon, il faut imposer que la projection $Y \to S$ soit localement de présentation finie).

3. *Si $\{U_i \to U\}$ et $\{U_{ij} \to U_i\}$ sont des recouvrements de U, respectivement des U_i, alors $\{U_{ij} \to U\}$ est un recouvrement de U.*

Une catégorie munie d'une topologies de Grothendieck est appelée un site.

(2.2) DÉFINITION. *Soit $\mathscr{C}$ un site. Un préfaiseau sur $\mathscr{C}$ est un foncteur $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$. F est un faisceau si les deux conditions qui suivent sont satisfaites. Un foncteur (préfaisceau) ne vérifiant que la première condition est dit séparé.*

1. *Si $\{\sigma_i : U_i \to U\}$ est un recouvrement de U et $\xi, \eta \in FU$ tels que $F\sigma_i(\xi) = F\sigma_i(\eta)$, alors $\xi = \eta$.* **On note** *$F\sigma_i(\xi) = \sigma_i^*\xi$ (ou encore $F\sigma_i(\xi) = \xi_i$ quand il n'y a pas de confusion possible).*
2. *Soit $\{\sigma_i : U_i \to U\}$ un recouvrement de U. On note $U_{ij} = U_i \times_U U_j$ et p_{ij}^1, p_{ij}^2 les deux projections de U_{ij} sur U_i, respectivement U_j. Si $\xi_i \in FU_i$ tels que $(p_{ij}^1)^*\xi_i = (p_{ij}^2)^*\xi_j$, alors il existe $\xi \in FU$, tel que $\xi_i = \sigma_i^*\xi$.*

(2.3) *Remarque. Même si $i = j$ la deuxième condition de la définition précédente n'est pas nécessairement satistaite, car les deux projections p_{ii}^1 et p_{ii}^2 ne sont pas nécessairement égales ! Cela explique aussi les notations utilisées.*

Un morphisme entre deux faisceaux est tout simplement un morphisme de foncteurs. On peut voir facilement que tout préfaiseau peut être "faisceautisé". Plus précisément, à un préfaisceau F on peut associer un faisceau $F^{\#}$ avec un morphisme $F \to F^{\#}$, tels que tout morphisme défini sur F à valeurs dans un faisceau factorise à travers $F^{\#}$. La construction de $F^{\#}$ est la même que dans le cas des schémas. Le morphisme $F \to F^{\#}$ est injectif si, et seulement si, F est séparé.

(2.4) *Exemple. Soit X un schéma (espace topologique). On définit la catégorie X_{cl} dont les objets sont les sous-schémas ouverts de X et les morphismes sont les inclusions. On définit également une topologie de Grothendieck dont les recouvrements de $U \in X_{\mathrm{cl}}$ correspondent aux recouvrements ouverts de U. Notons que pour deux inclusions $U_i, U_j \subset U$, on a $U_i \times_U U_j = U_i \cap U_j$. Alors se donner un (pré)faisceau sur la catégorie X_{cl} équivaut à se donner un (pré)faisceau sur le schéma X.*

(2.5) *Exemple. Soit X un schéma localement noethérien et X_{aff} la sous-catégorie pleine de X_{cl}, dont les objets sont les sous-schémas ouvets affines de X. Compte tenu que X est localement noethérien, X_{aff} est fermée par rapport aux produit fibrés (l'intersection de deux ouverts affines est un ouvert affine). Alors, comme dans l'exemple précedent, on obtient une topologie de Grothendieck sur X_{aff}. La catégorie des faisceaux sur X_{aff} est équivalente à la catégorie des faisceaux sur X_{cl}.*

(2.6) *Exemple. Soit X un schéma. On définit la catégorie $X_{\text{ét}}$ dont les objets sont des morphismes étales de présentation finie $U \to X$ et les morphismes sont des diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

À fortiori, le morphisme $U \to V$ est, lui aussi, étale et de présentation finie. On munit $X_{\text{ét}}$ d'une topologie de Grothedieck : les recouvrements sont des ensembles de morphismes de $X_{\text{ét}}$, $\{U_i \to U\}$, dont les images recouvrent U.

2.2. Les topologies globales sur (Sch)

On définit les quatres topologies globales les plus courantes sur (Sch).

Rappels. ([EGA]$_1$) Pour justifier les topologies listées plus loin, on apporte les précisions suivantes :

0. Dans ce qui suit, un morphisme de présentation finie (abrégé pf) est un morphisme localement de présentation finie dans le sens de [EGA]$_1$.
1. Un morphisme plat de présentation finie (ppf) est ouvert. On rappelle aussi qu'un morphisme fidèlement plat est (équivalent à) un morphisme plat et surjectif. Par conséquant, si $f : X \to Y$ est un morphisme fidèlement plat de présentation finie (fppf) alors Y a la topologie quotient.
2. Si $f : X \to Y$ est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact (fpqc) alors Y a la topologie quotient. À noter que f n'est pas nécessairement un morphisme ouvert.

La topologie de Zariski. Les recouvrements $\{U_i \to U\}$ sont des plongements ouverts dont les images recouvrent U.

On remarque qu'on considère des plongements ouverts et non des inclusions, afin que la première condition de la définition (2.1) soit satisfaite !

La topologie étale. Les recouvrements $\{U_i \to U\}$ sont des morphismes étales de présentation finie dont les images recouvrent U.

La topologie fppf. Les recouvrements $\{U_i \to U\}$ sont des morphismes plats de présentation finie dont les images recouvrent U. En particulier

- les images des U_i sont des sous-schémas ouverts de U et les morphismes $U_i \to \mathrm{Im}(U_i)$ sont fppf,
- le morphisme $\amalg U_i \to U$ est fppf.

La topologie fpqc. Les recouvrements $\{U_i \to U\}$ sont des morphismes plats et quasi-compacts tels que les images des U_i soient des sous-schémas ouverts de U et qu'elles recouvrent U.

On remarque que le morphisme $\amalg U_i \to U$ est fp mais pas nécessairement qc !

2.3. Exemples

Les foncteurs représentables. Soit $X \in (\mathrm{Sch})$. Il est clair que le foncteur h_X est un faisceau dans la topologie de Zariski. De plus, on a le théorème suivant :

(2.7) THÉORÈME. *(Grothendieck) Un foncteur représentable est un faisceau dans les topologies de Zariski, étale, fppf, fpqc.*

Il doit être clair qu'on a les inclusions suivantes entre les topologies respectives :

$$\text{Zariski} \ \subset \ \text{étale} \ \subset \ \text{fppf} \ .$$

Par conséquent, tout faisceau fppf est en particulier un faisceau étale et tout faisceau étale est en particulier un faisceau de Zariski. On a aussi

$$\text{fppf} \text{ ``} \subset \text{''} \text{ fpqc} \ .$$

Telle qu'elle est écrite l'inclusion ci-dessus est fausse ; ce qui explique l'utilisation des guillemets. Il faut apporter quelques précisions. Une topologie de Grothendieck est dite *saturée* si chaque fois qu'on a un ensemble de morphismes $\{U_i \to U\}$ et des recouvrements $\{U_{ij} \to U_i\}$ tels que les compositions $\{U_{ij} \to U\}$ définissent un recouvrement de U, alors $\{U_i \to U\}$ est un recouvrement de U. Toute topologie peut être saturée et il y a une correspondance biunivoque entre les faisceaux dans la topologie donnée et les faisceaux dans la topologie saturée.

Par exemples, les topologies de Zariski, étale et fppf sont saturées, mais ce n'est pas le cas de la topologie fpqc. Il est aisé de voir que la saturation de la topologie fpqc contient la topologie fppf. C'est le sens de l'inclusion ci-dessus ! En particulier tout faisceau fpqc est un faisceau fppf. En conséquence, pour montrer le théorème précedent il suffit de montrer que h_X est un faisceau fpqc.

(2.8) *Remarque. On peut définir les topologies étale et fppf en demandant à ce que les morphismes $U_i \to U$ soient quasi-compactes, de présentation finie et étales, respectivement fidèlement plats sur l'image. Avec cette définition, on des inclusions Zariski $\subset$ étale $\subset$ fppf $\subset$ fpqc mais les topologies étales et fppf ne sont plus saturées. Néanmoins, leurs saturations correspondent aux définitions précédentes.*

On utilisera le critère suivant :

(2.9) Proposition. *Soit $F : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$. F est un faisceau fpqc si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *F est un faisceau de Zariski,*
2. *Pour chaque morphisme $V \to U$ fidèlement plat entre deux schémas affines le diagramme*

$$FU \to FV \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} F(V \times_U V)$$

est exact.

Rappelons qu'un diagram $A \to^f B \rightrightarrows_g^h C$ est exact si f est injective et $\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid g(b) = h(b)\}$. Cela est équivalent au fait que $g \circ f = h \circ f$ et toute fonction $\alpha : D \to B$ telle que $g \circ \alpha = h \circ \alpha$ factorise de manière unique par f.

Preuve du théorème (2.7). Il faut montrer que h_X vérifie la deuxième condition de la proposition précédente. On suppose que $X = \mathrm{Spec}(R)$ est un schéma affine. Si $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $V = \mathrm{Spec}(B)$ le morphisme de (2.9),2., correspond à un morphisme fidélement plat d'anneaux $f : A \to B$. Pour que la la deuxième condition soit satisfaite il suffit que la suite

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{e_1 - e_2} B \otimes_A B \tag{1}$$

soit exacte, où e_1, e_2 sont les morphismes correspondant aux deux projections. On vérifie facilement l'exactitude dans l'un des deux cas suivants :

- f admet une section.
- f admet une section après un changement de base fidèlement plat.

