ŞCOALA NORMALĂ SUPERIOARĂ BUCUREŞTI
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ
MASTERUL DE GEOMETRIE ŞI TOPOLOGIE

DIZERTAŢIE

MIHAELA VERONICA PILCA

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. LIVIU ORNEA

August 2006

DIZERTAŢIE

METRICI EXTREMALE PE VARIETĂŢI SASAKI

MIHAELA VERONICA PILCA

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. LIVIU ORNEA

Cuprins

Introducere

În această lucrare ne propunem să determinăm analogul metricilor Kähler extremale pe varietăţi Sasaki.

Una dintre problemele fundamentale din geometria diferenţială este următoarea: fiind dată o varietate diferenţială compactă M, există metrici riemanniene speciale (sau "bune") pe M?[1] În dimensiune 2 se ştie răspunsul: cele mai "bune" metrici sunt cele de curbură constantă. Pe orice suprafaţă compactă există cel puţin o metrică riemanniană de curbură constantă.

O generalizare naturală a acestei condiţii în dimensiuni mai mari, după cum este motivat în [Be], este aceea de curbură Ricci constantă[2], obţinându-se metricile Einstein. Pe de o parte, pe orice varietate compactă de dimensiune mai mare sau egală cu 3, metricile de curbură scalară constantă formează o familie infinit dimensională, fiind deci prea multe pentru a le considera privilegiate, iar pe de altă parte, curbura secţională constantă este o condiţie prea restrictivă, singurele varietăţi simplu conexe cu această proprietate fiind difeomeorfe cu $\mathbb{R}^n$ sau S^n. Condiţia Einstein se impune în mod natural şi datorită faptului că metricile Einstein sunt punctele critice ale funcţionalei dată de curbura scalară totală pe mulţimea metricilor de volum 1.

În dimensiune mai mare sau egală cu 5 nu se ştie dacă orice varietate compactă admite cel puţin o metrică Einstein. Căutându-se alte exemple decât cele omogene, s-a observat că este utilă considerarea unei structuri suplimentare, o clasă importantă fiind reprezentată de metricile Kähler-Einstein. Celebra conjectură Calabi-Yau ne asigură existenţa unei unice metrici Ricci plate în clasa sa de coomologie, dacă prima clasă Chern a varietăţii se anulează[3]. Aubin a demonstrat rezultatul analog în cazul clasei Chern negativ definite, în timp ce pentru varietăţile Kähler a căror clasă Chern este pozitiv definită au fost găsite obstrucţii (de exemplu invariantul Futaki, obstrucţia Matsushima), pe baza cărora s-au dat exemple de varietăţi Kähler care nu admit metrici Kähler-Einstein. Motivat astfel de determinarea unor reprezentanţi canonici ai unei clase Kähler date, Calabi a introdus în [Cal] o clasă mai largă de metrici speciale. Prin definiţie, acestea sunt punctele critice ale funcţionalei riemanniene dată de pătratul normei L^2 a curburii

---

[1] Această întrebare a fost pusă în 1958 de către René Thom, *cf.* [Be].

[2] Aici considerăm curbura Ricci ca fiind restricţia diagonală la fibrarea tangentă unitară a formei biliniare simetrice, *Ric*, dată de (0.7).

[3] Acestea sunt singurele exemple compacte cunoscute de metrici Ricci plate.

scalare şi au fost numite *metrici Kähler extremale*[4]. În acelaşi articol, Calabi a arătat că metricile Kähler extremale sunt exact metricile Kähler a căror curbură scalară este potenţial de olomorfie.

Scopul acestei lucrări este de a determina pe varietăţile Sasaki, care reprezintă analogul în dimensiune impară al varietăţilor Kähler, o clasă de metrici speciale corespunzătoare metricilor Kähler extremale şi care să generalizeze, la rândul ei, clasa metricilor Sasaki-Einstein. O altă motivaţie pentru introducerea unor metrici folosind abordarea variaţională este dată de faptul că, de exemplu, metricile Sasaki-Einstein nu sunt complet înţelese prin studiul fibrărilor în cercuri peste Kähler-Einstein. Conjectura lui Cheeger şi Tian, conform căreia orice varietate compactă Sasaki-Einstein este quasi-regulată, a fost recent contrazisă de exemple de metrici Sasaki-Einstein neregulate descoperite de fizicieni[5]. Astfel, unul dintre avantajele considerării condiţiei de extremalitate este tratarea simultană a tuturor tipurilor de structuri Sasaki, nemaifiind nevoie să ne restrângem la cazul quasi-regulat.

Pentru varietăţile Sasaki considerăm tot funcţionala Calabi, dată de pătratul normei L^2 a curburii scalare, fiind necesar să determinăm spaţiul corespunzător de metrici pe care aceasta este definită. Prin analogie cu fixarea structurii complexe şi a clasei Kähler, ne uităm la deformările structurilor Sasaki care au aceeaşi structură olomorfă transversă şi determină aceeaşi clasă fundamentală bazică[6]. Numim punctele critice ale funcţionalei astfel definite *metrici Sasaki extremale*[7].

În ceea ce priveşte organizarea lucrării, într-o primă secţiune amintim câteva noţiuni de bază ale geometriei Sasaki, mai ales pentru a vedea cum este situată aceasta în mod natural între două geometrii Kähler. Pe de o parte, conul metric peste o varietate Sasaki este Kähler, iar pe de altă parte, pentru orice varietate Sasaki, foliaţia 1-dimensională determinată de câmpul său Reeb are o structură Kähler transversă. Mai mult, în cazul quasi-regulat, în care toate foile sunt compacte, spaţiul cât este un orbifold Kähler.

În a doua secţiune prezentăm geometria Kähler transversă a unei varietăţi Sasaki. Începem cu unele aspecte generale legate de teoria foliaţiilor, pe care le particularizăm pentru foliaţia caracteristică a unei

[4]Existenţa unei astfel de metrici pe o varietate complexă compactă impune anumite restricţii asupra grupului de automorfisme, însă existenţa sau nu a metricilor Kähler extremale care reprezintă o clasă dată rămâne una dintre problemele deschise importante din geometria Kähler.

[5]Astfel de exemple apar în [MSY], unde este dată şi o caracterizare variaţională a metricilor Sasaki-Einstein, ca fiind punctele minime ale acţiunii Hilbert.

[6]Pentru a putea vorbi despre "obiecte bazice" este necesar să fixăm foliaţia caracteristică. Mai mult, considerăm fixat câmpul Reeb, ceea ce implică şi obţinerea aceleiaşi clase fundamentale bazice de coomologie.

[7]În perioada finalizării acestei lucrări, a apărut un studiu al acestor metrici şi în [BGS], unde sunt numite *metrici Sasaki canonice*.

varietăţi Sasaki. În acest caz ne interesează în mod special câteva proprietăţi ale operatorilor bazici, de care avem nevoie în studiul metricilor Sasaki extremale.

Cea de-a treia secţiune cuprinde demonstrarea rezultatului analog pentru varietăţi Sasaki al descompunerii câmpurilor vectoriale olomorfe pe varietăţi Kähler compacte, considerând noţiunea de contact-olomorfie introdusă în [BS]. Găsim mai întâi această descompunere în cazul regulat, unde verificăm obţinerea ei prin ridicarea descompunerii de pe varietatea Kähler cât, iar după aceea demonstrăm cazul general, prin considerarea geometriei transverse. Existenţa acestei descompuneri ne permite să demonstrăm pentru varietăţile Sasaki extremale (*cf.* Teorema 4.3) analogul rezultatului lui Calabi (*cf.* [Cal]) referitor la splitarea algebrei Lie a câmpurilor vectoriale olomorfe pe o varietate Kähler extremală.

În ultima secţiune introducem metricile Sasaki extremale prin analogie cu cele din geometria Kähler, urmând însă sensul invers: pornind de la echivalenţa stabilită de Calabi în cazul Kähler, considerăm o primă definiţie "formală", potrivit căreia metricile Sasaki extremale sunt acele metrici care au curbura scalară potenţial de olomorfie (noţiune pe care o introducem anterior pe varietăţile Sasaki). Această definiţie ne permite stabilirea legăturii cu metricile Kähler extremale prin cele două construcţii: conul metric şi varietatea cât (în cazul regulat). În Teorema 4.2 demonstrăm echivalenţa cu abordarea variaţională: analizăm problema variaţională pentru pătratul normei L^2 a curburii scalare peste un spaţiu corespunzător de metrici, stabilind că punctele critice ale acestei funcţionale sunt exact metricile Sasaki extremale, ceea ce justifică denumirea lor.

Convenţii şi notaţii

În literatura de specialitate există mai multe convenţii (de semn sau constante multiplicative) şi de aceea am considerat necesară clarificarea de la început a convenţiilor pe care le adoptăm.

Notăm componentele unei structuri Sasaki astfel: $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, unde ξ este câmpul Reeb (care este Killing), η forma de contact (care este 1-forma duală a lui ξ), $\mathcal{D} := \ker(\eta) = \xi^{\perp}$ este distribuţia de contact; g metrica asociată; ϕ endomorfismul fibrării tangente definit prin:

$$g(\phi X, Y) = \mathrm{d}\eta(X, Y), \tag{0.1}$$

sau prin: $\phi = \nabla\xi$, şi care îndeplineşte egalitatea: $\phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi$.

Condiţiile echivalente pentru varietăţi Sasaki se exprimă astfel:

$$(\nabla_X \phi)(Y) = \eta(Y)X - g(X, Y)\xi. \tag{0.2}$$

$$[\phi, \phi](X, Y) = -2\mathrm{d}\eta(X, Y)\xi. \tag{0.3}$$

$$R(\xi, X)Y = (\nabla_X \phi)(Y). \tag{0.4}$$

Convenţii generale şi notaţii pentru:

- derivata exterioară a unei 1-forme:

$$\mathrm{d}\eta(X, Y) = \frac{1}{2}(X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y])). \tag{0.5}$$

- tensorii de curbură[8]:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{0.6}$$

$$Ric(X, Y) = \sum_i g(R(e_i, X)Y, e_i). \tag{0.7}$$

- $\mathcal{L}_X$=derivata Lie în direcţia câmpului vectorial X, ι_X = produsul interior cu X (acestea apar în special în formula lui Cartan pentru forme diferenţiale: $\mathcal{L}_X = (\iota_X) \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ (\iota_X)$).
- $\mathrm{d}f = f_*$ = diferenţiala funcţiei f.
- vol_g = forma volum asociată metricii g.
- dualitatea riemanniană între 1-forme diferenţiale şi câmpuri vectoriale dată de o metrică fixată: $X \to X^\flat$, $\alpha \to \alpha^\#$. Orice metrică (pe fibratul tangent) induce în mod natural o metrică pe orice fibrat tensorial asociat. Notăm cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produsul scalar punctual indus pe un fibrat tensorial, dar pentru forme diferenţiale folosim următoarea convenţie diferită:

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \rangle = \det((\alpha_i, \beta_j)),$$

produsul scalar astfel definit fiind egal cu $\frac{1}{p!}$ din produsul tensorial obişnuit. Pe varietăţile compacte, notăm cu $(\cdot, \cdot)$ produsul global (dat de integrare).

[8] $\{e_i\}$ este o bază locală ortonormată.

1. Câteva noţiuni de bază

În această primă secţiune definim varietăţile Sasaki şi prezentăm câteva proprietăţi ale lor.

1.1. **Definiţii echivalente ale varietăţilor Sasaki.** Varietăţile Sasaki[9] reprezintă analogul varietăţilor Kähler în dimensiune impară. Dăm în continuare câteva definiţii echivalente[10], care ne arată că geometria Sasaki poate fi privită din mai multe puncte de vedere diferite, fiecare fiind util pentru abordarea anumitor aspecte ale acestei geometrii.

Iniţial varietăţile Sasaki au fost definite pornind de la o varietate metrică de contact care îndeplineşte o condiţie de normalitate.

Definiţia 1.1. O *structură metrică de contact* pe o varietate riemanniană (M, g) este dată de un câmp vectorial unitar ξ, astfel încât endomorfismul ϕ, definit de $g(\phi\cdot, \cdot) = \mathrm{d}\eta(\cdot, \cdot)$, unde η este 1-forma duală a lui ξ (*i.e.* $\eta := g(\xi, \cdot)$), satisface relaţia:

$$\phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi. \tag{1.1}$$

O astfel de structură se numeşte de *K-contact* dacă ξ este Killing. Dacă, în plus, este îndeplinită condiţia de normalitate[11]:

$$[\phi, \phi](X, Y) = -2\mathrm{d}\eta(X, Y)\xi, \tag{1.2}$$

atunci este o *structură Sasaki.*

Observaţia 1.1. Pentru orice structură metrică de contact observăm că η este o 1-formă de contact (*i.e.* $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n \neq 0$, unde $\dim(M) = 2n+1$), iar ξ este câmpul Reeb (caracteristic) asociat lui η (*i.e.* este definit de condiţiile: $\eta(\xi) = 1$, $\iota_\xi \mathrm{d}\eta = 0$). Notăm cu $\mathcal{D} = ker(\eta) = \xi^\perp$ distribuţia formei de contact η.

Observaţia 1.2. O reformulare a ultimei condiţii din definiţie este următoarea: o structură de K-contact se numeşte Sasaki dacă structura sa CR subiacentă este integrabilă. Reamintim că o structură CR este, în cadrul cel mai general, un câmp de structuri complexe pe un câmp de hiperplane, iar pe o varietate de K-contact (M, g, ξ) obţinem o astfel de structură definind $J := \nabla\xi$ pe $\mathcal{D} := \xi^\perp$. În plus, condiţia de integrabilitate pentru structura CR $(M, \mathcal{D}, J)$ este dată de anularea tensorului Nijenhuis: $N_J(X, Y) = 0, (\forall)X, Y \in \mathcal{D}$.

---

[9] Aceste varietăţi au fost introduse de Sasaki în 1960 ([Sa]) ca un caz special de structură de contact pe o varietate riemanniană, fiind studiate în special de şcoala japoneză în anii '70. În ultimii 15 ani au fost studiate din ce în ce mai mult (în particular s-au găsit numeroase exemple de varietăţi Sasaki-Einstein), constituind una dintre cele mai importante geometrii speciale, motivaţia venind mai ales din fizică.

[10] Echivalenţa acestor definiţii este demonstrată, de exemplu, în [BG2].

[11] În această formulă croşetul $[\cdot, \cdot]$ este o notaţie pentru *torsiunea Nijenhuis* a unui tensor T de tipul $(1, 1)$, definită prin: $[T, T](X, Y) = N_T(X, Y) = T^2[X, Y] + [TX, TY] - T[TX, Y] - T[X, TY]$.

