EXAMEN SNSB ANALIZĂ – 2003

Scopul urmatorului exercitiu ghidat este de a demonstra un rezultat de analiza **reala** şi anume:

(R): Daca $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie de clasa C^∞ astfel încat

$$\phi'(0) = 1 \text{ şi } |\varphi^{(n)}| \leq 1 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

atunci $\phi(x) = \sin(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Notatii:

- $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ f \text{ întreaga}, |f(z)| \leq \exp\left(|\Im(z)|\right)(\forall) z \in \mathbb{C}\}$,
- C_n: patratul cu vârfurile:

$$A = 2n\pi + i2n\pi, B = -2n\pi + i2n\pi$$
$$C = -2n\pi - i2n\pi, D = 2n\pi - i2n\pi.$$

- δC_n: frontiera acestui pătrat, orientată pozitiv,

$$z_p = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

1. Sa se arate ca daca $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este întreaga şi $|f^{(n)}|(x) \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $f \in \mathcal{E}$.

2. Sa se arate ca:

a) $|\cos(z)| \geq \alpha \exp(|\Im(z)|)$ $(\forall) z \in \delta C_n$, unde $\alpha > 0$ este o constanta.

b) $\displaystyle \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta C_n} \frac{f(z)}{z^2 \cos z} dz = \sum_{p=-2n}^{2n-1} \frac{(-1)^{p+1} f(z-p)}{z_p^2} + f'(0), \quad \forall f \in \mathcal{E}.$

c) $\displaystyle \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^p f(z_p)}{z_p^2} = f'(0), \quad \forall f \in \mathcal{E}.$

3. Sa se arate ca $\sin \in \mathcal{E}$ si sa se deduca: $\displaystyle \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z_p^2} = 1$ şi:

$$|f'(0)| \leq 1 \text{ pentru orice } f \in \mathcal{E}.$$

4. Fie $f \in \mathcal{E}$ şi $z_0 \in \mathbb{C}$ fixate. Fie $g(z) = \exp\left(-|\Im(z_0)|\right) f(z + z_0)$. Sa se deduca de aici ca

$$|f'(z_0)| \leq \exp(|\Im(z_0)|)' \text{ [deci } f \in \mathcal{E} \Rightarrow f' \in \mathcal{E}].$$

5. Sa se arate reciproca lui **1**: $f \in \mathcal{E} \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

6. Fie φ o functie ca în enuntul (R) şi $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Sa se arate ca f este bine definita şi analitica întreaga.
b) Sa se arate ca $f(x) = \varphi(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) Fie $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Folosind functia

$$h_t(z) = f(z)/(z-t)^2 \cos(z)$$

si metoda de la **2**, sa se arate ca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{\cos(t)}\right) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \frac{\varphi(z_p)}{(z_p - t)^2} \quad \text{si} \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \frac{\varphi(z_p)}{z_p}^2 = 1$$

d) Folosind **3** sa se arate ca $\varphi(z_p) = (-1)^p$, $(p \in \mathbb{Z})$ şi sa se deduca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{\cos(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right), \text{ pentru orice } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

e) Sa se concluda: $\varphi(t) = \sin(t)$, mai întai pentru $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi apoi pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

$$|\cos(z)|^2 = sh(y)^2 + \cos(x)^2 \ (z = x + iy; x, y, \in \mathbb{R}).$$
$$(sh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})).$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., \}.$$