Dans notre situation on a un candidat canonique pour un changement de base fidèlement plat : c'est f lui même. Or, il est clair qu'après ce changement de base nous obtenons une section ; l'exactitude de la suite ci-dessus s'ensuit.

Si X n'est pas affine, on montre que h_X est séparé un utilisant un recouvrement affine de X. Pour conclure, supposons que $g : V \to X$ est un morphisme tel que les deux compositions $V \times_U V \rightrightarrows_{p_2^*}^{p_1^*} V \to^g X$ soient égales. Il faut montrer que g factorise de manière unique par f. On peut facilement trouver une telle factorisation, en tant que fonction, en oubliant les structures de schémas ! Sachant que $f : V \to U$ est fidèlement plat, U est muni de la topologie quotient ; il s'en suit que la factorisation $U \to X$ est une fonction continue. On démontre que c'est un morphisme de schémas en utilisant un recouvrement affine de X. $\square$

Les foncteurs de Picard. On travaille sur la catégorie des schémas localement noethériens. On fixe un schéma S et un schéma $X \xrightarrow{f} S$ de type fini sur S. Pour $T \in (\mathrm{Sch}/S)$ on note $X_T = X \times_S T$. On dénote par $\mathrm{Pic}(X_T)$ le groupe de Picard de X_T ; c'est le groupe de classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles sur X_T. On définit le foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} : (\mathrm{Sch}/S) \to (\mathrm{Ens})$ par

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T).$$

Cette définition peut paraître artificielle, d'autant plus que, du point de vue de la théorie des catégories, le passage aux classes d'isomorphismes est une opération à éviter. La justification de cette définition est la suivante :

(2.10) LEMME. *Soient T un schéma intègre sur S et $E, F \in \mathrm{Pic}(X_T)$. Supposons que X_T/T est plat, projectif avec des fibres connexes. Alors $E_t \cong F_t$ pour tout $t \in T$ si, et seulement si, il existe $L \in Pic(T)$, tel que $E \cong F \otimes f_T^*(L)$.*

Preuve. Le faisceau $L = (f_T)_*(F^{-1} \otimes E)$ est inversible par le théorème de Grauert et $E \cong F \otimes f_T^*(L)$. $\square$

On dénote par $\underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{top})}_{X/S}$ le faisceau associé au foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ dans la topologie (top), où (top) peut être l'une des topologies de Zariski, étale, fppf ou fpqc. Ces faisceaux ne sont pas nécessairement isomorphes !

(2.11) *Exemple. Soit X le sous-schéma de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ défini par $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur $X_{\mathbb{C}}$ définit un point de $\underline{\mathrm{Pic}}^{(\text{ét})}_{X/\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{Zar})}_{X/\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. En particulier, le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/\mathbb{R}}$ n'est pas représentable.*

(2.12) THÉORÈME. *(de comparaison) On suppose que pour tout $T \in (Sch/S)$ le morphisme canonique $\mathcal{O}_T \to (f_T)_*\mathcal{O}_{X_T}$ est un isomorphisme. Alors,*

1. $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{Zar})}_{X/S} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^{(\text{ét})}_{X/S} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{fppf})}_{X/S} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{fpqc})}_{X/S}$.
2. *Si f admet une section, les quatre morphismes ci-dessus sont des isomorphismes.*

Pour la démonstration on s'appuyera sur le lemme suivant :

(2.13) LEMME. *([EGA]$_4$, 21.13.2) On suppose que $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ est un isomorphisme. Alors, $N \mapsto f^*N$ définit un foncteur pleinement fidèle entre les catégories des faisceaux localement libres. Son image essentielle est constituée des faisceaux localement libres M, tels que f_*M soit localement libre et $f^*f_*M \to M$ soit un isomorphisme.*

Preuve du théorème de comparaison. Soit $\lambda \in \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T)$ correspondant à un faiceau inversible L sur X_T. Supposons que l'image de λ dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{(\mathrm{fpqc})}_{X/S}(T)$ soit nulle. Alors il existe un recouvrement fpqc $p : T' = \amalg U_i \to T$, tel que $q^*L \cong f^*_{T'}Q$, où $Q \in \mathrm{Pic}(T')$ et q est le morphisme du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{T'} & \xrightarrow{q} & X_T \\ {\scriptstyle f_{T'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_T} \\ T' & \xrightarrow[p]{} & T \end{array}$$

Par les hypothèses du théorème et par la platitude de p, on a $p^*(f_T)_*L \cong (f_{T'})_*q^*L \cong Q$. Il s'en suit que $(f_T)_*L$ est inversible (car p est fidèlement plat, voir aussi (3.10)). On a aussi

$$f_{T'}^* p^* f_T^*(f_T)_*L \cong q^*L \cong f_{T'}^* Q.$$

Par le lemme précédent on a $p^*T^*f_T^*(f_T)_*L \cong Q$, d'où $f_T^*(f_T)_*L \cong L$ (car les images réciproques par p sont isomorphes). Alors $\lambda = 0$, donc $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{fpqc})}$ est injective, d'où l'injectivité de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{Zar})} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{fpqc})}$ (etc.), en sachant que faisceautiser est une opération exacte.

Il reste à montrer le deuxième point du théorème. Soient $g : S \to X$ une section de f et L un fibré inversible sur X_T. On appelle rigididification de L un isomorphisme $u : \mathcal{O}_T \to g_T^*L$. Le foncteur de Picard peut être décrit en utilisat des faisceaux inversibles rigidifiés. Plus précisément, l'application $(L, u) \mapsto L : \{(L, u)\}/\mathrm{iso} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T)$ est bijective. De plus, le seul automorphisme de (L, u) est l'identité.

Considérons $\lambda \in \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{fpqc})}(T)$ représenté par un faisceau L' sur $X_{T'}$, où $T' \to T$ est un recouvrement fpqc de T. On veut montrer que λ peut être représenté par un faisceau L sur X_T. Puisque f admet une section, les deux images de L' sur $T' \times_T T'$ sont isomorphes. Si la condition de cocycle sur $T' \times_T T' \times_T T'$ était satisfaite, alors L' serait l'image réciproque d'un L sur X_T, car le catégorie fibré des faisceaux inversibles est un champ (voir deuxième partie). Mais il n'y a pas de raisons pour que la condition de cocycle soit satisfaite. Ce problème peut être contourner en rigidifiant la situation : remplacer L' par un couple (L', u'). La condition de cocycle est automatiquement satisfaite car les seuls automorphismes sont les identités. Donc (L', u') est l'image réciproque d'un couple (L, u). On conclut que le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est un faisceau fpqc. □

(2.14) Corollaire. *Le foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ et les quatre faisceaux associés ont les même points géométriques, à savoir $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(K) = \mathrm{Pic}(X_K)$.*

(2.15) *Remarque. D'après Grothendieck, si S est noethérien et $f : X \to S$ est plat, projectif, avec des fibres géométriquement intègres, alors le faisceau étale $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\text{ét})}$ est représentable. Il s'en suit que* $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\text{ét})} \cong \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{fppf})} \cong \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}^{(\mathrm{fpqc})}$.

Deuxième Partie : Champs

3. Catégories fibrées

Motivation. On s'intéresse aux familles de fibrés vectoriels sur un schéma X. Par définition, une famille de fibrés vectoriels paramétrée par un schéma S est un fibré $V \to X \times S$. On définit un "foncteur" $F : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ comme suit :

$$\begin{array}{ccc} S & \longmapsto & F(S) = \{\text{familles } V \to X \times S\} \\ (S' \xrightarrow{f} S) & \longmapsto & f^{\#} = (1_X \times f)^* \end{array}$$

Si $S'' \xrightarrow{g} S' \xrightarrow{f} S$, sont deux changements de base successifs, alors les fibrés $(f \circ g)^{\#}V$ et $g^{\#}(f^{\#}V)$ sont isomorphes, mais ils ne sont pas egaux ! Ce qui se passe c'est que $F(S)$ n'est pas un ensemble mais une catégorie, et la définition de F ne correspond pas à un foncteur mais à un 2-foncteur. Un point de vue équivalent est celui d'une catégorie fibré : les familles de fibrés vectoriels forment une catégorie au-dessus de (Sch), dont la fibre au-dessus d'un schéma S est la catégorie $F(S)$. C'est le point de vue qui sera introduit dans ce qui suit.

(3.1) *Remarque. On pourrait définir le foncteur* de classes d'isomorphismes *des familles de fibrés vectoriels. Ce foncteur n'est pas représentable ; en fait, ce n'est même pas un faisceau.*

3.1. Définitions

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Une catégorie au-dessus de $\mathscr{C}$ est une catégorie $\mathcal{F}$ avec un foncteur $p_F : \mathcal{F} \to \mathscr{C}$.