Pornind direct de la o varietate riemanniană avem:

Definiţia 1.2. O varietate riemanniană de dimensiune impară (M, g) se numeşte *Sasaki* dacă există un câmp Killing unitar ξ astfel încât:

$$\nabla_{\cdot}\nabla\xi = \xi \wedge \cdot, \tag{1.3}$$

unde ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii g.

Observaţia 1.3.

- Explicit egalitatea (1.3) se scrie astfel:

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(\xi, Y)X - g(X, Y)\xi, \tag{1.4}$$

  unde am definit $\phi(X) = \nabla_X \xi$ (deoarece ξ este Killing, rezultă că $\nabla_{\cdot}\xi$ este un endomorfism antisimetric al fibrării tangente).
- Această definiţie exprimă poate cel mai bine analogia cu varietăţile Kähler: condiţia (1.3) rescrisă astfel şi restricţionată la distribuţia de contact $\mathcal{D}$ corespunde condiţiei de pe o varietate Kähler ca structura complexă J să fie paralelă.
- Deoarece pentru orice câmp Killing ξ are loc următoarea identitate generală[12]: $R_{\xi,X} = \nabla_X \phi$, putem încă reformula Definiţia 1.2, folosind curbura, astfel:
  O varietate riemanniană de dimensiune impară (M, g) se numeşte *Sasaki* dacă există un câmp Killing unitar ξ astfel încât:

$$R(X, \xi)Y = g(X, Y)\xi - g(\xi, Y)X, \tag{1.5}$$

  ceea ce se verifică imediat că este echivalent şi cu următoarea condiţie: curbura secţională a oricărui plan care conţine pe ξ este egală cu 1.
- În particular, rezultă că pe o varietate Sasaki, ξ este vector propriu al curburii Ricci (văzută ca endomorfism al fibrării tangente) corespunzător valorii proprii $2n$: $Ric(\xi) = 2n\xi$, unde $\dim(M) = 2n + 1$.

O altă abordare a varietăţilor Sasaki, mai geometrică şi intuitivă, foloseşte conul metric asociat:

Definiţia 1.3. O varietate riemanniană (M, g) se numeşte *Sasaki* dacă conul său metric $C(M) = (M \times \mathbb{R}^+, \bar{g} = dr^2 + r^2 g)$ este Kähler.

Observaţia 1.4. Această definiţie este naturală, deoarece prin construcţia con sunt deja puse în corespondenţă structurile de dimensiune impară şi pară astfel[13]:

M - var. de aproape contact $\Longleftrightarrow$ C(M) - var. aproape complexă

M - var. de contact $\Longleftrightarrow$ C(M) - var. simplectică

M - var. metrică de contact $\Longleftrightarrow$ C(M)- var. aproape Kähler.

[12] Folosim notaţiile precedente, deci ϕ este derivata covariantă a lui ξ: $\phi = \nabla_{\cdot}\xi$.

[13] De fiecare dată există o construcţie precisă care ne dă legătura între cele două structuri considerate (detalii sunt date în [BG1], § 4.5).

Observaţia 1.5. Definirea cu ajutorul construcţiei con a structurilor Sasaki conduce la formularea unor caracterizări echivalente, care permit studiul acestor structuri prin utilizarea tehnicilor de la varietăţile Kähler[14]. O astfel de caracterizare este următoarea[15]: o varietate Sasaki este Einstein dacă şi numai dacă conul său Kähler este Ricci-plat.

Schiţăm numai echivalenţa dintre ultimile două definiţii, în special pentru a explicita construcţia structurii Kähler pe con şi reciproc, obţinerea structurii Sasaki pe secţiunea conului la nivelul $r = 1$.

Fie X, Y din $\mathcal{X}(M)$, considerate drept câmpuri vectoriale pe conul $C(M)$ şi $\bar{\nabla}$ conexiunea Levi-Civita a metricii $\bar{g}$. Cum metrica con este un caz particular de produs twistat, aplicând formulele generale (*cf.* [O'N]) au loc egalităţile (am notat $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$, unde r este coordonata de pe semidreapta reală $\mathbb{R}_+$):

$$\bar{\nabla}_{\partial_r}\partial_r = 0,\ \bar{\nabla}_{\partial_r}X = \bar{\nabla}_X\partial_r = \frac{1}{r}X,\ \bar{\nabla}_XY = \nabla_XY - rg(X,Y)\partial_r. \tag{1.6}$$

Dacă pornim cu o structură Kähler ($\bar{g} = dr^2 + r^2g, J, \omega$) pe conul $C(M)$, atunci, identificând M cu $M \times \{1\} \subset C(M)$, definim:

$$\xi = -J(\partial_r), \quad \eta(Y) = g(\xi, Y), \quad \phi(Y) = \nabla_Y\xi, \tag{1.7}$$

pentru orice $Y \in \Gamma(TM)$. Arătăm că ξ este câmp Killing unitar pe M şi satisface condiţia (1.3).

Din definiţie $\xi = -J(\partial_r)$ este unitar şi are loc:

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y\xi, X) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Y\xi + g(\xi,Y)\partial_r, X) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_YJ(\partial_r), X) = \\ &= -\bar{g}(J(\bar{\nabla}_Y\partial_r), X) = -\bar{g}(J(Y), X), \end{aligned}$$

care este anti-simetrică în X şi Y, deci ξ este Killing (pentru penultima egalitate am folosit faptul că pe o varietate Kähler structura complexă J este paralelă). Egalitatea (1.3) rezultă folosind definiţiile date şi formulele (1.6).

Reciproc, construim structura Kähler pe con astfel: considerăm generatorul infinitezimal al grupului de omotetii ale conului (date de $(x, r) \mapsto (x, \lambda r)$), notat $\psi := r\partial_r$ şi numit câmpul Euler sau Liouville al lui $C(M)$ şi definim un endomorfism al fibrării tangente $TC(M)$ prin formulele:

$$JY = \phi(Y) + \eta(Y)\psi, \quad J\psi = -\xi,$$

unde $\eta(Y) = g(\xi, Y)$ este 1-forma duală a lui ξ. Se verifică direct că J este o structură aproape complexă pe $C(M)$ şi metrica $\bar{g}$ este hermitiană. Pentru ca $(C(M), \bar{g}, J)$ să fie Kähler este necesar şi suficient să

---

[14]În acest sens un exemplu este demonstraţia conjecturii Goldberg pentru varietăţi Sasaki, dată în [ADM], precum şi o demonstraţie mai simplă a rezultatului lui Kashiwada: o 3-structură metrică de contact este 3-Sasaki.

[15]Această echivalenţă este o consecinţă a legăturii dintre curbura Ricci a varietăţii M şi metrica sa con (*cf.* [BG1], §4.5.5).

arătăm că J este paralel: $\bar{\nabla} J = 0$. Aceasta rezultă prin calcul direct tot din formulele (1.6).

Din cele de mai sus rezultă că există o descompunere naturală a fibrării tangente $TC(M)$: $TC(M) = L_\psi \oplus L_\xi \oplus H$, unde L_X este o notaţie pentru fibrarea trivială în drepte generată de un câmp vectorial nicăieri nul X, iar H este complementul ortogonal faţă de metrica $\bar{g}$.

Prezentăm în continuare, pe scurt, câteva exemple de varietăţi Sasaki[16].

Exemplul 1.1. Spaţiul real de dimensiune impară este cel mai simplu exemplu de varietate Sasaki necompactă: $\mathbb{R}^{2n+1}$, pe care considerăm coordonatele globale $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z)$, cu structura de contact standard dată de $\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$, a cărei distribuţie de contact este $\mathcal{D} = \ker \eta = \langle \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y^i} \rangle_{i=\overline{1,n}}$ şi al cărei câmp Reeb este $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$, formează împreună cu metrica adaptată $g = \sum_{i=1}^n ((dx^i)^2 + (dy^i)^2) + \eta \otimes \eta$ o structură metrică de contact. Aceasta este Sasaki, deoarece se verifică direct că endomorfismul ϕ, care este dat de:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (-(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}) \otimes dy^i + \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i)$$

verifică condiţia de normalitate (1.2): $[\phi, \phi](X, Y) + 2\mathrm{d}\eta(X, Y)\xi = 0$. Aceasta este structura Sasaki standard pe $\mathbb{R}^{2n+1}$, care se notează şi $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$, deoarece curbura secţională a unui plan generat de $\{X, \phi X\}$, cu $X \in \mathcal{D}$, este -3.

Exemplul 1.2. Un exemplu important de varietate Sasaki compactă este dat de sferele de dimensiune impară, a căror geometrie este intim legată de geometria Kähler a spaţiilor proiective complexe[17]. Privim sfera S^{2n+1} ca hipersuprafaţă în $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$:

$$S^{2n+1} = \{z = (x, y) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_{i=0}^n |z^i|^2 = \sum_{i=0}^n ((x^i)^2 + (y^i)^2) = 1\},$$

unde x^i, y^i reprezintă componenta reală şi imaginară a coordonatei complexe z^i, cu structura de contact standard dată de restricţia 1-formei $\eta_0 = \sum_{i=0}^n (y^i dx^i - x^i dy^i)$. Câmpul Reeb coincide cu câmpul normal la sferă rotit $\xi_0 = \sum_{i=0}^n (y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial y^i})$ prin înmulţire cu unitatea imaginară, iar câmpul tensorial de tip $(1, 1)$, ϕ_0, este obţinut prin restricţia structurii complexe standard

$$I = \sum_{i=0}^n (\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^i),$$

[16] Numeroase metrici Sasaki au fost descoperite relativ recent, începând cu anii '90, de către fizicieni şi sunt în special exemple de metrici Sasaki-Einstein.

[17] Aceasta rezultă în Secţiunea 1.2, prin considerarea fibrării Boothby-Wang, *cf.* Exemplul 1.6.

de pe $\mathbb{R}^{2n+2}$ la $\mathcal{D} \subset S^{2n+1}$, care este extinsă trivial pe fibrarea în drepte generată de ξ_0. Explicit, ϕ_0 este dat de formula:

$$\begin{aligned}\phi_0 = &\sum_{i,j}((x^i x^j - \delta^{ij})\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^i - (y^i y^j - \delta^{ij})\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^j) \\ &+ \sum_{i,j}(x^j y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dy^j - x^i y^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Metrica canonică pe S^{2n+1}, g_0, dată de restricţia metricii plate de pe $\mathbb{R}^{2n+2}$, are curbura secţională constantă 1 şi satisface:

$$g_0 = \mathrm{d}\eta_0 \circ (\phi_0 \otimes Id) + \eta_0 \otimes \eta_0.$$

Se verifică direct $\mathcal{L}_{\xi_0} g_0 = 0$, deci $\mathcal{S}_0 := (\xi_0, \eta_0, \phi_0, g_0)$ este o structură de K-contact. În plus, deoarece I reprezintă structura complexă standard pe $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathcal{S}_0$ este o structură Sasaki şi se numeşte *structura Sasaki standard* pe S^{2n+1}.
Planul proiectiv real de dimensiune impară admite o structură Sasaki indusă de cea standard de pe sferă, deoarece S^{2n+1} acoperă $\mathrm{P}\mathbb{R}^{2n+1}$ cu două foi.

Exemplul 1.3. Deşi fibratele tangente în sfere reprezintă o clasă importantă de varietăţi de contact, ele nu sunt, în general, varietăţi Sasaki. Mai precis, are loc următorul rezultat al lui Tashiro[18]:

Propoziţia 1.1. *Structura metrică de contact standard de pe T_1M este Sasaki dacă şi numai dacă (M, g) are curbura constantă 1.*

Obţinem astfel o structură Sasaki pe produsul de sfere $S^2 \times S^3 \cong T_1S^3(1)$, care este Sasaki-Einstein, dar nu este produsul metricilor de curbură constantă, reprezentând astfel un exemplu de varietate care admite mai multe metrici Einstein[19]. La fel, pentru $M = S^7$, care este tot o varietate paralelizabilă, se obţine din Propoziţia 1.1 o structură Sasaki pe $S^6 \times S^7 \cong T_1S^7(1)$.

Exemplul 1.4. O altă clasă de exemple de varietăţi Sasaki este dată de hipersuprafeţele varietăţilor Kähler care se scufundă ca subvarietăţi ombilicale pe subfibrarea de contact. Mai precis, are loc următoarea echivalenţă[20]:

Propoziţia 1.2. *O hipersuprafaţă reală M a unei varietăţi Kähler $\bar{M}$ este Sasaki dacă şi numai dacă operatorul A asociat celei de-a doua*

[18] O demonstraţie a acestui rezultat este prezentată în [Bl], Teorema 9.3.

[19] Un studiu detaliat al varietăţilor Sasaki-Einstein 5-dimensionale este dat în [BG4], unde se arată existenţa pe $S^2 \times S^3$ a 14 structuri Sasaki-Einstein neechivalente, care nu sunt regulate.

[20] Aceasta este demonstrată, de exemplu, în [BG1], Teorema 6.3.22.

forme fundamentale[21] *a lui* M *satisface* $A = -Id + \beta\xi \otimes \eta$, *pentru o funcţie netedă* β.

Observaţia 1.6. Există metode generale de a obţine varietăţi Sasaki noi din cele pe care le cunoaştem deja. O primă posibilitate este de a ne uita, la fel ca şi în cazul Kähler, la subvarietăţile care îndeplinesc o anumită condiţie de invarianţă. O subvarietate N a unei varietăţi Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ se numeşte *invariantă* dacă în orice punct p al lui N, $\xi_p \in T_pN$ şi ϕ invariază T_pN. Se arată că o astfel de subvarietate moşteneşte structura Sasaki prin restricţia câmpurilor tensoriale la N. O altă metodă de a obţine varietăţi Sasaki noi este construcţia "join"[22].

Considerăm în continuare numai varietăţi Sasaki compacte, deoarece avem nevoie să integrăm. Dacă M este compactă, atunci câmpul vectorial ξ este complet şi, cum nu se anulează nicăieri, orbitele lui formează o foliaţie[23] a varietăţii M, notată $\mathcal{L}_\xi$. Există o clasificare a structurilor Sasaki în funcţie de proprietăţile globale ale foliaţiei $\mathcal{L}_\xi$, identificându-se 3 tipuri de structuri Sasaki:

(1) Cazul regulat - câtul este varietate Kähler:
Dacă toate orbitele sunt închise (deci compacte, deoarece varietatea M este compactă), atunci ξ generează acţiunea unui cerc pe M. Dacă, în plus, acţiunea este liberă varietatea Sasaki se numeşte *regulată*. Atunci toate orbitele au aceeaşi lungime şi M este spaţiul total al unei fibrări principale în cercuri $\pi : M \to N$, peste o varietate Kähler N[24].