(3.2) DÉFINITION. *On dit qu'un morphisme $\varphi : \xi \to \zeta$ de $\mathcal{F}$ est cartésien si pour tous $\varphi^{'} : \xi^{'} \to \zeta$ et $g : p_{\mathcal{F}}(\xi^{'}) \to p_{\mathcal{F}}(\xi)$ vérifiant $p_{\mathcal{F}}(\varphi) \circ g = p_{\mathcal{F}}(\varphi^{'})$, il existe un unique morphisme $\psi : \xi^{'} \to \xi$, tel que $p_{\mathcal{F}}(\psi) = g$ et $\varphi \circ \psi = \varphi^{'}$.*

Si on note $p_{\mathcal{F}}(\varphi) = S \xrightarrow{f} T$ et $p_{\mathcal{F}}(\varphi^{'}) = S^{'} \xrightarrow{f^{'}} T$, la définition précédente peut être décrite en utilisant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\xi^{'} \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dotted, "\psi"'] \arrow[drr, "\varphi^{'}"] & & \\
& \xi \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[dd, dash] & \zeta \arrow[dd, dash] \\
S^{'} \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, "f^{'}"] & & \\
& S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

Si $\varphi : \xi \to \zeta$ est un morphisme cartésien on dit que ξ est une *image réciproque* (pullback) de ζ par $f = p_{\mathcal{F}}(\varphi)$. Ainsi, s'il existe une image réciproque, elle est unique à unique isomorphisme près. Une catégorie fibrée au dessus de $\mathscr{C}$ est une catégorie qui possède des images réciproques.

(3.3) DÉFINITION. *On dit qu'une catégorie $\mathcal{F}$ sur $\mathscr{C}$ est une catégorie fibrée si pour tout morphisme $f : S \to T$ de $\mathscr{C}$ et tout objet ζ de $\mathcal{F}$ avec $p_{\mathcal{F}}(\zeta) = T$, ils existent un objet ξ et un morphisme cartésien $\varphi : \xi \to \zeta$ de $\mathcal{F}$, tels que $p_{\mathcal{F}}(\varphi) = f$.*

Soient $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée sur $\mathscr{C}$ et $S \in \mathscr{C}$. La *fibre* de $\mathcal{F}$ au-dessus de S, est la catégorie, $\mathcal{F}(S)$, dont les objets sont les objets de $\mathcal{F}$ envoyés par $p_{\mathcal{F}}$ sur S et les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{F}$ emvoyés par $p_{\mathcal{F}}$ sur l'identité de S. Un morphisme de catégories fibrées est un foncteur qui préserve les fibres. Plus précisément :

(3.4) DÉFINITION. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux catégories fibrés sur $\mathscr{C}$.*

1. *Un morphisme $F : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un foncteur tel que $p_{\mathcal{G}} \circ F = p_{\mathcal{F}}$ et l'image d'un morphisme cartésien de $\mathcal{F}$ soit un morphisme cartésien de $\mathcal{G}$. On dit que F est un isomorphisme s'il est une équivalence de catégories.*
2. *Soient $\mathcal{F} \rightrightarrows^{F}_{G} \mathcal{G}$ deux morphimes de catégories fibrées. Un morphisme $\lambda : F \to G$ est une transformation naturelle de foncteurs préservant la base ;* i.e. *pour chaque $\xi \in \mathcal{F}$, le morphisme $\lambda_\xi : F(\xi) \to G(\xi)$ appartient à la fibre $\mathcal{G}(p_{\mathcal{F}}(\xi))$.*

(3.5) *Remarque. On peut montrer qu'un morphisme $F : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un isomorphisme si, et seulement si, il existe un morphisme $G : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tel que $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$ et $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$*

3.2. Exemples

Les foncteurs contravariants. Un foncteur contravariant $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ définit une catégorie fibrée $\mathcal{F} = \amalg_{S \in \mathscr{C}} FS$. Alors $\mathcal{F}(S) = FS$, donc $\mathcal{F}$ est une catégorie fibrée en ensembles[2]. On remarque que les images réciproques sont définies de manière unique !

(3.6) LEMME. *L'association $F \mapsto \mathcal{F}$ définit un foncteur pleinement fidèle entre la catégorie des focteurs contravariants et la catégorie des catégories fibrées.*

Dorénavant, on ne distinguera plus entre un foncteur F et la catégorie fibrée associée, qui sera aussi dénotée par F.

(3.7) *Exemple. La catégorie fibrée associée (au foncteur contravariant h_X associé) à un schéma X est la catégorie fibrée des schémas sur X,* (Sch/X).

(3.8) LEMME. *(le 2-lemme de Yoneda) Le foncteur* $\mathrm{Hom}(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}(X)$, $\left(X \xrightarrow{F} \mathcal{F}\right) \mapsto F(\mathrm{Id}_X)$, *est une équivalence de catégories.*

Preuve. On définit un inverse $\mathcal{F}(X) \to \mathrm{Hom}(X, \mathcal{F})$ comme suit. D'abord, fixons pour chaque morphisme $f : S \to T$ de $\mathscr{C}$ et pour chaque objet $\zeta \in \mathcal{F}(T)$ une image réciproque qui sera notée $f^*\zeta$ (c'est l'axiome du choix). Soit $\xi \in \mathcal{F}(X)$. $F_\xi : X \to \mathcal{F}$ est le morphisme

$$F_\xi(f) = f^*\xi, \ \forall f \in X.$$

On définit un morphisme $\mathcal{F}(X) \to \mathrm{Hom}(X, \mathcal{F}), \xi \mapsto F_\xi$. Les deux morphismes sont inverses car les images réciproques sont définies à <u>unique</u> isomorphisme près. □

Une catégorie fibrée est *représentable* si elle est isomorphe à un schéma X. Si $F : X \to \mathcal{F}$ est un tel isomorphisme, on dit que $F(\mathrm{Id}_X)$ est un *objet universel* de $\mathcal{F}$.

Réciproquement, une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ définit un foncteur $\bar{\mathcal{F}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ qui envoie $S \in \mathscr{C}$ dans l'ensemble de classes d'isomorphismes de $\mathcal{F}(S)$. Cela definit bien un foncteur, compte tenu du fait que les images réciproques sont définis à isomorphisme près. Il y a un morphisme de projection canonique $p : \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$.

(3.9) LEMME. *Pour qu'une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ soit isomorphe à un foncteur il faut et il suffit que les fibres de $\mathcal{F}$ soient des groupoïds dont les seuls automorphismes sont les identités[3]. Dans ce cas, le morphisme de projection $p : \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ est un ismorphisme.*

Preuve. Si $\mathcal{F}$ est isomorphe à un foncteur F alors toute fibre $\mathcal{F}(S)$ est isomorphe à l'ensemble FS. Compte tenu qu'une équivalence de catégories est pleinement fidèle, on en déduit que $\mathcal{F}(S)$ est un groupoïd dont les seuls automorphismes sont les identités. Réciproquement, si toutes les fibres de $\mathcal{F}$ sont de cette forme là, le morphisme de projection est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le foncteur $\bar{\mathcal{F}}$, car sur chaque fibre il est pleinement fidèle et surjectif. □

---

[2]Un ensemble est une catégorie dont seuls morphismes sont les identités

[3]Un groupoïd est une catégorie dont tout les morphismes sont des isomorphismes. Un groupoïd dont les seuls automorphismes sont les identités n'est pas nécessairement un ensemble !

Les faisceaux quasi-cohérents. On dénote par $\mathcal{QC}oh$ la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents, définie comme suit :

– Un objet de $\mathcal{QC}oh$ au-dessus d'un schéma S est un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$-modules.
– Un morphisme entre deux objets $V_1 \in \mathcal{QC}oh(S_1)$ et $V_2 \in \mathcal{QC}oh(S_2)$ est un couple (f, φ) où $f : S_1 \to S_2$ est un morphisme de schémas et $\varphi : V_1 \to f^*V_2$ est un morphisme de faisceaux.

On note par $\mathcal{M}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{QC}oh$ correspondant aux faisceaux cohérents localement libres. La notion de "localement libre" peut être définie par rapport à une des topologies de Zariski, étale, fppf ou fpqc. On obtient donc, à priori, quatre catégories correspondant aux quatre topologies. En fait $\mathcal{M}_{(\mathrm{Zar})} = \mathcal{M}_{(\text{ét})} = \mathcal{M}_{(\mathrm{fppf})} = \mathcal{M}_{(\mathrm{fpqc})}$ et la justification se trouve dans le lemme suivant.

(3.10) LEMME. *Soient $f : S \to T$ un recouvrement fpqc et V un faisceau cohérent sur T. Si f^*V est Zariski-localement libre alors V l'est aussi.*

Preuve. Le problème étant local on peut supposer que T est affine et que f est un morphisme fpqc. En remplaçant S par une union disjointe d'un nombre fini de schémas affines, on peut également supposer que S est affine ; donc f correspond à un morphisme fidèlement plat d'anneau $f : A \to B$. Il faut montrer qu'un A-module de type fini M, tel que $M \otimes_A B$ soit un B-module projectif, est projectif.

Notons que pour tout A-module Q on a la suite exacte[4]

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow[q \mapsto q \otimes 1]{\beta} Q \otimes_A B \xrightarrow[\substack{e_1 : b \mapsto b \otimes 1 \\ e_2 : b \mapsto 1 \otimes b}]{d = \mathrm{Id}_Q \otimes (e_1 - e_2)} Q \otimes_A B \otimes_A B.$$

Sachant que M est de type fini, on considère une suite exacte $0 \to N \to A^{\oplus n} \to M \to 0$. On obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & A^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (a) \\
0 \arrow[r] & N \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & A^{\oplus n} \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (b) \\
0 \arrow[r] & N \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r] & A^{\oplus n} \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r] & M \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r] & 0 & (c)
\end{tikzcd}$$

Puisque $M \otimes_A B$ est un B-module projectif les suite (b) et (c) sont scindées, donc (a) l'est aussi. □

Les quotients. Dans ce paragraphe, (Sch) sera la catégorie des schémas sur un corp fixé k et G un k-groupe affine. Un *G-schéma* est un schéma muni d'une action à droite de G. Un *G-fibré* sur S est un G-schéma P avec un morphisme G-invariant $P \to S$.

Soit (top) une des topologies de Zariski, étale, fppf, fpqc. On appelle *G-fibré principal* dans la topologie (top) un G-fibré localement trivial dans (top).

Un *G-torseur* est un G-fibré $\pi : P \to S$ tel que π soit fidélement plat et quasi-compact et le morphisme canonique $(p, g) \mapsto (p, pg) : P \times G \to P \times_S P$ soit un isomorphisme.

(3.11) LEMME. *Les notions de G-fibré principal fpqc et G-torseur sont équivalentes.*

Preuve. Un G-fibré $\pi : P \to S$ est un G-fibré principal fpqc s'il existe un recouvrement fpqc $T \to S$ tel que $P_T = P \times_S T \cong T \times G$.

Tout G-torseur est un G-fibré principal fpqc, car on peut considérer $T = P$.

Réciproquement, soit $\pi : P \to S$ un G-fibré principal fpqc. Il faut montrer que π est fidélement plat et quasi-compact et que le morphisme canonique $(p, g) \mapsto (p, pg) : P \times G \to P \times_S P$ est un isomorphisme.

[4] C'est l'analoque de la suite exacte (1).

Le problème étant local, on peut supposer que S est affine et qu'il existe un morphisme fidèlement plat de schémas affines $T \to S$ tel que $P_T \cong T \times G$. Il s'en suit que π est fpqc. À noter également que π est affine. Considérons le diagramme catésien

$$\begin{tikzcd}
P_T \times G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g \times \mathrm{Id}_G"'] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & P_{P_T} \arrow[r, "\pi_{P_T}"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "(b)"] & P_T \arrow[r, "\pi_T"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "(c)"] & T \arrow[d, "f"] \\
P \times G \arrow[r, "\beta"'] & P_P \arrow[r, "\pi_P"'] & P \arrow[r, "\pi"'] & S
\end{tikzcd}$$

où α et β sont les morphismes canoniques. Les carrés (b) et (c) et le carré total sont cartésiens. Il s'en suit que (a) est cartésien et β est un isomorphisme puisque α l'est et g et h sont des recouvrements fpqc. □

(3.12) *Remarque. En général il n'y a pas de raisons à ce qu'un G-fibré principal fpqc soit un fibré principal fppf, étale ou de Zariski. Néanmoins, si G est un groupe algébrique lisse, tout G-fibré principal fpqc est étale. Autrement dit, les notions de G-fibré principal étale, fppf et fpqc coïncident. Même dans ce cas, un G-fibré principal étale n'est pas nécessairement de Zariski. Un groupe G tel que tout G-fibré principal étale soit de Zariski est appelé* spécial. *Ces groupes ont été classifiés par Grothedieck : ce sont des produits directs des SL_r et Sp_{2r}.*

(3.13) *Remarque. Si P_1 et P_2 sont deux torseurs sur S, tout morphisme (de torseurs) $P_1 \to P_2$ est un isomorphisme.*

(3.14) Définition. *Soit X un G-schéma. Le quotient $[X/G]$ est la catégorie fibrée définie comme suit :*

- *Un objet de $[X/G]$ au-dessus d'un schéma S est un G-torseur $P \to S$ avec un morphisme G-equivariant $\gamma : P \to X$.*
- *Un morphisme entre deux objets $(P_1, \gamma_1) \in [X/G](S_1)$ et $(P_2, \gamma_2) \in [X/G](S_2)$ est un diagramme castésien*

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & P_2 \arrow[d] \\
S_1 \arrow[r, "f"'] & S_2
\end{tikzcd}$$

tel que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$.

Cette définition correspond au quotient fpqc. On peut également définir les quotients de Zariski, étale ou fppf et on a

$$[X/G]_{(\mathrm{Zar})} \subset [X/G]_{(\text{ét})} \subset [X/G]_{(\mathrm{fppf})} \subset [X/G] \quad (= [X/G]_{(\mathrm{fpqc})}).$$

Ces inclusions peuvent être strictes !

(3.15) Définition. *Le classifiant d'un groupe G, noté BG, est le quotient de* $\mathrm{Spec}(k)$ *par G.*

(3.16) Proposition. **(1)** *Si le foncteur $\overline{[X/G]}$ est représentable par un schéma Y, alors il existe $f : X \to Y$ un quotient catégorique de X par G. Réciproquement, si $f : X \to Y$ est un quotient catégorique de X par G, Y est un espace de modules grossier du foncteur $\overline{[X/G]}$.*

(2) *Pour que la catégorie fibrée $[X/G]$ soit représentable par un schéma Y il faut et il suffit que X soit un G-torseur sur Y.*

Preuve. **(1)** Supposons que $\overline{[X/G]}$ est représentable par un schéma Y et soit $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ Y & & \end{array}$ l'objet universel sur Y. Le torseur trivial sur X définit un objet $\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{a_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \\ X & & \end{array}$, où a_X désigne l'action de G sur X. Il existe donc un unique morphisme $f : X \to Y$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\bar{f}} & P \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

soit cartésien et $\gamma \circ \bar{f} = a_X$. On montre que f est un quotient catégorique de X par G, *c.à.d.* :

1. *Le diagramme* $\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{a_X} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$ *est commutatif.*

   En effet, les préimages de l'objet universel par $f \circ \gamma$ et par π sont isomorphes, d'où $f \circ \gamma = \pi$. Il s'en suit que $f \circ a_X = f \circ \gamma \circ \bar{f} = \pi \circ \bar{f} = f \circ p_1$.
2. *Si $h : X \to Z$ est un morphisme tel que $h \circ a_X = h \circ p_1$, il existe un unique $\alpha : Y \to Z$ tel que $h = \alpha \circ f$.*
   Le morphisme $\Gamma = h \circ \gamma : P \to Z$ est G-invariant, donc il existe un unique $\alpha : Y \to Z$ tel que $\Gamma = \alpha \circ \pi$. De plus, $(\alpha \circ f) \circ p_1 = h \circ p_1$, d'où $\alpha \circ f = h$, sachant que p_1 est un morphisme fpqc.

Réciproquement, supposons que $f : X \to Y$ est un quotient catégorique, *c.à.d.* les deux conditions ci-dessus sont satisfaites. Tout objet $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\gamma} & X \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ S & & \end{array}$, $\boxed{\text{noté dorénavant par } (\pi, P, \gamma)}$, définit un morphisme $\bar{\gamma} : S \to Y$ tel que $\bar{\gamma} \circ \pi = f \circ \gamma$ et qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de (π, P, γ). Nous montrons que le morphisme

$$F : \overline{[X/G]} \to Y, \quad (\pi, P, \gamma) \mapsto \bar{\gamma}$$

fait de Y un espace de modules grossier de $\overline{[X/G]}$.
Soient $H : \overline{[X/G]} \to Z$ un morphisme de $\overline{[X/G]}$ dans un schéma Z et $h = H(p_1, X \times G, a_X) \in Z(X)$. L'application $X \times G \times G \to X \times G \times G$, $(x, g_1, g_2) \mapsto (x, g_1, g_1 g_2)$ définit un isomorphisme

$$a_X^*(p_1, X \times G, a_X) \to p_1^*(p_1, X \times G, a_X).$$

Il s'en suit que $h \circ a_X = h \circ p_1$, donc il existe $\alpha : Y \to Z$ tel que $h = \alpha \circ f$. Pour montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & {\scriptstyle F}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\alpha} & \\ \overline{[X/G]} & & \xrightarrow[H]{} & & Z \end{array}$$

est commutatif il faut montrer :

Pour tout objet $(\pi, P, \gamma) \in \overline{[X/G]}(S)$, on pose $\theta = H(\pi, P, \gamma) \in Z(S)$, alors $\theta = \alpha \circ \bar{\gamma}$.

Pour cela, il suffit de remarquer que $\pi^*(\pi, P, \gamma) \cong \gamma^*(p_1, X \times G, a_X)$, donc leurs images par H sont égales, d'où $\theta \circ \pi = h \circ \gamma$. On obtient

$$\theta \circ \pi = h \circ \gamma = \alpha \circ f \circ \gamma = \alpha \circ \bar{\gamma} \circ \pi.$$

Sachant que π est un recouvrement fpqc, on trouve $\theta = h \circ \bar{\gamma}$.

(2) Si X est un G-torseur sur Y, les seuls automorphismes des fibres de $[X/G]$ sont les identités, donc $[X/G] \cong \overline{[X/G]}$. De plus, le morphisme $F : \overline{[X/G]} \to Y$ est un isomorphisme. Son inverse est définit par l'objet (universel) $\begin{array}{ccc} X & = & X \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array} \in [X/G](Y)$. $\square$

4. Champs

4.1. Définitions

Les champs sont des catégories fibrées qui vérifient certaines conditions de "descente". Ces conditions sont l'analogue des conditions de faisceau pour un foncteur. Il y a tout de même deux différences essentielles qui proviennent du fait que les fibres $\mathcal{F}(S)$ sont des catégories et non des ensembles.