(2) Cazul quasi-regulat - câtul este orbifold Kähler:
Mai general, dacă toate orbitele sunt închise, ξ generează acţiunea unui cerc pe M, care este local liberă (*i.e.* stabilizatorul fiecărui punct este un subgrup finit al lui S^1), dar nu liberă. Atunci varietatea Sasaki se numeşte *quasi-regulată*. Presupunem că $x \in M$ este un punct care are subgrupul de izotropie netrivial $\Gamma_x \subset S^1$, atunci $\Gamma_x \cong \mathbb{Z}_m$, pentru un număr natural m, iar lungimea orbitei prin x este egală cu $\frac{1}{m}$ din

[21] A doua formă fundamentală a lui M, notată II, este definită prin formula: $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathit{II}(X,Y)$, unde $\bar{\nabla}$ şi ∇ este conexiunea Levi-Civita pe $\bar{M}$, respectiv pe M şi $X, Y \in \Gamma(TM)$. Deci II reprezintă partea normală a derivatei covariante de pe varietatea $\bar{M}$ aplicată câmpurilor tangente la M, iar în cazul unei hipersuprafeţe, notând cu N câmpul vectorial normal unitar al lui M, are loc următoarea scriere: $\mathit{II}(X,Y) = g(A(X),Y)N$, care defineşte operatorul A, numit operatorul Weingarten.

[22] Această construcţie constă în definirea unei înmulţiri pe mulţimea orbifoldurilor Sasaki quasi-regulate şi a fost introdusă iniţial în [BG3] pentru structuri Sasaki-Einstein, iar apoi generalizată pentru cazul strict Sasaki în [BGO]. O prezentare cu toate detaliile a construcţiei "join" este dată în [BG1].

[23] În Secţiunea 2.1 dăm definiţia foliaţiilor şi câteva proprietăţi ale lor de care avem nevoie.

[24] Este vorba de fibrarea Boothby-Wang, care este descrisă în Secţiunea 1.2.

lungimea orbitei generice. Spaţiul orbitelor este un orbifold[25] V, iar M este spaţiul total al unei fibrări de orbifold în cercuri $\pi : M \to V$ peste un orbifold Kähler V (punctul x se proiectează pe un punct singular al lui V cu grupul de structură local $\mathbb{Z}_m$).

(3) Cazul neregulat - structura transversă este Kähler:
Dacă ξ are orbite care nu sunt închise, atunci varietatea Sasaki se numeşte *neregulată*. În acest caz nu există un spaţiu cât, dar, cel puţin la nivel infinitezimal, există o structură Kähler transversă[26]. Orbitele câmpului Killing definesc un subgrup cu un parametru al grupului compact de izometrii al varietăţii (M, g), deci închiderea acestui subgrup este un subgrup abelian compact şi conex, adică un tor, care în cazul neregulat are dimensiunea cel puţin 2.

Exemplul 1.5. Orice varietate 3-Sasaki şi orice formă spaţială Sasaki este cel puţin quasi-regulată. În [BMS], Propoziţia 5.3, este demonstrat că o varietate Sasaki neregulată nu este omogenă ca varietate riemanniană şi este dat un exemplu de varietate Sasaki neregulată de coomogenitate 1, arătând astfel că acest rezultat este optim.

Observaţia 1.7. Pe o varietate compactă varietăţile Sasaki quasi-regulate sunt, într-un anumit sens, "suficient de generale", datorită următorului rezultat[27]:

Teorema 1.1. *Orice structură Sasaki pe o varietate compactă se obţine prin deformarea unei structuri Sasaki quasi-regulate.*

Concluzia care se desprinde din cele prezentate în această secţiune este că geometria Sasaki este situată între două geometrii Kähler, conul Kähler [28] şi varietatea Kähler cât (care în general este numai o structură transversă). Avantajul conului este că există întotdeauna, iar avantajul câtului este compacitatea.

---

[25]O prezentare a orbifold-urilor este dată în [BG1], Capitolul 4. Menţionăm că în această lucrare am discutat separat cazul regulat, dar multe dintre rezultate se pot transcrie şi în cazul quasi-regulat.

[26]Aceasta este descrisă în Secţiunea 2.2.

[27]Demonstraţia acestuia se bazează pe teorema de aproximare a lui Rukimbira pentru structuri de K-contact (care afirmă că pe o varietate compactă orice structură de K-contact neregulată poate fi aproximată de unele quasi-regulate, *cf.* [BG1], Teorema 6.1.11).

[28]Menţionăm că utilizăm în continuare noţiunea de con Kähler în această accepţiune, deci nu ne referim la conul claselor Kähler de coomologie.

1.2. **Fibrarea Boothby-Wang.** Acum studiem cazul în care câmpul vectorial ξ al varietăţii Sasaki M este regulat. Începem prin prezentarea teoremei lui Boothby şi Wang, care are loc în contextul mai general al varietăţilor de contact compacte regulate (*i.e.* câmpul Reeb asociat formei de contact este regulat) şi care ne asigură că acestea sunt fibrări principale în cercuri peste varietăţi simplectice de clasă întreagă, numite fibrări Boothby-Wang. După aceea arătăm că această "schemă simplectică" rămâne valabilă şi în cazul varietăţilor Sasaki, adică orice varietate Sasaki regulată este o fibrare principală în cercuri peste o varietate Kähler de clasă întreagă.

Teorema 1.2. *i) Fie (M, η) o varietate de contact compactă regulată. Atunci M este spaţiul total al unei fibrări în cercuri peste varietatea cât $N := M/\xi$ şi η este o formă de conexiune a acestei fibrări. Forma de curbură a lui η defineşte o formă simplectică ω pe N, care determină o clasă de coomologie întreagă.*

ii) Reciproc, fie N o varietate simplectică compactă a cărei formă simplectică ω determină o clasă întreagă de coomologie. Atunci există o fibrare principală în cercuri $\pi : M \to N$ şi o formă de conexiune η, care este formă de contact pe M şi a cărei formă de curbură este $\pi^*\omega$. În plus, câmpul Reeb ξ asociat lui η generează translaţiile la dreapta ale grupului structural S^1 al acestei fibrări.

Demonstraţie. i) Deoarece câmpul caracteristic ξ al formei de contact η este regulat, orbitele sale (*i.e.* curbele sale integrale maximale) sunt submulţimi închise ale lui M, care este varietate compactă, deci aceste orbite sunt homeomorfe cu cercuri. În plus, cum ξ este regulat, M se proiectează pe varietatea cât $N := M/\xi$, $\pi : M \to N$ (în cazul regulat spaţiul orbitelor este varietate diferenţiabilă).

Observăm mai întâi că printr-o deformare omotetică a formei η, noul câmp Reeb ξ generează o acţiune liberă a cercului S^1. Fie $\{f_t\}$ grupul de difeomorfisme cu 1 parametru generat de ξ şi definim perioada λ a lui ξ în punctul $m \in M$ prin:

$$\lambda(m) = \inf\{t|\ t > 0,\ f_t(m) = m\}.$$

Funcţia λ este constantă pe fiecare orbită şi, deoarece nu există puncte fixe, λ nu se anulează nicăieri (observăm că λ este bine definită deoarece toate orbitele sunt cercuri, deci nu ia valoarea infinit). Vrem să arătăm că λ este constantă pe M. Considerăm o metrică riemanniană h pe N şi metrica corespunzătoare pe M, $g := \pi^*h + \eta \otimes \eta$. Faţă de această metrică ξ este un câmp Killing unitar, deoarece $\eta(\xi) = 1$ şi $\mathcal{L}_\xi \eta = 0$. Dacă ∇ este conexiunea Levi-Civita a lui g, atunci $g(\nabla_\xi \xi, X) = -g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$, deci orbitele lui ξ sunt geodezice. Dacă γ este o orbită prin m, considerăm γ' o orbită suficient de apropiată de γ astfel încât există o unică geodezică minimală de la m la γ' care intersectează γ' ortogonal în m'. Deoarece f_t este o izometrie pentru orice

t, imaginea arcului geodezic $\widehat{mm'}$ este ortogonal la γ şi γ' pentru orice t. Astfel, în timp ce punctul m parcurge o perioadă de-a lungul orbitei γ, punctul corespunzător pe γ' parcurge tot o perioadă, deci funcţia λ este constantă pe M. Înlocuind pe η cu $\frac{1}{\lambda}\eta$, ξ devine $\lambda\xi$, care este câmpul Reeb al lui η, deoarece λ este constantă. În plus, ξ are aceleaşi orbite ca şi câmpul Reeb iniţial şi perioada sa este 1, deci grupul cu un parametru $\{f_t\}$ al lui ξ depinde numai de clasa de echivalenţă modulo 1 a lui t şi acţiunea astfel indusă a lui S^1 este liberă.

Din regularitatea lui ξ rezultă că putem acoperi M cu vecinătăţi de coordonate U_i şi coordonatele $(x^1, \cdots, x^{2n+1})$ astfel încât curbele integrale ale lui ξ sunt date de $x^1 = const., \ldots, x^{2n} = const.$ Atunci $\pi(U_i)$ formează o acoperire deschisă a lui N şi coordonatele se identifică cu $(x^1, \cdots, x^{2n})$. Putem defini secţiuni locale pe $\pi(U_i)$ prin $s_i(x^1, \cdots, x^{2n}) = (x^1, \cdots, x^{2n}, c)$, pentru o anumită constantă c. Definim atunci aplicaţiile de trivializare astfel:

$$\phi_i : \pi(U_i) \times S^1 \to M, \quad \phi_i(p, t) = f_t(s_i(p)),$$

unde $\{f_t\}$ este grupul de difeomorfisme cu 1-parametru generat de ξ.

Pentru a arăta că η este o formă de conexiune în această fibrare principală, observăm mai întâi că η şi $\mathrm{d}\eta$ sunt invariante la acţiunea lui S^1, adică are loc: $\mathcal{L}_\xi\eta = 0$ şi $\mathcal{L}_\xi\mathrm{d}\eta = 0$ (ambele egalităţi rezultă direct din formula lui Cartan). Identificăm algebra Lie a lui S^1 cu $\mathbb{R}$ şi alegând baza $A = \frac{d}{dt}$, trebuie să arătăm că η (văzută ca formă cu valori în algebra Lie a cercului, *i.e.* identificată cu $\eta \otimes A$) este o formă de conexiune. Avem de verificat următoarele două condiţii: (a) $\eta(A^*) = A$, unde A^* este câmpul vectorial fundamental corespunzător lui A şi (b) echivarianţa lui η la translaţiile la dreapta. (a) rezultă imediat deoarece $A^* = \xi$, iar pentru (b) observăm că translaţia la dreapta este tocmai f_t şi verifică $f_t^*\eta = \eta$, pentru că $\mathcal{L}_\xi\eta = 0$.

Fie Ω forma de curbură a lui η. Cum S^1 este grup abelian, $[\eta, \eta] = 0$ şi ecuaţia de structură devine $\mathrm{d}\eta = \Omega$. Dar $\mathrm{d}\eta$ este formă orizontală, invariantă la acţiunea lui S^1, deci bazică. Atunci există o formă ω pe N astfel încât $\pi^*\omega = \mathrm{d}\eta$. În plus, avem: $\pi^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\pi^*\omega = \mathrm{d}^2\eta = 0$, de unde rezultă că ω este închisă şi $\pi^*\omega^n = (\pi^*\omega)^n = (\mathrm{d}\eta)^n \neq 0$, deci ω este o formă simplectică pe N. Clasa de coomologie a lui ω este întreagă (*i.e.* $\int_c \omega \in \mathbb{Z}$ pentru orice cociclu singular cu coeficienţi întregi c) conform unui rezultat al lui Kobayashi ([Kob]).

ii) Reciproc, folosim faptul că mulţimea fibrărilor principale în cercuri peste o varietate N are o structură de grup izomorfă cu grupul de coomologie $H^2(N, \mathbb{Z})$ (*cf.* [Kob]). Construim fibrarea principală corespunzătoare clasei $[\omega]$ şi considerăm o formă de conexiune η' a acesteia. Fie ω' 2-forma de pe N corespunzătoare: $\mathrm{d}\eta' = \pi^*\omega'$. Dar $[\omega] = [\omega']$ (deoarece 2-forma caracteristică a unei fibrări principale este definită ca fiind clasa de coomologie a formei obţinută prin push-forward-ul formei de curbură a unei conexiuni de pe fibrare, care se arată că nu depinde de alegerea conexiunii), deci există $\psi \in \Lambda^1(N)$ cu $\omega = \omega' + \mathrm{d}\psi$. Fie $\eta := \eta' + \pi^*\psi$. Atunci η este invariantă la translaţiile drepte şi $\mathrm{d}\eta = \pi^*\omega$. În plus, dacă ξ este vertical astfel încât $\eta'(\xi) = 1$, atunci şi $\eta(\xi) = 1$. Pentru a arăta că η este într-adevăr o formă de contact pe M, fixăm un punct arbitrar $m \in M$ şi alegem $v_1, \ldots, v_{2n}$ vectori în T_mM orizontali şi liniar independenţi. Atunci are loc:

$$[\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n](\xi, v_1, \cdots, v_{2n}) \neq 0,$$

deci η este formă de contact. □

Observaţia 1.8. Tanno a arătat[29] că pentru o varietate de contact compactă regulată M cu fibrarea Boothby-Wang $\pi : M \to N$, primele numere Betti ale celor două varietăţi coincid: $b_1(M) = b_1(N)$. Folosind această restricţie topologică se arată că nici un tor T^{2n+1} nu admite o structură de contact regulată[30].

Vrem în continuare să arătăm că această corespondenţă stabilită de fibrarea Boothby-Wang se păstrează şi pentru structuri geometrice mai bogate decât cea de contact şi simplectică, pentru a ajunge la cazul care ne interesează şi anume corespondenţa Sasaki $\leftrightarrow$ Kähler.

Alegem pe (M, η) (care este, ca mai sus, varietate de contact compactă regulată) o metrică compatibilă astfel încât (M, η, g) să fie o varietate metrică de contact (*cf.* Definiţia 1.1). Dacă, în plus, câmpul vectorial ξ este Killing (*i.e.* M este o varietate de K-contact), atunci putem proiecta metrica g peste o metrică pe N, notată h, iar $\pi : M \to N$ devine submersie riemanniană. Printr-un calcul direct (*cf.* [Bl], Teorema 6.2) se stabileşte echivalenţa: ξ este Killing dacă şi numai dacă $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$. Rezultă atunci că putem proiecta şi endomorfismul ϕ pe varietatea N, şi din (1.1) rezultă că endomorfimul astfel obţinut, notat J, este o structură aproape complexă a lui N, ortogonală faţă de metrica h. Deoarece ϕ este definit de relaţia $g(\phi\cdot, \cdot) = \mathrm{d}\eta(\cdot, \cdot)$, prin proiecţia pe N rezultă compatibilitatea dintre h, J şi forma simplectică ω (dată de Teorema 1.2, (i)): $h(J\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$, adică obţinem o structură aproape Kähler pe N: (h, J, ω).