- Pour un champ on demandera à ce qu'on puisse recoller des objets, mais aussi des morphismes, définis localement.
- Pour recoller des objets locaux on demandera que leurs restrictions soient isomorphes (et non égales !) par des isomorphismes vérifiant la condition usuelle de cocycle.

Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée. Dorénavant, pour chaque objet $\xi \in \mathcal{F}(S)$ et pour chaque morphisme $f : T \to S$ de $\mathscr{C}$, on fixe une préimage de ξ par f qui sera noée $f^*\xi$. Si $g : T' \to T$ est un morphisme de $\mathscr{C}$, alors $(f \circ g)^*\xi$ et $g^* f^* \xi$ sont canoniquement isomorphes.

(4.1) Définition. *Soit $\mathcal{U} = \{U_i \xrightarrow{\alpha_i} U\}$ un recouvrement dans $\mathscr{C}$. On note $U_{ij} = U_i \times_U U_j$, $U_{ijk} = U_i \times_U U_j \times_U U_k$ et on considère p_1, p_2 (respectivement p_{12}, p_{13}, p_{23}) les projections de U_{ij} (respectivement U_{ijk}) sur le premier et deuxième facteur (respectivement sur les facteurs $1{\times}2, 1{\times}3, 2{\times}3$).*

1. *Une donnée de decente sur $\mathcal{U}$ est la donnée d'une collection (ξ_i, φ_{ij}) d'objets $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et d'isomorphismes $\varphi_{ij} : p_2^*\xi_j \to p_1^*\xi_i$ vérifiant la condition de cocycle $p_{13}^*\varphi_{ik} = p_{12}^*\varphi_{ij} \circ p_{23}^*\varphi_{jk}$.*
2. *On dit que (ξ_i, φ_{ij}) est une donnée de decente effective s'il existe $\xi \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\xi_i \cong \sigma_i^*\xi$ et les isomorphismes φ_{ij} soient les isomorphismes canoniques $p_2^*\xi_j \cong (\sigma_j \circ p_2)^*\xi = (\sigma_i \circ p_1)^*\xi \cong p_1^*\xi_i$.*

Soient $\xi, \zeta \in \mathcal{F}(S)$. On définit le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\xi,\zeta) : (\mathscr{C}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Set})$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(\xi,\zeta)\left(T \xrightarrow{f} S\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(T)}(f^*\xi, f^*\zeta).$$

(4.2) Définition. *Une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ est un champ si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\xi,\zeta)$ est un faisceau, pour tous $\xi, \zeta \in \mathcal{F}(S)$ (*i.e.* on peut recoller les morphismes),*
2. *Toutes les données de descente sont effectives (*i.e.* on peut recoller les objets).*

(4.3) *Remarque. Soit $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$ un recouvrement dans $\mathscr{C}$. Les données de descente sur $\mathcal{U}$ forment une catégorie, qui sera notée $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. On a un foncteur*

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

dont l'image essentielle correspond aux données de descente effectives. Si toutes les données de descente sont effectives, ce foncteur est essentiellement surjectif. De plus

$\mathcal{F}$ est un champ si, et seulement si, pour tout recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$,
le foncteur $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ est une équivalence de catégories.

(4.4) *Remarque. De la même manière que chaque préfaisceau peut être faisceautisé, à chaque catégorie fibrée $\mathcal{F}$ on peut associer un champ $\mathcal{F}^{\#}$ avec un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\#}$ tel que tout morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un champ, factorise à travers $\mathcal{F}^{\#}$.*

4.2. Exemples

Les foncteurs contravariants.

(4.5) PROPOSITION. *La catégorie fibrée associée à un foncteur $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$ est un champ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est un faisceau.*

Les faisceaux quasi-cohérents.

(4.6) THÉORÈME. *La catégorie fibrée $\mathcal{QC}oh$ est un champ fpqc.*

Pour démontrer ce théorème on utilisera le critère suivant :

(4.7) LEMME. *Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée sur* (Sch). *Alors $\mathcal{F}$ est un champ fpqc si, et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont satisfaites.*

1. *$\mathcal{F}$ est un champ de Zariski.*
2. *Pour tout morphisme fidèlement plat de schémas affines $V \to U$, le foncteur*

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$$

(voir remarque (4.3)) est une équivalence de catégories.

Preuve du théorème (4.6). Il faut vérifier la deuxième condition du lemme précédent. Soit $V \to U$ correspondant à un morphisme fidèlement plat d'anneaux $A \to B$. Alors $\mathcal{QC}oh(U) \cong \mathrm{Mod}_A^{\mathrm{op}}$ et $\mathcal{QC}oh(\{V \to U\}) \cong \mathrm{Mod}_{A\to B}^{\mathrm{op}}$, où Mod_A est la catégorie des A-modules et $\mathrm{Mod}_{A\to B}$ est la catégorie définie comme suit :

- Les objets sont des couples (N, ψ), où N est un B-module et $\psi : N \otimes_A B \to B \otimes_A N$ est un isomorphisme de $B \otimes_A B$-modules tel que le diagramme suivant soit commutatif (condition de cocycle) :

$$\begin{tikzcd} N \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, "\psi_3 = \psi \otimes \mathrm{Id}_B"] \arrow[rr, bend right, "{\begin{array}{c}\psi_2 : n \otimes b \otimes c \mapsto \sum c_i \otimes b \otimes n_i, \\ \psi(n \otimes c) = \sum c_i \otimes n_i\end{array}}"'] & B \otimes_A N \otimes_A B \arrow[r, "\psi_1 = \mathrm{Id}_B \otimes \psi"] & B \otimes_A B \otimes_A N \end{tikzcd} \tag{2}$$

- Un morphisme $\alpha : (N, \psi) \to (N', \psi')$ est un morphisme de B-modules $\alpha : N \to N'$ tel que $(\mathrm{Id}_B \otimes \alpha) \circ \psi = \psi' \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}_B)$.

Le foncteur $\mathcal{QC}oh(U) \to \mathcal{QC}oh(\{V \to U\})$ correspond au foncteur $F : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{A\to B}$ définit par

$$F : M \mapsto (B \otimes_A M, \psi_M), \text{ où } \psi_M : (B \otimes_A M) \otimes_A B \xrightarrow[b\otimes m \otimes c \mapsto b \otimes c \otimes m]{} B \otimes_A (B \otimes_A M).$$

Il faut donc montrer que F est une équivalence de catégories et, pour cela, on définit un inverse $G : \mathrm{Mod}_{A\to B} \to \mathrm{Mod}_A$ par $G(N, \psi) = \{n \in N \mid \psi(n \otimes 1) = 1 \otimes n\} \leq_{A-\text{submodule}} N$. On utilisera le fait que la suite ci-dessous est exacte (c'est l'analogue de la suite (1) utuilisée dans la preuve du théorème (2.7)).

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow[m \mapsto 1 \otimes m]{\beta} B \otimes_A M \xrightarrow[e_1 : b \mapsto b \otimes 1,\ e_2 : b \mapsto 1 \otimes b]{d = (e_1 - e_2) \otimes \mathrm{Id}_M} B \otimes_A B \otimes_A M$$

Pour $x \in B \otimes_A M$ on vérifie que $d(x) = \psi_M(x \otimes 1) - 1 \otimes x$, d'où $G(B \otimes_A M, \psi_M) = \mathrm{Ker}(d)$ et on obtient $\beta : M \cong G(B \otimes_A M, \psi_M) = GF(M)$; donc GF est ismorphe à l'identité de Mod_A.

Réciproquement, soient $(N,\psi) \in \mathrm{Mod}_{A\to B}$ et $M = G(N,\psi)$. On obtient un morphisme de B-modules $\theta : B\otimes_A M \xrightarrow[m\otimes b\mapsto bm]{} N$ qui définit un morphisme de $\mathrm{Mod}_{A\to B}$. On vérifie aussi que θ est un isomorphisme ; donc FG est isomorphe à l'identité de $\mathrm{Mod}_{A\to B}$. $\square$

(4.8) *Remarque. Dans le cas relatif, on dénotera par* $\mathcal{QC}oh_X$ *la catégorie fibrée des faisceaux quasi-cohérents sur* (Sch/X).

On peut aussi considérer la sous-catégorie pleine des faisceaux cohérents, $\mathcal{C}oh_X$*, et celle des faisceaux localement libres* $\mathcal{M}_X$*. Alors,* $\mathcal{QC}oh_X, \mathcal{C}oh_X$ *et* $\mathcal{M}_X$ *sont des champs.*

Les quotients.

(4.9) Théorème. *Soient G un groupe affine et X un G-schéma. Le quotient $[X/G]$ est un champ.*

Preuve. On supposera $X = \mathrm{Spec}(k)$, donc $[X/G] = BG$. Dans le cas général l'idée de la démonstration est la même. On vérifie la deuxième condition du lemme précédent. Soit $(R,\Delta,\epsilon,\delta)$ une k-bialgèbre où Δ,ϵ,δ sont respectivement la co-multiplication, la co-identité et le co-inverse, telle que $G = \mathrm{Spec}(R)$. On pose aussi $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $V = \mathrm{Spec}(B)$. Soit $\pi : P \to U$ un G-torseur. Alors $P = \mathrm{Spec}(M)$ est un schéma affine, où M est une A-algèbre de morphisme structurel $\pi : A \to M$. On a aussi un morphisme $\gamma : M \to M\otimes_k R$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

– Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"'] & M\otimes_k R \arrow[d, "\mathrm{Id}_M\otimes\Delta"] \\ M\otimes_k R \arrow[r, "\gamma\otimes\mathrm{Id}_R"'] & M\otimes_k R\otimes_k R \end{tikzcd}$$

– Le morphisme $\Gamma : M\otimes_A M \xrightarrow[m_1\otimes m_2\mapsto m_1\gamma(m_2)]{} M\otimes_k R$ est un isomorphisme.

La catégorie des G-torseurs sur U est équivalente à la catégorie $\mathcal{T}_A$ des couples (M,γ) où M est une A-algèbre et $\gamma : M \to M\otimes_k R$ est un morphisme de k-algèbres satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.

La catégorie $BG(\{V\to U\})$ est equivalente à la catégorie $\mathcal{T}_{A\to B}$ dont les objets sont des couples $((N,\theta),\psi)$, où $(N,\theta)\in\mathcal{T}_B$ et $\psi : N\otimes_A B \to B\otimes_A N$ est un isomorphisme de $B\otimes_A B$-algèbre, tel que

– Le diagramme

$$\begin{tikzcd} N\otimes_A B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\psi"'] & N\otimes_k R\otimes_A B \arrow[r, "n\otimes r\otimes b\mapsto n\otimes b\otimes r"] & N\otimes_A B\otimes_k R \arrow[d, "\psi\otimes\mathrm{Id}_R"] \\ B\otimes_A N \arrow[rr, "\mathrm{Id}_B\otimes\theta"'] & & B\otimes_A N\otimes_k R \end{tikzcd} \qquad (3)$$

soit commutatif ;

– ψ vérifie la condition de cocycle (2) (voir la preuve du théorème (4.6)).

Le foncteur $BG(U)\to BG(\{V\to U\})$ correspond au foncteur $F : \mathcal{T}_A \to \mathcal{T}_{A\to B}$ défini par $F(M,\gamma) = ((B\otimes_A M, \mathrm{Id}_B\otimes\gamma),\psi_M)$, ψ_M étant défini comme dans la preuve du théorème (4.6).

On définit un foncteur inverse $G : \mathcal{T}_{A\to B}\to\mathcal{T}_A$, par $G((N,\theta),\psi) = (M,\gamma)$, où

– $M = \{n\in N \mid \psi(n\otimes 1) = 1\otimes n\}$; à vérifier que c'est une A-sous-algèbre de N.

– $\gamma = \theta|_M : M \to M\otimes_k R$; à vérifier que c'est bien définit.

Pour $n \in N$ on pose $\theta(n) = \sum n_i \otimes r_i$. En utilisant la commutativité du diagram (3) et l'injectivité de θ (car fidèlement plat), on obtient

$$\psi(n \otimes 1) = 1 \otimes n \Leftrightarrow \sum \psi(n_i \otimes 1) \otimes r_i = \sum 1 \otimes n_i \otimes r_i$$

Il s'en suit que M est une A-sous-algèbre de N et que γ est bien définit (choisir une écriture $\theta(n) = \sum n_i \otimes r_i$ avec les r_i linéairement indépendents). La vérification du fait que les foncteurs F et G sont inverses se fait comme dans la preuve du théorème (4.6). □

TROISIÈME PARTIE : ALGÉBRICITÉ

5. Espaces Algébriques

Un espace algègrique est en faisceau étale *localement representable* (dans la topologie étale). Pour une définition rigoureuse il faut d'abord donner un sens à la notion de "localement representable". Comme d'habitude "localement" signifie "ce qui se passe sur un recouvrement". Il faut donc définir les recouvrements d'un foncteur donné, et le point clef pour cela est l'existence du produit fibré des foncteurs.

Par commodité, les foncteur considérés seront des foncteurs $(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$; mais il devrait être clair que certaines définitions ci-dessus restentent valables pour des foncteurs $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$. Un foncteur F sur G est un morphisme de foncteurs $F \to G$. Si $F = h_X$ on parlera d'un schéma X sur G.

Soient $F_1 \to G$ et $F_2 \to G$ deux morphismes de foncteurs. Le produit fibré $F_1 \times_G F_2$ est le foncteur défini par $(F_1 \times_G F_2)(S) = F_1(S) \times_{G(S)} F_2(S)$ pour tout $S \in (\mathrm{Sch})$.

(5.1) DÉFINITION. *Un morphisme $F \to G$ est représentable si pout tout schema X sur G le produit fibré $F \times_G X$ est représentable.*

(5.2) DÉFINITION. *Soit P une propriété des morphismes de schémas, stable par changement de base (par exemple : plat, surjectif, étale, lisse). On dit qu'un morphisme représentable $F \to G$ vérifie P si pour tout schéma X sur G le morphisme de schémas $F \times_G X \to X$ vérifie P.*

(5.3) DÉFINITION. *Une collection de morphismes $\{F_i \to F\}$ est un recouvrement de F s'ils sont tous représentables et, pour tout schéma X sur F, $\{F_i \times_F X \to X\}$ est un recouvrement de X. Un foncteur F est localement représentable s'il existe un recouvrement $\{F_i \to F\}$ tel que les foncteurs F_i soient représentables.*

(5.4) PROPOSITION. *Un faisceau de Zariski localement représentable (dans la topologie de Zariski) est représentable.*

Si on remplace la topologie de Zariski par la topologie étale, l'énoncé de la proposition précédente devient faux ! Cela nous amène à la définition des espaces algébriques. On propose d'abord un lemme qui explique la représentivité du morphisme apparaissant dans la deuxiḿe condition de la définition d'un espace algébrique (voir dessous).

(5.5) LEMME. *Soit F un foncteur. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.*

1. *Le morphisme diagonal $\delta : F \to F \times F$ est representable.*
2. *Si X, Y sont deux schémas sur F, le produit fibré $X \times_F Y$ est représentable.*

3. Tout morphisme $X \to F$ est représentable (X est un schéma).

Preuve. Voir les lemmes (6.4), (6.5) et (6.6). □

(5.6) DÉFINITION. *Un espace algébrique est un faisceau étale F tel que*

1. Le morphisme diagonal $\delta : F \to F \times F$ soit représentable.

2. Il existe un schéma X avec un morphisme étale et surjectif $X \to F$ (on dit que X est un atlas de F).

6. Champs Algébriques

6.1. Définitions

Pour définir les champs algébriques la marche à suivre est la même que pour les espaces algébriques dont ils sont l'analogue. On commencera par définir le produit fibré des catégories fibrées. Cette définition est plus subtile que dans le cas des foncteurs. On rappelle qu'un diagramme commutatif de catégories fibrées

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

est la donnée des foncteurs E, F, G, H et d'un isomorphisme[5] $F \circ E \cong H \circ G$ (et non tel qu'il existe un isomorphisme !). À noter aussi que deux foncteurs sont rarement égaux, donc une condition d'égalité entre deux foncteurs est souvent inadéquate.

Soient $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_2 \to \mathcal{G}$ deux morphismes de catégories fibrées. Le produit fibré $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ est la catégorie fibrée dont

- les objets sont des triplets (ξ_1, ξ_2, α), où ξ_1 et ξ_2 sont des objets de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ au-dessus d'un même schéma S, et $\alpha : F_1(\xi_1) \cong F_2(\xi_2) \in \mathcal{G}(S)$ (il ne faut pas demander $F_1(\xi_1) = F_2(\xi_2)$!),
- Un morphisme $(\phi_1, \phi_2) : (\xi_1, \xi_2, \alpha) \to (\zeta_1, \zeta_2, \beta)$ est un couple de morphismes $\phi_1 : \xi_1 \to \zeta_1 \in \mathcal{F}_1$ et $\phi_2 : \xi_2 \to \zeta_2 \in \mathcal{F}_2$, tels que $\beta \circ F_1(\phi_1) = F_2(\phi_2) \circ \alpha$.

Comme d'habitude, $\mathcal{F}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}_2$ vérifie la propriété d'universalité par rapport aux diagrammes commutatifs. Les définitions ci-dessous sont les mêmes que celles de la section précédente. Tout ce qu'on a à faire c'est de remplacer un foncteur F par une catégorie fibrée $\mathcal{F}$.

(6.1) DÉFINITION. *Un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est représentable si pout tout schema X sur $\mathcal{G}$ le produit fibré $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X$ est représentable.*

(6.2) DÉFINITION. *Soit P une propriété des morphismes de schémas, stable par changement de base (par exemple : plat, surjectif, étale, lisse). On dit qu'un morphisme représentable $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ vérifie P si pour tout schéma X sur $\mathcal{G}$ le morphisme de schémas $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X \to X$ vérifie P.*

(6.3) DÉFINITION. *Une collection de morphismes $\{\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}\}$ est un recouvrement de $\mathcal{F}$ s'ils sont tous représentables et, pour tout schéma X sur $\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}_i \times_{\mathcal{F}} X \to X\}$ est un recouvrement de X.*

[5]En pratique on "oublie" d'écrire cet isomorphisme.