Reciproc, dacă pornim cu o structură aproape Kähler (h, J, ω) pe o varietate compactă N şi clasa Kähler $[\omega]$ este întreagă, atunci conform Teoremei 1.2, (ii), există o fibrare principală în cercuri $\pi : M \to N$ şi o formă de contact η pe M cu forma de curbură $\mathrm{d}\eta = \pi^*\omega$. Ridicăm la varietatea M metrica h prin formula:

$$g = \pi^* h + \eta \otimes \eta, \tag{1.9}$$

[29] Acest rezultat este demonstrat, de exemplu, în [Bl], Teorema 4.13.

[30] Aceasta rezultă deoarece baza unei fibrării Boothby-Wang ar avea, din şirul de omotopie al fibrării, primul număr Betti egal cu $2n$, dar $b_1(T^{2n+1}) = 2n+1$. Acelaşi argument ne arată că T^{2n+1} nu admite nici structuri de contact quasi-regulate (prin considerarea şirului lung de omotopie pentru fibrări de orbifold-uri).

şi definim un endomorfism al fibratului tangent TM prin:

$$\phi X = \widetilde{J\pi_* X}, \tag{1.10}$$

unde $\tilde{\cdot}$ reprezintă lift-ul orizontal. Deoarece câmpul vectorial ξ este vertical, are loc: $\phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi$. Cum $\mathrm{d}\eta = \pi^*\omega$, rezultă:

$$\begin{aligned} g(\phi X, Y) &= h(\pi_*\phi X, \pi_* Y) \circ \pi = h(J\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi \\ &= \omega(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi = \pi^*\omega(X, Y) = \mathrm{d}\eta(X, Y). \end{aligned} \tag{1.11}$$

În plus, η este 1-forma duală a lui ξ în raport cu metrica g. Acestea ne spun că structura astfel definită pe M este o structură metrică de contact, care este chiar de K-contact, deoarece câmpul vectorial ξ este Killing: $\mathcal{L}_\xi g = 0$.

Considerând în construcţia anterioară M varietate Sasaki, rezultă că structura aproape Kähler indusă pe varietatea cât N este Kähler, deoarece condiţia (1.4) din Definiţia 1.2 devine pe N: $\nabla J = 0$. Reciproc, dacă N este varietate Kähler şi are clasa fundamentală întreagă, atunci structura indusă pe fibrarea principală asociată este Sasaki, deoarece printr-un calcul direct se arată că este verificată condiţia de normalitate (1.2) (*cf.* [Bl], Exemplul 6.7.2).

Rezumând cele prezentate anterior, putem spune că fibrarea Boothby-Wang pune în corespondenţă următoarele structuri:

$$\begin{gathered} \text{contact} \longleftrightarrow \text{simplectic} \\ K\text{-contact} \longleftrightarrow \text{aproape Kähler} \\ \text{Sasaki} \longleftrightarrow \text{Kähler.} \end{gathered}$$

Mai general, există varianta fibrării Boothby-Wang pentru orbifolduri: varietăţile Sasaki quasi-regulate compacte au structura unei fibrări de orbifold în cercuri peste un orbifold Kähler compact (*cf.* [BG1], Teorema 6.1.4).

Exemplul 1.6. Cazul special cel mai cunoscut al fibrării Bootby-Wang este fibrarea Hopf a unei sfere impare unitare S^{2n+1} peste spaţiul proiectiv complex $\mathbb{C}P^n$ de curbură olomorfă constantă egală cu 4.

Un alt exemplu sunt fibrările în cercuri ale lui $S^2 \times S^3$ peste suprafeţele Hirzebruch, F_k (de exemplu, *cf.* [BGO]): pentru orice pereche de numere întregi pozitive prime între ele, (l_1, l_2), se obţine o clasă Kähler întreagă pe F_k, căreia îi corespunde o fibrare în cercuri. Spaţiul total al acestei fibrări (despre care se arată că este difeomorf cu $S^2 \times S^3$ dacă k sau l_1 este par) este varietate Sasaki, conform corespondenţei stabilite.

2. Geometria transversă a unei varietăţi Sasaki

În această secţiune prezentăm geometria Kähler transversă a unei varietăţi Sasaki. Pentru aceasta începem cu unele noţiuni generale despre foliaţii şi geometria lor transversă. De asemenea, introducem operatorii bazici definiţi pe o varietate Sasaki, de care avem nevoie în studiul metricilor extremale.

2.1. **Foliaţii.** O foliaţie[31] este o descompunere a unei varietăţi în subvarietăţi de aceeaşi dimensiune, care local arată ca un produs. Mai precis, avem:

Definiţia 2.1. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. O *foliaţie* $\mathcal{F}$ pe M, de dimensiune p şi codimensiune q ($p+q=n$) este o partiţie $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ a lui M în submulţimi conexe cu următoarea proprietate: pentru orice punct al lui M există o vecinătate deschisă U care-l conţine şi o hartă $(x,y)=(x_1,\cdots,x_p;y_1,\cdots,y_q):U\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ astfel încât pentru fiecare foaie $\mathcal{L}_\alpha$, componentele conexe ale lui $U\cap\mathcal{L}_\alpha$ sunt definite de ecuaţiile $y=const$. O astfel de hartă se numeşte *foliată* sau *distinsă*. Componentele conexe ale mulţimilor $y=const$ într-o hartă distinsă se numesc *plăcile* lui $\mathcal{F}$.

Din definiţie rezultă, în particular, că fiecare foaie $\mathcal{L}_\alpha$ este o subvarietate conexă p-dimensională a lui M. Dacă într-o hartă distinsă fixăm y, aplicaţia $x\to(x,y)$ este o scufundare netedă, deci plăcile sunt subvarietăţi p-dimensionale ale lui M, iar fiecare foaie $\mathcal{L}_\alpha$ este o reuniune de plăci. Observăm că topologia naturală a varietăţii $\mathcal{L}_\alpha$ nu este neapărat topologia indusă de pe M.

Exemplul 2.1. Orice varietate admite două foliaţii triviale: foliaţia 0-dimensională, în care foile sunt date de punctele varietăţii şi foliaţia de codimensiune 0, care are o singură foaie dată de întreaga varietate.

Exemplul 2.2. O submersie netedă $f:M\to B$ între două varietăţi diferenţiabile este un exemplu de foliaţie de codimensiune egală cu dimensiunea lui B, în care foile sunt date de componentele conexe ale fibrelor $f^{-1}(b)$, pentru $b\in B$. Acestea mai sunt numite şi *foliaţii simple.* O fibrare este un caz special de submersie, dar nu orice submersie satisface condiţia de local trivialitate (este suficient să înlăturăm un punct al unei fibre). Chiar din definiţie observăm că orice foliaţie este local definită de o submersie, dar nu neapărat global, cum ne arată şi exemplul următor.

Exemplul 2.3. Linia lui Kronecker pe torul 2-dimensional $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Un flux liniar pe tor este generat de câmpurile vectoriale $X=a^1\frac{\partial}{\partial x^1}+a^2\frac{\partial}{\partial x^2}$, unde $a^i\in\mathbb{R}$ şi nu sunt ambele nule. Pentru fiecare pereche

[31] Prezentăm pe scurt numai noţiunile de bază de care avem nevoie din teoria foliaţiilor; un studiu detaliat se găseşte, de exemplu, în [Ton].

$(a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, câmpul vectorial X generează o subfibrare E a lui TT^2 şi astfel defineşte o foliaţie 1-dimensională $\mathcal{F}$ pe T^2 (condiţia de integrabilitate Frobenius este automat îndeplinită pentru distribuţiile 1-dimensionale). Foaia care trece printr-un punct $(x_0^1, x_0^2) \in T^2$ este dată de imaginea fluxului $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (x_0^1 + a^1 t, x_0^2 + a^2 t)$. Presupunem $a^1 \neq 0$ şi considerăm două cazuri, după cum raportul $\frac{a^1}{a^2}$ este raţional sau nu. Dacă $\frac{a^1}{a^2} \in \mathbb{Q}$, atunci câmpul vectorial X este periodic şi foile sunt cercuri. Foliaţia $\mathcal{F}$ este simplă şi descrie torul T^2 ca o S^1-fibrare peste S^1. Dacă $\frac{a^1}{a^2} \notin \mathbb{Q}$, atunci foile sunt difeomorfe cu $\mathbb{R}$ şi fiecare foaie este densă în T^2, deci această foliaţie nu poate fi dată de o submersie.

Exemplul 2.4. Foliaţiile cele mai studiate sunt cazurile extreme: cele 1-dimensionale, numite şi fluxuri si cele 1-codimensionale. Exemple de foliaţii 1-codimensionale pot fi obţinute astfel: dată o funcţie netedă $f : M \to \mathbb{R}$, dacă înlăturăm mulţimea punctelor critice ale lui f, atunci $M \setminus Crit(f)$ are o foliaţie 1-codimensională dată de hipersuprafeţele de nivel. Aşa se obţine, de exemplu, foliaţia lui $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ prin sfere concentrice: foile sunt hipersuprafeţele de nivel ale funcţiei normă. În plus, deoarece foile sunt orbitele netriviale ale acţiunii lui $SO(n+1)$ pe $\mathbb{R}^{n+1}$, această foliaţie este riemanniană (*cf.* Definiţia 2.6). La finalul acestei secţiuni studiem unele proprietăţi ale fluxurilor riemanniene, deoarece varietăţile care ne interesează, cele Sasaki, sunt înzestrate în mod natural cu o astfel de foliaţie.

Echivalent, foliaţiile pot fi descrise prin lipirea submersiilor locale[32]. Hărţile distinse reprezintă o vedere microscopică a foliaţiei; pentru o privire globală trebuie să ne uităm la relaţiile de pe intersecţiile acestor hărţi. Fie $\phi_i = (x_i, y_i) : U_i \to \mathbb{R}^n$, $\phi_j = (x_j, y_j) : U_j \to \mathbb{R}^n$ hărţi distinse ale foliaţiei $\mathcal{F}$ pe M. Pe $U_i \cap U_j$ foile sunt date de $y_i = const$ şi $y_j = const$. Aceasta ne arată că în schimbarea de coordonate: $x_j = x_j(x_i, y_i)$, $y_j = y_j(x_i, y_i)$, y_j nu depinde de x_i, deci $y_j = \gamma_{ji}(y_i)$, unde γ_{ji} este un difeomorfism local al lui $\mathbb{R}^q$ şi se numeşte *funcţie de tranziţie*. Fie f_i compunerea dintre $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ cu proiecţia pe al doilea factor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$. Atunci f_i şi f_j sunt submersii şi satisfac: $f_j = \gamma_{ji} \circ f_i$ pe $U_i \cap U_j$. Suntem astfel conduşi la următoarea definiţie echivalentă a foliaţiilor:

Definiţia 2.2. O *foliaţie* de codimensiune q pe M este dată de o acoperire cu deschişi $(U_i)_{i\in I}$, submersiile $f_i : U_i \to T$ peste o varietate transversă q-dimensională T şi, pentru $U_i \cap U_j \neq 0$, un difeomorfism $\gamma_{ji} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \to f_j(U_i \cap U_j) \subset T$ astfel încât

$$f_j(x) = \gamma_{ji} \circ f_i(x), \quad (\forall) x \in U_i \cap U_j. \tag{2.1}$$

[32] Această abordare a foliaţiilor a fost iniţiată şi studiată de Haefliger şi este utilă mai ales pentru studiul geometriei transverse.

Spunem că $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$ este un *ciclu foliat* care defineşte foliaţia $\mathcal{F}$.

Pentru ca relaţiile (2.1) să fie compatibile pe intersecţii triple, este necesar ca funcţiile de tranziţie γ_{ij} să îndeplinească condiţiile de cociclu: $\gamma_{ij} = \gamma_{ik} \circ \gamma_{kj}$, pe $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Geometria transversă. În teoria foliaţiilor se acordă un interes deosebit studiului geometriei transverse[33]. Aceasta este geometria spaţiului foilor, adică a spaţiului cât dat de relaţia de echivalenţă: $x \equiv y$ dacă x şi y aparţin aceleiaşi foi. Deoarece în general acest spaţiu nu este varietate sau orbifold, geometria transversă este studiată direct pe varietatea foliată. Astfel sunt definite noţiunile corespunzătoare (funcţie, formă diferenţială, metrică riemanniană etc.) drept obiectele analoage de pe varietatea foliată invariante de-a lungul foilor.

Fie $\mathcal{F}$ o foliaţie p-dimensională pe o varietate M cu subfibrarea integrabilă E (formată din toţi vectorii tangenţi la foile lui $\mathcal{F}$). Atunci există următorul şir exact de fibrări vectoriale:

$$0 \to E \to TM \xrightarrow{\pi} Q \to 0. \tag{2.2}$$

Fibrarea cât Q se mai notează şi $\nu(\mathcal{F})$ şi se numeşte *fibrarea normală* a foliaţiei. Geometria transversă este modelată la nivel infinitezimal de Q, care joacă rolul spaţiului tangent la varietăţile transverse ale lui $\mathcal{F}$ (o subvarietate $N \xrightarrow{\iota} M$ se numeşte *transversă* dacă în orice punct x al lui N avem $T_xM = T_xE + T_xN$).

Un rol important îl joacă *conexiunea Bott* pe Q, definită prin:

$$\overset{\circ}{\nabla}_V s = \pi[V, X_s], \tag{2.3}$$

pentru $V \in \Gamma(E)$ şi $s \in \Gamma(Q)$, unde X_s este un câmp vectorial pe M care se proiectează peste s: $\pi(X_s) = s$. Aceasta este o conexiune parţială de-a lungul lui E şi este corect definită, deoarece membrul drept nu depinde de alegerea câmpului X_s (diferenţa a două astfel de câmpuri este o secţiune V' în E şi atunci $\pi[V, V'] = 0$). O consecinţă a identităţii Jacobi pentru paranteza Lie este faptul că această conexiune are curbura nulă:

$$\overset{\circ}{R}(X, Y) = \overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{\nabla}_Y - \overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{\nabla}_X - \overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} = 0, \text{ pentru } X, Y \in \Gamma(E). \tag{2.4}$$

Introducem în continuare noţiunile corespunzătoare pentru obiectele 'bazice' ale unei foliaţii. Pentru câmpurile vectoriale avem:

Definiţia 2.3. Un câmp vectorial X pe o varietate foliată $(M, \mathcal{F})$ se numeşte *foliat* dacă pentru orice câmp vectorial V tangent la $\mathcal{F}$, paranteza Lie $[X, V]$ este tangentă la foile lui $\mathcal{F}$.

[33] Foliaţiile cu structură transversă au fost introduse de Conlon în anii '70 şi au fost studiate mai ales de Molino.

Aceasta înseamnă că fluxul lui X păstrează foliaţia $\mathcal{F}$, adică duce foi în foi. Algebra Lie a câmpurilor vectoriale tangente la foile lui $\mathcal{F}$ acţionează pe secţiunile fibrării normale Q prin $\mathcal{L}_V s := \overset{\circ}{\nabla}_V s$, adică prin intermediul conexiunii Bott, dată de (2.3). Folosind această acţiune, condiţia ca un câmp vectorial X să fie foliat devine: $\mathcal{L}_V \bar{X} = 0$, pentru orice V tangent la $\mathcal{F}$, unde am notat $\bar{X} := \pi(X)$.

Notăm, ca de obicei, cu $\mathcal{X}(M)$ mulţimea câmpurilor vectoriale tangente la M, iar cu $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}(M)$ subalgebra Lie a câmpurilor tangente la foi (adică formată din secţiunile fibrării vectoriale integrabile E care defineşte $\mathcal{F}$). Mulţimea câmpurilor vectoriale foliate formează şi ea o subalgebră Lie, notată $\mathfrak{fol}(M, \mathcal{F})$ şi care, din definiţie, este normalizatorul lui $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}(M)$ în $\mathcal{X}(M)$. Într-o hartă distinsă de coordonate, $\phi = (x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_q)$, un câmp foliat X ia forma:

$$X = \sum_{i=1}^{q} A^i(y_1, \cdots, y_q) \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{j=1}^{p} B^j(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_q) \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.5}$$

unde A^i şi B^j sunt funcţii de variabilele indicate.

Observăm că orice câmp foliat X se proiectează pe o secţiune $\bar{X}$ a lui $\nu(\mathcal{F})$, care este independentă de coordonatele de-a lungul foilor (aceasta rezultă din scrierea (2.5)). Mulţimea acestor secţiuni formează o algebră Lie, notată $\mathfrak{trans}(M, \mathcal{F})$, ale cărei elemente se numesc *câmpuri vectoriale transverse*. Avem următorul şir exact de algebre Lie:

$$0 \to \mathcal{X}_{\mathcal{F}}(M) \to \mathfrak{fol}(M, \mathcal{F}) \to \mathfrak{trans}(M, \mathcal{F}) \to 0, \tag{2.6}$$

unde paranteza Lie pe $\mathfrak{trans}(M, \mathcal{F})$ este definită prin: $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$. Un *reper transvers* în punctul $x \in M$ este o bază $(Y_1, \ldots, Y_q)$ a fibrei Q_x (remarcăm că Y_i nu este un vector tangent în x, ci o clasă de echivalenţă de vectori tangenţi modulo vectorii din E_x). Într-o hartă dinstinsă există un reper local al lui Q format din câmpuri transverse, şi anume $\overline{\frac{\partial}{\partial y^1}}, \ldots, \overline{\frac{\partial}{\partial y^q}}$, care, în prezenţa unei metrici, pot fi ridicate la un reper local al lui $E^{\perp}$ format din câmpuri foliate.

Coomologia bazică. Coomologia bazică a fost introdusă de Reinhart în anii '60. În continuare prezentăm pe scurt noţiunile de bază, urmând [Ton].

Definiţia 2.4. Fie $\mathcal{F}$ o foliaţie pe varietatea M. O r-formă diferenţială α pe M se numeşte *bazică* dacă pentru orice câmp vectorial V tangent la foile lui $\mathcal{F}$ sunt îndeplinite condiţiile:

$$\iota_V \alpha = 0, \quad \mathcal{L}_V \alpha = 0. \tag{2.7}$$

Într-o hartă de coordonate foliată (U, ϕ), cu $\phi = (x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_q)$, o r-formă bazică α ia forma:

$$\alpha = \sum_{(i_1, \ldots, i_r)} \alpha_{i_1 \cdots i_r}(y_1, \cdots, y_q) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}.$$

Observăm că derivata Lie a formelor bazice (şi mai general a tensorilor covarianţi bazici) în direcţia câmpurilor vectoriale transverse este bine definită.

Dacă notăm cu $\Omega^r_B(\mathcal{F})$ mulţimea formelor bazice r-dimensionale, atunci $\Omega^*_B(\mathcal{F}) = \oplus_r \Omega^r_B(\mathcal{F})$ este închisă la adunare şi la produsul exterior, deci este o subalgebră a algebrei formelor exterioare pe M. Mai mult, din formula Cartan, rezultă că derivata exterioară duce forme bazice în forme bazice:

$$\mathcal{L}_V \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\mathcal{L}_V \alpha = 0 \quad \text{şi} \quad \iota_V \mathrm{d}\alpha = \mathcal{L}_V \alpha - \mathrm{d}(\iota_V \alpha) = 0.$$

Astfel, subalgebra $\Omega^*_B(\mathcal{F})$ formează un subcomplex al complexului de Rham:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^r_B \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{r+1}_B \longrightarrow \cdots$$

şi inelul său de coomologie $H^*_B(\mathcal{F}) = H^*_B(\mathcal{F}, \mathrm{d_B})$, unde $\mathrm{d_B}$ este o notaţie pentru restricţia derivatei exterioare d la formele bazice, se numeşte *inelul de coomologie bazică* al lui $\mathcal{F}$ şi joacă rolul coomologiei de Rham pentru spaţiul foilor. Notăm clasele bazice de coomologie cu $[\cdot]_B$, pentru a le distinge de cele obişnuite.

Grupurile $H^r_B(\mathcal{F})$ sunt definite pentru orice $0 \leq r \leq q$, unde q este codimensiunea foliaţiei şi sunt finit dimensionale pentru foliaţii riemanniene pe varietăţi compacte. În general, pentru $r = 0$, mulţimea $\Omega^0_B(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^\infty_B(M)$ este formată din funcţiile constante de-a lungul fibrelor, deci cociclii faţă de $\mathrm{d_B}$ sunt funcţiile constante. Deci, dacă M este varietate conexă, atunci $H^0_B(\mathcal{F}) \approx \mathbb{R}$. Pentru $r = 1$ arătăm că incluziunea naturală a lui $H^1_B(\mathcal{F})$ în $H^1(M, \mathbb{R})$ este injectivă. Fie α un 1-cociclu, adică $\mathrm{d_B}\,\alpha = 0$, unde $\alpha \in \Omega^1_B(\mathcal{F})$. Dacă $\alpha = \mathrm{d}f$, pentru o funcţie f pe M, atunci, pentru orice câmp V tangent la foi are loc:

$$Vf = \iota_V \mathrm{d}f = \iota_V \alpha = 0,$$

ceea ce înseamnă că $f \in \Omega^0_B(\mathcal{F})$, deci α este cofrontieră faţă de $\mathrm{d_B}$.

Observaţia 2.1. Arătăm că derivata Lie a unei forme bazice în direcţia unui câmp foliat rămâne bazică. Fie $\alpha \in \Omega^r_B(\mathcal{F})$ şi $X \in \mathfrak{fol}(M.\mathcal{F})$. Din formulele generale:

$$\iota_V \mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_X(\iota_V \alpha) - \iota_{[V,X]}\alpha,$$

$$\mathcal{L}_V \mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_V \alpha - \mathcal{L}_{[V,X]}\alpha,$$

rezultă $\mathcal{L}_X \alpha \in \Omega^r_B(\mathcal{F})$. Analog se arată că $\iota_X \alpha$ este formă bazică.

Definim în continuare noţiunea de structură transversă[34]. Fie M o varietate de dimensiune $p+q$ înzestrată cu o foliaţie $\mathcal{F}$ de codimensiune q, definită de cociclul foliat $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})$.

Definiţia 2.5. O *structură transversă* la $\mathcal{F}$ este o structură geometrică pe T invariată de difeomorfismele locale γ_{ij}.

Pe fiecare deschis U_i al acoperirii se trage structura respectivă de pe T prin submersia f_i, iar invarianţa prin γ_{ij} ne asigură că în acest mod este bine definită o structură globală pe M.

Particularizăm această definiţie la cazurile de care avem nevoie: structura transversă riemanniană, cea olomorfă şi cea Kähler .

Definiţia 2.6. O foliaţie $\mathcal{F}$ se numeşte *riemanniană* dacă există pe T o metrică riemanniană astfel încât difeomorfismele locale γ_{ij} sunt izometrii.

Definiţia 2.7. O foliaţie $\mathcal{F}$ se numeşte *transvers olomorfă* dacă T este varietate complexă şi γ_{ij} sunt biolomorfisme locale. Dacă T este varietate Kähler şi γ_{ij} sunt biolomorfisme locale care păstrează forma Kähler, atunci spunem că $\mathcal{F}$ este *transvers Kähler.*

Foliaţii riemanniene. În continuare prezentăm unele proprietăţi ale foliaţiilor riemanniene, în special ale celor 1-dimensionale. Începem cu o definiţie echivalentă a unei structuri riemanniene transverse, introdusă de Reinhart şi dată la nivel infinitezimal.

Definiţia 2.8. O metrică riemanniană g pe M se numeşte *metrică fibrată* faţă de foliaţia $\mathcal{F}$ dacă pentru orice câmpuri foliate orizontale X şi Y, funcţia $g(X, Y)$ este bazică, adică pentru orice câmp vectorial V tangent la foile lui $\mathcal{F}$ are loc: $V(g(X, Y)) = 0$.

Unei metrici fibrate g i se asociază o metrică transversă g_T după cum urmează. Metrica g splitează şirul exact (2.2) în:

$$TM = E \oplus E^{\perp}, \tag{2.8}$$

unde $E^{\perp}$ este subfibrarea lui TM formată din toţi vectorii ortogonali pe vectorii din E faţă de metrica g. Atunci orice câmp vectorial X pe M poate fi descompus în mod unic: $X = X^{\top} + X^{\perp}$, unde $X^{\top}$ este secţiune în E şi $X^{\perp}$ este secţiune în $E^{\perp}$. Definim metrica transversă g_T pe $(M, \mathcal{F})$ prin: $g_T(X, Y) := g(X^{\perp}, Y^{\perp})$.

Noţiunea de metrică fibrată este echivalentă cu cea de foliaţie riemanniană în sensul următor[35]:

[34]Menţionăm că există şi o altă abordare echivalentă, care foloseşte G-structurile transverse (definite ca reduceri ale grupului structural $GL(q, \mathbb{R})$ al fibrării principale a reperelor transverse, care satisfac o condiţie suplimentară: spaţiul tangent în fiecare punct la fibrarea principală redusă conţine spaţiul tangent la foile foliaţiei ridicate $\bar{\mathcal{F}}$). De exemplu, în acest context, o foliaţie riemanniană este o $O(q, \mathbb{R})$-structură transversă. Această abordare este prezentată cu detalii în [BG1], §2.4.

[35]O demonstraţie a acestui rezultat este dată, de exemplu, în [BG1], Propoziţia 2.4.7.

Propoziţia 2.1. *Dacă g este o metrică fibrată faţă de foliaţia $\mathcal{F}$, atunci $\mathcal{F}$ este o foliaţie riemanniană. Reciproc, dacă $\mathcal{F}$ este o foliaţie riemanniană cu metrica transversă g_T, atunci există o metrică fibrată, a cărei metrică transversă asociată este g_T.*

Conform descompunerii ortogonale (2.8), există o splitare:

$$\sigma : Q \xrightarrow{\cong} E^{\perp} \subset TM. \tag{2.9}$$

Metrica g pe TM este atunci o sumă directă $g = g_E \oplus g_{E^\perp}$, metrica transversă g_T definită mai sus este dată de: $g_T = \sigma^* g_{E^\perp}$, iar aplicaţia de splitare $\sigma : (Q, g_T) \to (E^\perp, g_{E^\perp})$ este un izomorfism metric. Această identificare între Q şi $E^\perp$ este importantă, deoarece ne permite să definim obiectele transverse folosind fibrarea $E^\perp$ în locul fibrării Q, nemaifiind nevoie să considerăm clase de echivalenţă de vectori.

Observaţia 2.2. Condiţia din definiţia unei metrici fibrate şi anume: pentru orice câmpuri foliate orizontale X şi Y şi orice $V \in \Gamma(E)$ să aibă loc $V(g(X,Y)) = 0$ este echivalentă cu invarianţa metricii transverse asociate, g_T, pe direcţiile tangente la foi, adică cu $\mathcal{L}_V g_T = 0$, pentru orice $V \in \Gamma(E)$. Această echivalenţă rezultă direct din definiţia derivatei Lie:

$$(\mathcal{L}_V g_T)(X,Y) = V(g_T(X,Y)) - g_T(\mathcal{L}_V X, Y) - g_T(X, \mathcal{L}_V Y),$$

aplicată câmpurilor foliate orizontale $X, Y \in \Gamma(E^\perp)$.

Exemplul 2.5. Din observaţia precedentă rezultă că cel mai simplu exemplu de metrică fibrată este dat de un câmp vectorial Killing nesingular V pe (M, g). V determină o foliaţie 1-dimensională $\mathcal{F}$, ale cărei foi sunt curbele integrale ale lui V. Deoarece $\mathcal{L}_V g = 0$, rezultă, prin restricţie la fibratul $E^\perp = \langle V \rangle^\perp$, că, metrica indusă, pe care am notat-o g_T, este invariantă de-a lungul lui V: $\mathcal{L}_V g_T = 0$, care este unica direcţie tangentă, deci g este o metrică fibrată şi $\mathcal{F}$ este foliaţie riemanniană.

Mai general, dacă un grup Lie G acţionează prin izometrii pe (M, g) astfel încât toate orbitele acţiunii au aceeaşi dimensiune, atunci acestea formează o foliaţie riemanniană. Aceasta rezultă din argumentul precedent şi din faptul că secţiunile tangente la foliaţii sunt combinaţii liniare de câmpuri Killing determinate de acţiunea grupului G. Mai observăm că, dacă G este compact, orice metrică pe M poate fi mediată pentru a obţine o metrică invariantă la acţiune.

Fie g o metrică fibrată pe M. Vrem în continuare să vedem legătura dintre conexiunea Levi-Civita a metricii transverse g_T, pe care o notăm ∇ şi conexiunea Levi-Civita a metricii g pe M, notată ∇^M.