(6.4) LEMME. *Soient $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ le morphisme diagonal et $X \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ un morphisme défini par deux objets $\xi, \zeta \in \mathcal{F}(X)$. Le diagramme suivant est cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Iso}}_X(\xi,\zeta) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow (\xi,\zeta) \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{F} \times \mathcal{F} \end{array}$$

où $\underline{\mathrm{Iso}}_X(\xi,\zeta)$ est le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\xi,\zeta)$ correspondant aux morphismes inversibles.

(6.5) LEMME. *Soient X et Y deux schémas sur $\mathcal{F}$ corrrespondant aux objets $\xi \in \mathcal{F}(X)$ et $\zeta \in \mathcal{F}(Y)$. Le diagramme suivant est cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Iso}}_{X\times Y}(p_X^*\xi, p_Y^*\zeta) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \zeta \\ X & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{F} \end{array}$$

(6.6) LEMME. *Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.*

1. *Le morphisme diagonal $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est représentable.*
2. *Si X, Y sont deux schémas sur $\mathcal{F}$, le produit fibré $X \times_{\mathcal{F}} Y$ est représentable.*
3. *Tout morphisme $X \to \mathcal{F}$ est représentable (X est un schéma).*

Preuve. C'est un corollaire des lemmes (6.4) et (6.5). □

(6.7) DÉFINITION. *Un champ algèbrique de Deligne-Mumford (abrégé champ D-M) est un champ étale $\mathcal{F}$ tel que*

1. *Le morphisme diagonal $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ soit représentable, quasi-compact et séparé.*
2. *Il existe un schéma X avec un morphisme étale et surjectif $X \to \mathcal{F}$ (on dit que X est un atlas de $\mathcal{F}$).*

(6.8) THÉORÈME. *(*[V], proposition 7.15 et [D-M], théorème 4.21*)*

1. *Soit $\mathcal{F}$ un champ D-M. Alors la diagonale δ est non-ramifiée.*
2. *Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un champ étale tel que*
   - *la diagonale δ soit représentable, quasi-compacte, séparée et non-ramifiée,*
   - *il existe un schéma de type fini X avec un morphisme lisse et surjectif $X \to \mathcal{F}$.*

   Alors $\mathcal{F}$ est un champ D-M.

(6.9) DÉFINITION. *Un champ algèbrique d'Artin (abrégé champ algébrique) est un champ fppf $\mathcal{F}$ tel que*

1. *Le morphisme diagonal $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ soit représentable, quasi-compact et séparé.*
2. *Il existe un schéma X avec un morphisme lisse et surjectif $X \to \mathcal{F}$ (on dit que X est un atlas de $\mathcal{F}$).*

(6.10) THÉORÈME. *(*[L-MB], lemme 3.3 et théorème 4.1, ou [A], théorème (6.1) *)*

1. *Soit $\mathcal{F}$ un champ algébrique. Alors la diagonale δ est de type fini.*
2. *Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un champ fppf tel que*
   - *la diagonale δ soit représentable, quasi-compacte, séparée et de type fini,*
   - *il existe un schéma X avec un morphisme fppf $X \to \mathcal{F}$.*

   Alors $\mathcal{F}$ est un champ algébrique.

6.2. Exemples

(6.11) PROPOSITION. *Soit $F : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens})$. La catégorie fibrée associée à F est un champ D-M si, et seulement si, F est un espace algébrique dont la diagonale est quasi-compacte et séparée.*

(6.12) PROPOSITION. *Le champ $\mathcal{C}oh_X$ des familles de faisceaux cohérents sur un schéma projectif X est un champ algébrique.*

Preuve. Pour construire un atlas on fixe un faisceau ample H sur X et, pour chaque polynôme de Hilbert P et des entiers $N, n \geq 0$ on considère les schémas quotient $\mathrm{Quot}^P \mathcal{O}(-n)^{\oplus N}$. On note par $Q^P_{N,n}$ l'ouvert du schéma quotient correspondant aux faisceaux E tels que $H^p(X, E) = 0$ pour $p > 0$ et l'application $H^0(X, \mathcal{O}(-n)^{\oplus N}) \to H^0(X, E)$ soit un isomorphisme. La restriction de la famille universelle à $Q^P_{N,n}$ définit un morphisme $Q^P_{N,n} \to \mathcal{QC}oh_X$. Il est clair que pour chaque faisceau cohérent E ils existent P, N, n tels que E soit représenté par un point de $Q^P_{N,n}$. Par conséquent on obtient une application surjective

$$\amalg_{P,N,n} Q^P_{N,n} \to \mathcal{QC}oh_X.$$

L'application ci-dessus définit un atlas de $\mathcal{QC}oh_X$. □

(6.13) PROPOSITION. *Si G est un goupe algébrique le quotient $[X/G]$ est un champ algébrique.*

Preuve. Si G est lisse un atlas de $[X/G]$ est construit comme suit. Le fibré trivial $X \times G$ et le morphisme $X \times G \to X$ correspondant à l'action de G sur X définissent un objet de $[X/G](X)$; donc un morphisme $X \to [X/G]$. Si $S \to [X/G]$ est un morphisme correspondant à $(P, f) \in [X/G](S)$ alors $X \times_{[X/G]} S \cong P$ et on obtient le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & S \arrow[d] \\ X \arrow[r] & {[X/G]} \end{tikzcd}$$

Donc $X \to [X/G]$ est lisse et surjectif. Si G n'est pas lisse on applique le théorème (6.10). □

7. Groupoïds

7.1. Définitions

On appelle *catégorie fibrée en groupoïds* une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ dont les fibres sont des groupoïds (*i.e.* tous les morphismes sont des isomorphismes). Autrement dit, une catégorie fibrée est fibrée en groupoïds si, et seulement si, tous ses morphismes sont cartésiens. À toute catégorie fibrée $\mathcal{F}$ on peut associer une catégorie fibrée en groupoïds $\mathcal{F}_{\mathrm{cart}}$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{F}$ et les morphismes sont les morphismes cartésiens de $\mathcal{F}$; autrement dit, on oublie les morphismes non-cartésiens. D'après la remarque (6.5), le produit fibré de deux schémas sur $\mathcal{F}$ ne "voit" que les isomorphismes de $\mathcal{F}$. Par conséquent les conditions d'algébricité ne tiennent pas compte des morphismes non cartésiens de $\mathcal{F}$. Il s'en suit que $\mathcal{F}$ est un champ D-M (ou algébrique) si, et seulement si, $\mathcal{F}_{\mathrm{cart}}$ l'est.

• DORÉNAVANT on supposera que les champs D-M ou algébriques sont, par définition, fibrés en groupoïds. D'après ce qu'on vient de dire, cette condition s'impose d'une manière naturelle.

Soit $\mathcal{F}$ un champ D-M ou algébrique et $X \to \mathcal{F}$ un atlas de $\mathcal{F}$. On note $R = X \times_{\mathcal{F}} X$ et soient $R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X$ les deux projections canoniques, qu'on appellera *source* et *cible*. On a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[d] \\
X \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

On a également un morphisme *identité* $e : X \to R$, un morphisme *inverse* $i : R \to R$ et un morphisme *multiplication* (ou *composition*) $m : R \times_X R \to R$, définis par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "e"] \arrow[drr, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[ddr, "\mathrm{Id}_X"'] & & \\
& R \arrow[r, "c"'] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[dr, dotted, "i"] \arrow[drr, "s"] \arrow[ddr, "c"'] & & \\
& R \arrow[r, "c"'] \arrow[d, "s"] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \times_X R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "m"] & R \arrow[d, "c"] \\
R \arrow[r, "s"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ces morphismes vérifient les propriétés suivantes.

1. $s \circ e = c \circ e = \mathrm{Id}_X$ (la source et la cible de l'identité d'un objet sont l'objet lui-même),
2. $m \circ (\mathrm{Id}_R \times (e \circ s)) = m \circ ((e \circ c) \times \mathrm{Id}_R) = \mathrm{Id}_R$ (l'identité est une identité à droite et à gauche),
3. $m \circ (\mathrm{Id}_R \times i) = e \circ c$ et $m \circ (i \times \mathrm{Id}_R) = e \circ s$ (l'inverse est un inverse à droite et à gauche),
4. $c \circ i = s$ et $s \circ i = c$ (la cible de l'inverse est la source et la source de l'inverse est la cible),
5. $m \circ (\mathrm{Id}_R \times m) = m \circ (m \times \mathrm{Id}_R)$ (la multiplication est assiociative).