Definim următoarea conexiune pe Q:

$$\nabla_X s = \begin{cases} \pi[X, Z_s], & \text{dacă } X \in \Gamma(E) \\ \pi(\nabla^M_X Z_s), & \text{dacă } X \in \Gamma(E^\perp), \end{cases} \tag{2.10}$$

pentru orice $s \in \Gamma(Q)$ cu $Z_s = \sigma(s) \in \Gamma(E^\perp)$. Observăm că această conexiune restricţionată de-a lungul lui E coincide cu conexiunea Bott, definită de (2.3) (conexiunile cu această proprietate se numesc *adaptate*).

Arătăm că ∇ este conexiunea Levi-Civita transversă, în sensul că este unica conexiune fără torsiune faţă de care metrica transversă g_T este paralelă. Mai întâi definim torsiunea unei astfel de conexiuni:

Definiţia 2.9. *Torsiunea* unei conexiuni ∇ pe Q, notată $T_\nabla \in \Omega^2(M,Q)$, este dată de formula:

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X \pi(Y) - \nabla_Y \pi(X) - \pi[X,Y], \tag{2.11}$$

pentru $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Arătăm că ∇ definită de (2.10) are torsiunea nulă. Pentru $X \in \Gamma(E)$, $Y \in \Gamma(TM)$, avem $\pi(X) = 0$ şi $T_\nabla(X,Y) = \nabla_X \pi(Y) - \pi[X,Y] = 0$ din definiţia conexiunii. Pentru $X, Y \in \Gamma(E^\perp)$ avem: $T_\nabla(X,Y) = \pi(\nabla^M_X Y) - \pi(\nabla^M_Y X) - \pi[X,Y] = \pi(T_{\nabla^M}(X,Y)) = 0$. Din biliniaritatea şi antisimetria torsiunii, rezultă $T_\nabla = 0$.

Pentru a arăta că ∇ este metrică faţă de g_T trebuie să verificăm egalitatea:

$$X(g_T(s,t)) = g_T(\nabla_X s, t) + g_T(s, \nabla_X t), \tag{2.12}$$

pentru orice $X \in \mathcal{X}(M)$ şi $s, t \in \Gamma(Q)$. Pentru $X = V \in \Gamma(E)$ egalitatea (2.12) este o rescriere a egalităţii $\mathcal{L}_V g_T = 0$, care, conform Observaţiei 2.2, este echivalentă cu faptul că g este metrică fibrată. Deci este suficient să verificăm pentru $X \in \Gamma(E^\perp)$. Notând $Z_s = \sigma(s)$, $Z_t = \sigma(t)$ avem:

$$\begin{aligned} X(g_T(s,t)) = X(g(Z_s, Z_t)) &= g(\nabla^M_X Z_s, Z_t) + g(Z_s, \nabla^M_X Z_t) \\ &= g_T(\pi(\nabla^M_X Z_s), t) + g_T(s, \pi(\nabla^M_X Z_t)) \\ &= g_T(\nabla_X s, t) + g_T(s, \nabla_X t). \end{aligned}$$

Unei metrici transverse g_T i-am asociat conexiunea ∇, care este fără torsiune şi faţă de care g_T este paralelă. Faptul că această conexiune este unică rezultă la fel ca pentru conexiunea Levi-Civita obişnuită, folosind formula Koszul, care în acest caz are forma:

$$\begin{aligned} 2g_T(\nabla_Y s, t) &= Y(g_T(s,t)) + Z_s(g_T(\pi(Y),t)) - Z_t(g_T(\pi(Y),s)) \\ &+ g_T(\pi([Y,Z_s]),t) + g_T(\pi([Z_t,Y]),s) - g_T(\pi([Z_s,Z_t]),\pi(Y)), \end{aligned} \tag{2.13}$$

pentru $Y \in \mathcal{X}(M)$, $s, t \in \Gamma(Q)$ şi $Z_s, Z_t \in \mathcal{X}(M)$ cu $\pi(Z_s) = s$, $\pi(Z_t) = t$.

Observaţia 2.3. Unica conexiune ∇ a fibrării normale Q determinată de condiţiile: $T_\nabla = 0$ şi $\nabla g_T = 0$ se numeşte *conexiunea Levi-Civita transversă* a metricii transverse g_T. Este important să observăm că această conexiune este asociată intrinsec metricii g_T, în sensul că, deşi am definit-o în (2.10) cu ajutorul unei metrici fibrate g, ea nu depinde de alegerea lui g, după cum rezultă şi din formula (2.13). Formula (2.10) ne arată că, pe direcţiile transverse, ∇ corespunde, prin submersiile riemanniene locale, conexiunilor Levi-Civita de pe varietăţile riemanniene care modelează foliaţia. Cum funcţiile de tranziţie sunt izometrii, pull-back-urile sunt invariant definite. Rezultă, în particular, că toate informaţiile legate de curbura lui ∇ au un sens invariant.

Ne va interesa în continuare curbura transversă, dar în acest cadru general prezentăm numai tensorul Riemann de curbură, urmând ca în secţiunea următoare să studiem curbura Ricci şi cea scalară în cazul particular al varietăţilor Sasaki. Tensorul Riemann de curbură asociat metricii transverse g_T este notat R^T şi pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ şi $Z \in \Gamma(E^{\perp})$ este definit prin:

$$R^T(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.14}$$

Această curbură coincide pe direcţiile din $\Gamma(E)$ cu $\overset{\circ}{R}$, curbura conexiunii Bott, deci, conform (2.4), este nulă: $R^T_{\nabla}(X,Y) = 0$, pentru $X, Y \in \Gamma(E)$. Mai mult, au loc următoarele egalităţi[36]:

Propoziţia 2.2. *Pentru orice secţiune V a lui E avem:*
(1) $\mathcal{L}_V \nabla = 0$.
(2) $\iota_V R^T = 0$.
(3) $\mathcal{L}_V R^T = 0$.

Foliaţii riemanniene 1-dimensionale. O foliaţie $\mathcal{F}$ de dimensiune 1 pe o varietate (M, g) se numeşte şi *flux*. Foile lui $\mathcal{F}$ sunt curbele integrale ale unui câmp vectorial nesingular V pe M.

Definiţia 2.10. O foliaţie 1-dimensională $\mathcal{F}$ pe M se numeşte *izometrică* dacă există o metrică riemanniană g pe M astfel încât fluxul corespunzător este o izometrie a lui g.

Cu alte cuvinte, o foliaţie 1-dimensională determinată de un câmp vectorial nesingular V, este izometrică dacă V este câmp Killing în raport cu o metrică riemanniană pe M. Atunci următorul rezultat este numai o reformulare a celui dat în Exemplul 2.5:

Propoziţia 2.3. *Orice foliaţie 1-dimensională izometrică este foliaţie riemanniană.*

Reciproc nu este adevărat: condiţia ca foliaţia determinată de câmpul vectorial nesingular V pe (M, g) să fie riemanniană este echivalentă cu o condiţie mai slabă impusă câmpului V, decât aceea de a fi Killing, şi anume V trebuie să satisfacă egalitatea[37]: $g(\nabla^M_Z V, Z') + g(Z, \nabla^M_{Z'} V) = 0$, pentru orice $Z, Z' \in \Gamma(V^{\perp})$ (adică $\nabla^M V$ este antisimetric numai pe direcţiile transverse).

[36] O demonstraţie a lor este dată în [BG1], Propoziţia 2.4.11.
[37] Această echivalenţă este stabilită în [Ton], Teorema 5.19.

Observaţia 2.4. Dacă V este câmp Killing nesingular, atunci, rescalând eventual metrica g numai pe direcţia lui V:

$$\bar{g}|_{\langle V\rangle} = \frac{1}{|V|^2} g|_{\langle V\rangle},$$

$$\bar{g}|_{V^\perp} = g|_{V^\perp},$$

câmpul vectorial V devine unitar şi rămâne Killing în raport cu metrica $\bar{g}$, deci putem presupune de la început că V este câmp Killing unitar (eventual în raport cu altă metrică).

Carrière a stabilit legătura între proprietatea unei foliaţii 1-dimensionale de a fi izometrică şi faptul că orbitele sunt geodezice, *cf.* Propoziţia 2.4. Pentru a demonstra acest rezultat avem nevoie de:

Lema 2.1. *Fie $\mathcal{F}$ o foliaţie* 1*-dimensională pe M şi V un câmp vectorial nesingular care generează $\mathcal{F}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *Există o metrică riemanniană g pe M faţă de care V este unitar şi orbitele sale sunt geodezice.*
(2) *Există o* 1*-formă η pe M astfel încât $\eta(V) = 1$ şi $\mathcal{L}_V\eta = 0$.*

Demonstraţie. Alegem o metrică pe M astfel încât V să fie unitar şi definim η ca fiind dualul lui V: $\eta(\cdot) = g(V, \cdot)$. Fie ∇^M conexiunea Levi-Civita. Deoarece V este unitar, atunci $g(\nabla^M_V V, V) = 0$ şi rezultă că orbitele sale sunt geodezice dacă şi numai dacă câmpul vectorial curbură medie $(\nabla^M_V V)^\perp$ se anulează, unde $\perp$ indică componenta ortogonală pe V. Sau, echivalent, 1-forma curbură medie $\kappa = g((\nabla^M_V V)^\perp, \cdot)$ se anulează. Pentru orice câmp vectorial X ortogonal pe V avem:

$$\begin{aligned} \kappa(X) &= g(\nabla^M_V V, X) = V(g(V, X)) - g(V, \nabla^M_V X) \\ &= (\mathcal{L}_V\eta)(X) + \eta([V, X]) - \eta(\nabla^M_V X) \\ &= (\mathcal{L}_V\eta)(X) + \eta(\nabla^M_X V) = (\mathcal{L}_V\eta)(X), \end{aligned} \tag{2.15}$$

unde ultima egalitate rezultă din:

$$0 = X(g(V, V)) = 2g(\nabla^M_X V, V) = 2\eta(\nabla^M_X V).$$

Echivalenţa din enunţ este o consecinţă directă a formulei (2.15). □

Propoziţia 2.4 (Carrière)**.** *Un flux riemannian ale cărui orbite sunt geodezice este izometric. Reciproc, orbitele unei foliaţii* 1*-dimensionale izometrice sunt geodezice.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{F}$ fluxul riemannian generat de câmpul vectorial nesingular V ale cărui orbite sunt geodezice şi fie g o metrică fibrată astfel încât V este unitar. Considerăm egalitatea care defineşte derivata Lie a metricii g:

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = V(g(X, Y)) - g([V, X], Y) - g(X, [V, Y]).$$

Aplicând-o pe câmpurile vectoriale orizontale X, Y, pe care le putem presupune şi foliate, deoarece egalitatea este tensorială, atunci rezultă $(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = 0$ (primul termen se anulează pentru că g este metrică fibrată, iar ultimii doi pentru că X, Y sunt orizontali şi foliaţi). De asemenea, rezultă $(\mathcal{L}_V g)(V, V) = 0$, deoarece V este unitar. Mai trebuie să arătăm că pentru X orizontal avem $(\mathcal{L}_V g)(V, X) = 0$. Din Lema 2.1 rezultă că pentru 1-forma duală a lui V, η, are loc:

$$\begin{aligned}0 &= (\mathcal{L}_V \eta)(X) = (\mathrm{d} \circ \iota_V \eta + \iota_V \circ \mathrm{d}\eta)(X) = \mathrm{d}\eta(V, X)\\ &= \frac{1}{2}(V\eta(X) - X\eta(V) - \eta([V, X])) = -\frac{1}{2}\eta([V, X]),\end{aligned}$$

ceea ce implică $(\mathcal{L}_V g)(V, X) = 0$. Astfel rezultă că V este câmp Killing şi fluxul este izometric.

Reciproc, fie $\mathcal{F}$ o foliaţie izometrică 1-dimensională. Atunci $\mathcal{F}$ este generată de un câmp vectorial nesingular V şi există o metrică riemanniană g faţă de care V este câmp Killing. Fie η 1-forma duală a lui V faţă de g. Atunci condiţia (2) din Lema 2.1 este îndeplinită, deci orbitele lui V sunt geodezice. □

În continuare ne va interesa cazul particular al varietăţilor Sasaki. Pe orice varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, conform Definiţiei 1.2, câmpul vectorial ξ este Killing unitar şi determină foliaţia $\mathcal{F}_\xi$ (numită şi *foliaţia caracteristică*, deoarece ξ este câmpul Reeb al formei de contact η), care, după cum am văzut în Exemplul 2.5, este o foliaţie riemanniană 1-dimensională, faţă de care metrica Sasaki g este metrică fibrată. Cum $\mathcal{F}_\xi$ este izometrică, rezultă din Propoziţia 2.4 că foile sale, adică curbele integrale ale lui ξ, sunt geodezice faţă de metrica Sasaki g.

2.2. **Structura Kähler transversă.** În această secţiune prezentăm geometria transversă a foliaţiei riemanniene $\mathcal{F}_\xi$ a unei varietăţi Sasaki M. Fixăm o structură Sasaki (ϕ, ξ, η, g) pe M şi fie $\mathcal{D} = ker(\eta) = \xi^\perp$ distribuţia de contact. Există o descompunere ortogonală a fibrării tangente:

$$TM = L_\xi \oplus \mathcal{D}, \tag{2.16}$$

unde L_ξ este fibrarea trivială în drepte generată de câmpul Reeb ξ. În fiecare punct p al lui M, fibrarea normală $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ are fibra dată de spaţiul cât $T_pM/\langle\xi_p\rangle$, iar $\pi : TM \to \nu(\mathcal{F}_\xi)$ este proiecţia naturală. După cum am văzut în cazul general (*cf.* (2.9)), metrica splitează şirul exact $0 \to L_\xi \to TM \to \nu(\mathcal{F}_\xi) \to 0$ şi identificăm fibrarea normală $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ cu fibrarea ortogonală $\mathcal{D}$ în raport cu metrica fibrată g prin aplicaţia de splitare $\sigma : \nu(\mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$.

Fibrarea $\mathcal{D}$ este înzestrată în mod natural cu:

- structura complexă: $J = \phi|_\mathcal{D}$.
- structura simplectică: $\omega = \mathrm{d}\eta|_\mathcal{D}$.
- metrica riemanniană: $g_\mathcal{D} = g|_\mathcal{D}$, care este legată de metrica Sasaki g prin formula:

  $$g = g_\mathcal{D} + \eta \otimes \eta,$$

  şi care este compatibilă cu structura complexă şi simplectică:

  $$g_\mathcal{D}(JX, Y) = \omega(X, Y),$$

  pentru orice $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, ceea ce rezultă direct prin restricţia la $\mathcal{D}$ a egalităţii $g(\phi\cdot, \cdot) = \mathrm{d}\eta(\cdot, \cdot)$ (*cf.* Definiţia 1.1).

Acestea împreună formează structura Kähler transversă: $(\mathcal{D}, J, \omega, g_\mathcal{D})$. Prin identificarea dată de izomorfismul σ, această structură se transportă pe fibrarea normală $\nu(\mathcal{F}_\xi)$.

Observaţia 2.5. În particular, există o structură complexă indusă pe fibrarea normală, $\bar{J} : \nu(\mathcal{F}_\xi) \to \nu(\mathcal{F}_\xi)$, dată de:

$$\bar{J}(\bar{X}) := \overline{\phi(X)}, \tag{2.17}$$

care este bine definită deoarece $\phi(\xi) = 0$. Mai mult, structura CR a varietăţii Sasaki, $(\mathcal{D}, J)$, este izomorfă ca fibrare vectorială complexă cu $(\nu(\mathcal{F}_\xi), \bar{J})$, deşi identificarea dintre ele nu este canonică, fiind nevoie de fixarea unei metrici.

Arătăm pe scurt cum se particularizează în cazul geometriei Sasaki noţiunile definite în secţiunea precedentă pentru foliaţii:

- Algebra Lie a câmpurilor vectoriale foliate ale foliaţiei $\mathcal{F}_\xi$ este:

$$\mathfrak{fol}(M, \mathcal{F}_\xi) = \{X \in \mathcal{X}(M) |\ [X, \xi] \in \langle\xi\rangle\},$$

adică algebra Lie a subgrupului de difeomorfisme ale lui M care păstrează foliaţia caracteristică:

$$\mathfrak{Fol}(M, \mathcal{F}_\xi) = \{f \in \mathfrak{Dif}(M) |\ f_*(\mathcal{F}_\xi) \subset \mathcal{F}_\xi\}.$$

- O r-formă α este bazică dacă $\iota_\xi \alpha = 0$, şi $\mathcal{L}_\xi \alpha = 0$. Notăm, pentru simplitate, $H^*_B(M) = H^*_B(M, \mathcal{F}_\xi)$.

Observaţia 2.6. 1-forma η a structurii Sasaki nu este bazică, deoarece $\iota_\xi \eta = 1$, dar $\mathrm{d}\eta$ este bazică şi închisă, determinând astfel o clasă de coomologie bazică netrivială: $0 \neq [\mathrm{d}\eta]_B \in H^2_B(M)$.

- Conexiunea Levi-Civita transversă este dată de:

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\mathcal{D}) \to \Gamma(\mathcal{D})$$

$$\nabla_X Y = \begin{cases} \pi_{\mathcal{D}}[X, Y], & \text{dacă } X \in \Gamma(L_\xi), \\ \pi_{\mathcal{D}}(\nabla^M_X Y), & \text{dacă } X \in \Gamma(\mathcal{D}). \end{cases} \tag{2.18}$$

Pentru orice 1-formă α, derivata covariantă $\nabla\alpha$ se descompune într-o parte ϕ-invariantă, notată $\nabla^+\alpha$, şi una ϕ-anti-invariantă, notată $\nabla^-\alpha$, astfel:

$$\nabla^\pm \alpha(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla\alpha(X, Y) \pm \nabla\alpha(\phi X, \phi Y)). \tag{2.19}$$

În continuare vrem să studiem curbura transversă a unei varietăţi Sasaki. Am definit deja tensorul Riemann al unei metrici transverse în cazul general al unei foliaţii riemanniene şi acum definim noţiunile transverse corespunzătoare curburii Ricci, respectiv a celei scalare.

Definiţia 2.11. *Curbura Ricci transversă* este dată de tensorul Ricci al metricii transverse $g_{\mathcal{D}}$, notat Ric^T:

$$\begin{aligned} Ric^T(X, Y) &= \mathrm{tr}(Z \to R^T(Z, X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} R^T(e_i, X, Y, e_i),\ (\forall) X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}), \end{aligned} \tag{2.20}$$

unde tensorul Riemann de curbură R^T este definit de (2.14) şi $\{e_i\}_{i=\overline{1,2n}}$ este o bază locală ortonormată a lui $\mathcal{D}$. Cu aceleaşi notaţii, *curbura scalară transversă* este dată de:

$$scal^T = \sum_{i=1}^{2n} Ric^T(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^{2n} R^T(e_i, e_j, e_j, e_i).$$

Definiţia 2.12. *Forma Ricci transversă* este definită astfel:

$$\rho^T(X, Y) := Ric^T(\phi X, Y),\ (\forall) X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

Arătăm că tensorul Ricci transvers Ric^T este legat de tensorul Ricci al metricii g, Ric, prin formula:

$$Ric^T = Ric|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}} + 2g|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}. \tag{2.21}$$

Fie $X, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$, atunci din (2.18) avem:

$$\nabla_X Z = \pi_{\mathcal{D}}(\nabla^M_X Z) = \nabla^M_X Z - \eta(\nabla^M_X Z)\xi.$$

Calculăm mai întâi tensorul de curbură transvers:

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla^M_X(\nabla_Y Z) - \eta(\nabla^M_X(\nabla_Y Z))\xi \\
&= \nabla^M_X(\nabla^M_Y Z - \eta(\nabla^M_Y Z)\xi) - \eta(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z - \nabla^M_X(\eta(\nabla^M_Y Z)\xi))\xi \\
&= \nabla^M_X \nabla^M_Y Z - X(\eta(\nabla^M_Y Z))\xi - \eta(\nabla^M_Y Z)\nabla^M_X \xi - \eta(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z)\xi \\
&+ X(\eta(\nabla^M_Y Z))\xi + \eta(\nabla^M_Y Z)\eta(\nabla^M_X \xi)\xi \\
&= \nabla^M_X \nabla^M_Y Z - \eta(\nabla^M_Y Z)\phi(X) - \eta(\nabla^M_X \nabla^M_Y Z)\xi,
\end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned}
R^T(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= R(X,Y)Z - \eta(\nabla^M_Y Z)\phi(X) + \eta(\nabla^M_X Z)\phi(Y) - \eta(R(X,Y)Z)\xi.
\end{aligned}$$

Atunci, pentru curbura Ricci transversă obţinem:

(2.22)

$$\begin{aligned}
Ric^T(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2n} R^T(e_i, X, Y, e_i) = \sum_{i=1}^{2n} [\langle R(e_i, X)Y - \eta(R(e_i, X)Y)\xi, e_i\rangle \\
&- \langle \eta(\nabla^M_X Y)\phi(e_i) - \eta(\nabla^M_{e_i} Y)\phi(X), e_i\rangle] \\
&= Ric(X,Y) - \langle R(\xi, X)Y, \xi\rangle + \sum_{i=1}^{2n} \langle \eta(\nabla^M_{e_i} Y)\phi(X), e_i\rangle \\
&= Ric(X,Y) + 2g(X,Y),
\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezultă din:

$$\langle R(\xi, X)Y, \xi\rangle \overset{(1.5)}{=} \langle \eta(Y)X - g(X,Y)\xi, \xi\rangle = -g(X,Y) \quad \text{şi}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \langle \eta(\nabla^M_{e_i} Y)\phi(X), e_i\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} \eta(\nabla^M_{e_i} Y)\langle \phi(X), e_i\rangle \\
&= \eta(\nabla^M_{\sum_{i=1}^{2n} \langle \phi(X), e_i\rangle e_i} Y) = \eta(\nabla^M_{\phi(X)} Y) = g(X,Y),
\end{aligned}$$

deoarece pentru $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ are loc:

$$\begin{aligned}
2g(X,Y) &= -2\mathrm{d}\eta(\phi X, Y) = -(\phi X)(\eta(Y)) + Y(\eta(\phi X)) + \eta([\phi X, Y]) \\
&= \eta(\nabla^M_{\phi X} Y - \nabla^M_Y(\phi X)) = \eta(\nabla^M_{\phi X} Y) - \eta((\nabla_Y \phi)X + \phi(\nabla^M_Y X)) \\
&\overset{(1.4)}{=} \eta(\nabla^M_{\phi X} Y) - \eta(\eta(X)Y - g(Y,X)\xi) = \eta(\nabla^M_{\phi X} Y) + g(X,Y).
\end{aligned}$$

Observaţia 2.7. Din (2.21), rezultă că ρ^T este legată de forma Ricci ρ a metricii Sasaki g, care este definită pe $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ de $\rho(X,Y) := Ric(\phi X, Y)$ şi prelungită trivial pe foliaţia caracteristică L_ξ, prin formula:

$$\rho^T = \rho + 2\mathrm{d}\eta. \tag{2.23}$$

Formele Ricci ρ şi ρ^T sunt de tipul $(1,1)$, iar ρ^T este o 2-formă bazică (aceasta rezultă din Propoziţia 2.2, (3)). Astfel putem să vedem 2-forma ρ^T ca pe un tensor $\bar{J}$-invariant pe $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ şi, cum $\mathrm{d}\eta$ este bazică, rezultă din (2.23) că şi ρ induce o aplicaţie biliniară bine definită pe $\nu(\mathcal{F}_\xi)$, care este $\bar{J}$-invariantă.

Calculăm curbura scalară transversă în funcţie de cea a metricii Sasaki g şi obţinem:

$$scal^T = scal + 2n. \tag{2.24}$$

Fie $\{e_i\}_{i=\overline{1,2n}}$ o bază locală ortonormată a lui $\mathcal{D}$, atunci avem:

$$\begin{aligned} scal^T &= \sum_{i=1}^{2n} Ric^T(e_i, e_i) \overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{2n} [Ric(e_i, e_i) + 2g(e_i, e_i)] \\ &= scal - Ric(\xi, \xi) + 4n = scal + 2n, \end{aligned}$$

unde pentru ultima egalitate am folosit $Ric(\xi,\xi) = 2n$, după cum rezultă direct din Observaţia 1.3.

2.3. **Operatori bazici.** În această secţiune introducem operatorii bazici[38] şi prezentăm pe scurt, fără toate detaliile de demonstraţie, câteva proprietăţi ale lor, de care avem nevoie pentru studiul metricilor Sasaki extremale. O importanţă deosebită o are existenţa unei teorii Hodge transverse (*cf.* [ElKA], [Ton]).

Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki compactă, iar $\mathcal{F}_\xi$ foliaţia sa caracteristică generată de câmpul Reeb. Am văzut deja că derivata exterioară se restrânge la spaţiul formelor bazice, obţinându-se subcomplexul de Rahm al formelor bazice[39], $(\Omega^*_B, \mathrm{d_B})$. Metrica g induce în mod natural o metrică pe spaţiul formelor şi considerăm restricţia ei la spaţiul formelor bazice, notată $\langle\cdot,\cdot\rangle_B = \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\Omega^*_B}$. Pentru a calcula adjunctul δ_B al operatorului $\mathrm{d_B} : \Omega^r_B \to \Omega^{r+1}_B$ faţă de această metrică, introducem mai întâi operatorul Hodge-$\bar{*}$ transvers, cu ajutorul căruia δ_B se exprimă în mod analog cu δ[40].

Definiţia 2.13. *Operatorul Hodge-$\bar{*}$ transvers* pe o varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ este:

$$\bar{*} : \Omega^r_B \to \Omega^{2n-r}_B, \quad \bar{*}\alpha = *(\eta \wedge \alpha) = (-1)^r \iota_\xi(*\alpha).$$

Produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_B = \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\Omega^*_B}$ se exprimă folosind Hodge-$\bar{*}$ astfel:

$$\langle\alpha,\beta\rangle_B = \int_M \alpha \wedge \bar{*}\beta \wedge \eta,$$

iar adjunctul δ_B al lui $\mathrm{d_B}$ în raport cu acest produs scalar este dat de:

$$\delta_B : \Omega^r_B \to \Omega^{r-1}_B, \quad \delta_B = -\bar{*}\,\mathrm{d_B}\,\bar{*}$$

Definiţia 2.14. *Operatorul Laplace bazic* este definit astfel:

$$\Delta_B : \Omega^r_B \to \Omega^r_B, \quad \Delta_B = \mathrm{d_B}\,\delta_B + \delta_B\,\mathrm{d_B},$$

iar o r-formă bazică α se numeşte *armonică* dacă este în nucleul operatorului Laplace bazic: $\Delta_B\alpha = 0$. Notăm spaţiul formelor bazice armonice cu $\mathfrak{harm}^r_B = \ker(\Delta_B) = \ker(\mathrm{d_B}) \cap \ker(\delta_B)$.

O r-formă bazică poate fi considerată 'armonică' în raport cu cei doi operatori Laplace, Δ şi Δ_B. În continuare vrem să vedem care este legătura dintre acestea. În general, formele bazice armonice nu sunt acele forme armonice (în raport cu Δ) care sunt bazice. Mai precis, are loc numai incluziunea strictă: $\ker(\Delta) \cap \Omega^*_B \subsetneq \ker(\Delta_B)$, după cum rezultă din formula (2.25), iar un exemplu de formă bazică care este în nucleul lui Δ_B, dar nu este în nucleul lui Δ, este $\mathrm{d}\eta$: cum

[38]Operatorii bazici se pot introduce mai general pentru foliaţii, dar ne restrângem la cazul foliaţiei caracteristice a unei varietăţi Sasaki compacte.

[39]Pentru simplitate, deoarece ne referim la aceeaşi foliaţie, notăm în continuare spaţiul formelor bazice cu $\Omega^*_B := \Omega^*_B(\mathcal{F}_\xi)$.

[40]Este vorba de următoarea formulă prin care se poate calcula adjunctul formal al derivatei exterioare: $\delta = -(-1)^{n(r+1)} * \mathrm{d} *$, când se aplică pe r-forme şi dimensiunea varietăţii este n.

$\mathrm{d}\eta$ este exactă în coomologia de Rham, iar spaţiile formelor armonice şi exacte sunt ortogonale, rezultă că $\mathrm{d}\eta$ nu este armonică (deoarece nu este nulă); pe de altă parte, conform Observaţiei 2.6, $\mathrm{d}\eta$ nu este exactă în coomologia bazică, dar este armonică, deoarece este închisă şi coînchisă: $\delta_B(\mathrm{d}\eta) = -\bar{*}\,\mathrm{d_B}\,\bar{*}(\mathrm{d}\eta) = -\frac{1}{n!}\bar{*}\,\mathrm{d_B}((\mathrm{d}\eta)^{n-1}) = 0$.