(7.1) Définition. *On appelle groupoïd dans une catégorie $\mathscr{C}$ un système $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X, e, i, m)$ vérifiant les conditions ci-dessus. On utilisera la notation abrégéee $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$.*

Soient $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$ un groupoïd et $U \in \mathscr{C}$. On définit une catégorie $(R(U) \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X(U))$ comme suit :

- Les objets sont des morphismes $\alpha : U \to X$
- Un morphisme $\alpha \to \beta$ est un morphisme $\varphi : U \to R$ tel que $s \circ \varphi = \alpha$ et $c \circ \varphi = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& & X \\
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[drr, "\beta"'] & R \arrow[ur, "s"'] \arrow[dr, "c"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

(7.2) Proposition. (Définition) *La catégorie $(R(U) \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X(U))$ est un groupoïd. On utilisera la même notation $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$ pour désigner la catégorie fibrée en groupoïds dont la fibre au-dessus de $U \in \mathscr{C}$ est $(R(U) \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X(U))$.*

7.2. Schémas enrichis

La catégorie fibrée $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$ a les mêmes objets que X (*i.e.* $(\mathscr{C}/X)$) mais elle contient plus de morphismes. Lorsqu'on travaille sur la catégorie des schémas, on pourrais s'imaginer $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$ comme un "schéma enrichi". Le seul problème c'est que $(R \overset{s}{\underset{c}{\rightrightarrows}} X)$ n'est pas un champ, contrairement à un schéma. D'où la définition suivante :

(7.3) DÉFINITION. *(<u>non standard</u>) On appelle schéma enrichi le champ fpqc associé à une catégorie fibrée en groupoïds* $(R \rightrightarrows_c^s X)$. *Il sera noté par* $(R \rightrightarrows_c^s X)^{\#}$.

(7.4) DÉFINITION. *(<u>non standard</u>) On appelle champ quasi-algébrique un champ fpqc* $\mathcal{F}$ *tel que*

1. *Le morphisme diagonal* $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *soit représentable.*
2. *Il existe un schéma* X *(appelé atlas) avec un morphisme fpqc* $X \to \mathcal{F}$.

(7.5) PROPOSITION. *Un champ fpqc* $\mathcal{F}$ *est quasi-algébrique si, et seulement si, il existe un schéma enrichi* $(R \rightrightarrows_c^s X)^{\#}$ *avec* s *et* c *fidèlement plats et quasi-compacts, tel que* $\mathcal{F} \cong (R \rightrightarrows_c^s X)^{\#}$.

(7.6) THÉORÈME. *(*[A], théorème (6.1)*) Soit* $(R \rightrightarrows_c^s X)$ *un groupoïd tel que* s *et* c *soient fidèlement plats et* $(s, c) : R \to X \times X$ *soit de type fini. Alors il existe un groupoïd* $(R' \rightrightarrows_{c'}^{s'} X')$ *avec* s *et* c *lisses et surjectifs, tel que* $(R \rightrightarrows_c^s X)^{\#}_{(\mathrm{fppf})} \cong (R' \rightrightarrows_{c'}^{s'} X')^{\#}_{(\mathrm{fppf})}$.

Preuve. C'est une reformulation du théorème (6.10). □

7.3. Relations d'équivalence

(7.7) DÉFINITION. *On dit qu'un groupoïd* $(R \rightrightarrows_c^s X)$ *est une relation d'équivalence si pour chaque* $U \in \mathscr{C}$ *l'application* $(s, c) : R(U) \to X(U) \times X(U)$ *est injective. Alors, compte tenu des propriétés des groupoïds* 1. – 5., *R(U) définit une rélation d'équivalence sur X(U).*

(7.8) *Exemple. Un groupe* G *agissant sur un schéma* X *définit une relation d'équivalence* $(X \times G \rightrightarrows X)$, *où les deux morphismes correspondent à la première projection et à l'action de* G *sur* X.

(7.9) DÉFINITION. *Soit* $(R \rightrightarrows_c^s X)$ *une relation déquivalence. On dit que* $q : X \to Y$ *est un quotient si pour tout* $f : X \to Z$ *tel que* $f \circ s = f \circ c$ *il existe un unique* $g : Y \to Z$ *tel que* $f = g \circ q$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "c"'] & X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dotted, "g"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

(7.10) *Remarque. Même si un quotient* $q : X \to Y$ *existe,* $Y(U)$ *n'est pas nécessairement le quotient de* $X(U)$ *par* $R(U)$, $U \in \mathscr{C}$.

(7.11) THÉORÈME. *Soient* X *un schéma projectif et* $(R \rightrightarrows_{p_2}^{p_1} X)$ *une relation d'équivalence définie par un sous-schéma fermé* $R \subset X \times X$, *tels que les deux projections soient plats et projectifs. Alors il existe un quotient* $q : X \to Y$ *fidèlement plat, projectif et le morphisme* $R \to X \times_Y X$ *est un isomorphisme.*

Preuve. On peut voir R comme une famille de sous-schémas fermés de X paramétrée par X lui-même. Soit H le sous-schéma du schéma de Hilbert qui correspond aux polymômes de Hilbert apparaissant dans cette famille. H est un schéma projectif (il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de Hilbert) et il paramètre une famille universelle $E \subset X \times H$ telle que la projection $p : E \to H$ soit plate, surjective et propre.

La famille $p_2 : R \to X$ induit un morphisme $f : X \to H$ tel que $R = (\mathrm{Id}_X \times f)^* E$. Le graphe $(\mathrm{Id}_X, f) : X \to X \times H$ est un plongement fermé qui factorise à travers E. Son image définit un sous-schéma fermé $Z \subset E$. On peut vérifie que le sous-schéma $Z \subset E$ satisfait la condition de cocyle par rapport au recouvrement fppf $p : E \to H$. Alors, Z descend dans un sous-schéma fermé $Y \subset H$ tel que $Z = p^* Y$, et $X \cong Z \to Y$ définit un quotient de $(R \rightrightarrows^{p_1}_{p_2} X)$. $\square$

(7.12) Définition. *Un champ algébrique (ou D-M) $\mathcal{F}$ est séparé si le morphisme diagonal $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est propre. On remarque que le morphisme diagonal d'un champ D-M est propre si, et seulement si, il est fini.*

(7.13) *Exemple. Si G est un groupe fini, $[X/G]$ est un champ D-M séparé.*

(7.14) *Exemple. Le champ $\mathcal{M}_g$ $(g \geq 2)$ des courbes stables de genre g est un champ D-M séparé (voir [D-M] proposition (5.1)).*

(7.15) Corollaire. *Si $\mathcal{F}$ est un champ D-M séparé, $\bar{\mathcal{F}}$ admet un espace de modules grossier.*

Preuve. Soient $X \to \mathcal{F}$ un atlas de $\mathcal{F}$ et $R = X \times_{\mathcal{F}} X \rightrightarrows^{s}_{c} X$. On obtient le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\Delta_R"] \arrow[d, equal] & R \times R \arrow[d, "(s \times c)"] \\
R \arrow[r, "(s,c)"] \arrow[d] & X \times X \arrow[d] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\Delta_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F} \times \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\Delta_{\mathcal{F}}$ est propre, en particulier universellement fermé, donc Δ_R est un plongement fermé. Puisque s and c sont étales et surjectifs, $(s, c) : R \to X \times X$ est un plongement fermé. Il s'en suit que R définit une relation d'équivalence sur X et les deux projections s'identifient aux morphismes projectifs (car étales et finis) s et c. D'après le théorème (7.11) il existe un quotient $X \to Y$ de $(R \rightrightarrows^{p_1}_{p_2} X)$. De la même manière que dans le preuve de la proposition (3.16) on vérifie que Y est un espace de modules grossier de $\bar{\mathcal{F}}$. $\square$

Références

[A] Artin M., *Versal deformations and algebraic stacks*, Inv. Math. 27 (1974), 165-189.

[D-M] Deligne P. et Mumford D., *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 36 (1969), 75-110.

[EGA] Grothendieck A., *Éléments de géométrie algébrique :* $\mathbf{IV}_1$ et $\mathbf{IV}_4$, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 20 (1964), 5-259 et 32 (1967), 5-361.

[K] Knutson D., *Algebraic Spaces*, LNM 203, Springer 1971.

[L-MB] Laumon G. et Moret-Bailly L., *Champs algébriques*, Springer 2000.

[V] Vistoli A., *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. Math. 97 (1989), 613-670.

Table des matières

Introduction **1**

PREMIÈRE PARTIE : FAISCEAUX 1

1. Foncteurs représentables et objets universels **1**
- 1.1. Rappels . . . 1
- 1.2. Foncteurs représentables . . . 2
- 1.3. Objets universels . . . 2
- 1.4. Exemples . . . 3

2. Topologies de Grothendieck, faisceaux **3**
- 2.1. Définitions . . . 3
- 2.2. Les topologies globales sur (Sch) . . . 4
  - La topologie de Zariski . . . 5
  - La topologie étale . . . 5
  - La topologie fppf . . . 5
  - La topologie fpqc . . . 5
- 2.3. Exemples . . . 5
  - Les foncteurs représentables . . . 5
  - Les foncteurs de Picard . . . 7

DEUXIÈME PARTIE : CHAMPS 8

3. Catégories fibrées **8**
- 3.1. Définitions . . . 9
- 3.2. Exemples . . . 10
  - Les foncteurs contravariants . . . 10
  - Les faisceaux quasi-cohérents . . . 11
  - Les quotients . . . 11

4. Champs **14**
- 4.1. Définitions . . . 14
- 4.2. Exemples . . . 15
  - Les foncteurs contravariants . . . 15
  - Les faisceaux quasi-cohérents . . . 15
  - Les quotients . . . 16

TROISIÈME PARTIE : ALGÉBRICITÉ 17

5. Espaces Algébriques **17**

6. Champs Algébriques **18**
- 6.1. Définitions . . . 18
- 6.2. Exemples . . . 20

7. Groupoïds **20**
- 7.1. Définitions . . . 20
- 7.2. Schémas enrichis . . . 21
- 7.3. Relations d'équivalence . . . 22