Dar pentru 1-forme arătăm că are loc chiar egalitate:

$$\ker(\Delta_B) = \ker(\mathrm{d_B}) \cap \ker(\delta_B) = \ker(\mathrm{d}) \cap \ker(\delta) \cap \Omega^1_B = \ker(\Delta) \cap \Omega^1_B.$$

Pentru aceasta este suficient să vedem că are loc: $\ker(\delta_B) = \ker(\delta) \cap \Omega^1_B$. De fapt, este adevărat mai mult, şi anume: $\delta|_{\Omega^1_B} = \delta_B$. În plus, din Corolarul 2.1, va rezulta: $\mathfrak{harm}^1_B(M) = \mathfrak{harm}^1(M)$.

Pentru $\alpha \in \Omega^r_B(M)$ calculăm:

(2.25)

$$\begin{aligned}
\delta_B\alpha &= -\bar{*}\,\mathrm{d_B}\,\bar{*}\alpha == -\bar{*}\,\mathrm{d_B}((-1)^r\iota_\xi(*\alpha)) = (-1)^{r+1}\bar{*}[\mathcal{L}_\xi(*\alpha) - \iota_\xi\mathrm{d}(*\alpha)] \\
&= \iota_\xi[*(\mathcal{L}_\xi(*\alpha) - \iota_\xi\mathrm{d}(*\alpha))] \overset{(a)}{=} \iota_\xi(*^2\mathcal{L}_\xi\alpha) - \iota_\xi[*(\iota_\xi\mathrm{d}(*\alpha))] \\
&\overset{(b)}{=} \iota_\xi(\mathcal{L}_\xi\alpha) - \iota_\xi[(-1)^{r-1}\eta \wedge *\mathrm{d}(*\alpha)] = \iota_\xi(\mathcal{L}_\xi\alpha) + \iota_\xi(\eta \wedge \delta\alpha) \\
&= \iota_\xi(\mathcal{L}_\xi\alpha) + \delta\alpha - \eta \wedge (\iota_\xi\delta\alpha) = \delta\alpha - \eta \wedge (\iota_\xi\delta\alpha),
\end{aligned}$$

unde (a) rezultă din faptul că ξ este câmp vectorial Killing, ceea ce implică $\mathcal{L}_\xi \circ * = * \circ \mathcal{L}_\xi$, după cum urmează: pornind de la definiţia operatorului Hodge-$*$: $\alpha \wedge *\beta = g(\alpha,\beta)vol_g$, pentru orice $\alpha, \beta \in \Omega^r(M)$ şi derivând în direcţia lui ξ, obţinem:

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha \wedge *\beta) = (\mathcal{L}_\xi\alpha) \wedge *\beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_\xi(*\beta),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi(g(\alpha,\beta)vol_g) &= [(\mathcal{L}_\xi g)(\alpha,\beta) + g(\mathcal{L}_\xi\alpha,\beta) + g(\alpha,\mathcal{L}_\xi\beta)]vol_g \\
&= \mathcal{L}_\xi\alpha \wedge (*\beta) + \alpha \wedge *(\mathcal{L}_\xi\beta),
\end{aligned}$$

de unde rezultă $\alpha \wedge \mathcal{L}_\xi(*\beta) = \alpha \wedge *(\mathcal{L}_\xi\beta)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \Omega^r(M)$, deci $\mathcal{L}_\xi$ comută cu $*$. Iar pentru (b) am folosit următoarele formule generale: $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ pe $\Lambda^k(M)$, deci, dacă dimensiunea lui M este impară, atunci $*^2 = 1$ pe orice $\Lambda^k(M)$; $*(\iota_X\alpha) = (-1)^{k-1}X^\flat \wedge (*\alpha)$, pentru $\alpha \in \Lambda^k(M)$.

Dacă aplicăm formula (2.25) pentru $\alpha \in \Omega^1_B(M)$, atunci $\delta\alpha \in \Omega^0(M)$, deci $\iota_\xi(\delta\alpha) = 0$ şi rezultă $\delta_B\alpha = \delta\alpha$.

Următorul rezultat ne asigură că orice 1-formă armonică pe M se anulează pe direcţia câmpului Reeb.

Propoziţia 2.5 (Tachibana). *Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki*[41] *compactă. Atunci orice 1-formă armonică α pe M satisface $\alpha(\xi) = 0$.*

[41]După cum rezultă şi din demonstraţie, acest rezultat este adevărat mai general pentru varietăţi compacte de K-contact, dar îl folosim numai pentru varietăţi Sasaki.

Demonstraţie. Orice 1-formă α se descompune în $\alpha = \beta + f\eta$, unde $\beta(\xi) = 0$. Cum formele armonice sunt invariante la izometrii, iar ξ este câmp Killing, are loc:

$$0 = \mathcal{L}_\xi \alpha = \mathrm{d}(\iota_\xi \alpha) = \mathrm{d}f,$$

deci f este constantă, de unde rezultă: $0 = \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\beta + f\mathrm{d}\eta$ şi din teorema lui Stokes obţinem:

$$0 = \int_M \mathrm{d}(\beta \wedge \eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1}) = -\int_M f\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n,$$

de unde, deoarece $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n$ este formă volum, rezultă $f = 0$, deci $\alpha = \beta$. $\square$

Din această propoziţie rezultă că orice 1-formă armonică α pe M satisface $\iota_\xi \alpha = 0$, dar, în plus, este adevărat şi $\mathcal{L}_\xi \alpha = 0$, deoarece ξ este câmp vectorial Killing, rezultând astfel:

Corolarul 2.1. *Pe o varietate Sasaki compactă orice* 1*-formă armonică este bazică.*

Corolarul 2.2. *Pe o varietate Sasaki compactă nu există câmpuri vectoriale paralele nenule.*

Demonstraţie. Câmpurile vectoriale paralele sunt armonice, deci, conform Propoziţiei 2.5, sunt ortogonale pe ξ. Fie X un câmp vectorial paralel, atunci are loc:

$$0 = Y(g(\xi, X)) = g(\nabla^M_Y \xi, X) + g(\xi, \nabla^M_Y X) = g(\phi Y, X),$$

pentru orice $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$, deci $X = f\xi$, pentru o anumită funcţie f. Atunci, pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$, obţinem:

$$0 = \nabla^M_Y X = (Yf)\xi + f\nabla^M_Y \xi = (Yf)\xi + f\phi Y.$$

Deoarece ξ şi ϕY sunt ortogonale, rezultă $f = 0$. $\square$

În continuare folosim faptul că geometria transversă a unei varietăţi Sasaki este Kähler. Fie $\mathcal{D}^{\mathbb{C}}$ complexificatul subfibrării $\mathcal{D}$, care se descompune în subspaţiile proprii ale lui ϕ: $\mathcal{D}^{\mathbb{C}} = \mathcal{D}^{(1,0)} \oplus \mathcal{D}^{(0,1)}$, corespunzătoare valorilor proprii i, respectiv $-i$. Analog, pentru 1-forme, are loc descompunerea: $\Lambda^1_B \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{(1,0)}_B \oplus \Lambda^{(0,1)}_B$ şi notăm cu $\Lambda^{(p,q)}_B = \Lambda^p(\Lambda^{(1,0)}_B) \otimes \Lambda^q(\Lambda^{(0,1)}_B)$ fibratul formelor de tip (p,q). Ca şi în cazul varietăţilor complexe are loc descompunerea transversă:

$$\Lambda^r_B \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{(p,q)}_B,$$

iar pe spaţiul formelor bazice Λ^r_B, diferenţiala exterioară $\mathrm{d_B}$ se descompune în suma operatorilor ∂_B şi $\bar{\partial}_B$, de bigrad $(1,0)$, respectiv $(0,1)$. Se obţine astfel complexul Dolbeault bazic:

$$0 \to \Lambda^{(p,0)}_B \xrightarrow{\bar{\partial}_B} \Lambda^{(p,1)}_B \xrightarrow{\bar{\partial}_B} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_B} \Lambda^{(p,n)}_B \to 0,$$

care defineşte grupurile de coomologie bazică Dolbeault $H_B^{p,q}(\mathcal{F}_\xi)$. Majoritatea rezultatelor din geometria Kähler se transpun în cazul transvers, *cf.* [ElKA]. În particular, are loc:

Propoziţia 2.6. *Fie* $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ *o varietate Sasaki compactă. Atunci au loc următoarele:*

(1) $H_B^{n,n}(\mathcal{F}_\xi) \cong H_B^{2n}(\mathcal{F}_\xi) \cong \mathbb{R}$.
(2) *Clasa bazică* $[\mathrm{d}\eta]_B$ *stă în* $H_B^{1,1}(\mathcal{F}_\xi)$.
(3) $\dim(H_B^{p,p})(\mathcal{F}_\xi) > 0$, $(\forall)p = \overline{1,n}$.
(4) $\dim(H_B^{2p+1})(\mathcal{F}_\xi)$ *este pară, pentru* $p < [n/2]$.
(5) *(Dualitatea Serre transversă)* $H_B^{p,q}(\mathcal{F}_\xi) \cong H_B^{n-p,n-q}(\mathcal{F}_\xi)$.

Pe noi ne interesează în special lema $\partial\bar{\partial}$-transversă, care este o consecinţă a descompunerii Hodge transverse ([ElKA], Teorema 3.2.5) şi are loc în general pentru o foliaţie riemanniană:

Teorema 2.1. *Fie* $\mathcal{F}$ *o foliaţie riemanniană pe varietatea compactă* M. *Atunci:*

(1) *Spaţiile vectoriale* $\mathfrak{harm}_B^r = \ker(\Delta_B)$ *sunt de dimensiune finită.*
(2) *Are loc descompunerea ortogonală:*

$$\Omega_B^r \cong \mathrm{im}(\mathrm{d_B}) \oplus \mathrm{im}(\delta_B) \oplus \mathfrak{harm}_B^r. \tag{2.26}$$

Astfel, orice clasă bazică de coomologie are un unic reprezentant armonic, *i.e.* $H_B^r \cong \mathfrak{harm}_B^r$.

Propoziţia 2.7 (Lema $\partial\bar{\partial}$-transversă, [ElKA])**.** *Dacă* ω, ω' *sunt* 2*-forme bazice reale, închise, de tipul* $(1,1)$ *astfel încât* $[\omega]_B = [\omega']_B$, *atunci există o funcţie bazică* f *astfel încât* $\omega' = \omega + i\partial_B\bar{\partial}_B f$.

Observaţia 2.8. La fel ca în geometria Kähler se introduce operatorul de diferenţiere exterioară twistat, $\mathrm{d_B^c}$, prin:

$$\mathrm{d_B^c}\,\alpha := \phi\,\mathrm{d_B}\,\phi^{-1}\alpha, \quad (\forall)\alpha \in \Omega_B^r(M),$$

care pe funcţii acţionează astfel: $\mathrm{d_B^c}\, f = \phi\,\mathrm{d_B}\, f$. În general, se poate considera fie perechea de operatori ∂_B şi $\bar{\partial}_B$, fie $\mathrm{d_B}$ şi $\mathrm{d_B^c}$, aceştia fiind legaţi prin formulele:

$$\mathrm{d_B} = \partial_B + \bar{\partial}_B, \quad \mathrm{d_B^c} = i(\bar{\partial}_B - \partial_B).$$

Atunci $2i\partial_B\bar{\partial}_B = \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}$ şi concluzia Lemei $\partial\bar{\partial}$-transversă se poate reformula astfel: există o funcţie bazică h astfel încât $\omega' = \omega + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\, h$.

Ca şi în cazul varietăţilor Kähler, introducem următorii operatori algebrici:

$$L_B : \Omega_B^r(M) \to \Omega_B^{r+2}(M), \quad L_B(\alpha) = \alpha \wedge \mathrm{d}\eta$$

şi adjunctul său faţă de produsul scalar indus:

$$\Lambda_B : \Omega_B^r(M) \to \Omega_B^{r-2}(M), \quad \Lambda_B := -\bar{*} L_B \bar{*}.$$

Cu ajutorul acestor operatori putem exprima identităţile Kähler transverse:

(2.27) $$[\Lambda_B, \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}] = \delta_B, \quad [\Lambda_B, \mathrm{d}_\mathrm{B}] = -\delta_B^c,$$

unde $\delta_B^c = -\bar{*}\,\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\,\bar{*}$ este adjunctul lui $\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}$. Din aceste identităţi rezultă, în particular, egalitatea operatorilor Laplace asociaţi lui d_B şi $\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}$: $\Delta_B = \Delta_B^c$, unde $\Delta_B^c = \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\,\delta_B^c + \delta_B^c\,\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}$. Tot din identităţile Kähler rezultă următoarea formulă pentru orice funcţie reală bazică f:

(2.28) $$\Delta_B f = \Delta_B^c f = -\Lambda_B(\mathrm{d}_\mathrm{B}\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\, f) = -\langle \mathrm{d}_\mathrm{B}\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\, f, \mathrm{d}\eta\rangle.$$

Pentru anumite formule este necesar să extindem acţiunea operatorului δ_B pe tensori şi aceasta se realizează prin formula: $\delta_B = -\sum_i \iota_{e_i}\nabla_{e_i}$, unde ∇ reprezintă conexiunea Levi-Civita transversă. Atunci formula de adjuncţionare pentru acţiunea pe tensori devine:

(2.29) $$\langle \delta_B \nabla\alpha, \beta\rangle = \langle \nabla\alpha, \nabla\beta\rangle.$$

De exemplu, acţiunea lui δ_B pe forme biliniare apare în formula Bochner transversă:

(2.30) $$\Delta_B\alpha = \delta_B\nabla\alpha + Ric^T(\alpha^\#),$$

pentru orice 1-formă bazică α, unde Ric^T reprezintă tensorul Ricci transvers.

Pentru studiul metricilor Sasaki extremale avem nevoie de operatorul autoadjunct $\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d}_\mathrm{B}$, a cărui acţiune pe 1-formele bazice este dată de:

Lema 2.2. *Pentru orice* 1*-formă bazică* α *are loc:*

(2.31) $$\delta_B\delta_B\nabla^-\alpha = \frac{1}{2}\Delta_B\delta_B\alpha - \langle \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\,\alpha, \rho^T\rangle + \frac{1}{2}\langle \alpha, \mathrm{d}_\mathrm{B}\, scal^T\rangle.$$

În particular, pentru orice funcţie bazică f rezultă:

(2.32) $$\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d}_\mathrm{B}\, f = \frac{1}{2}\Delta_B^2 f + \langle \mathrm{d}_\mathrm{B}\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\, f, \rho^T\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}_\mathrm{B}\, f, \mathrm{d}_\mathrm{B}\, scal^T\rangle.$$

Demonstraţie. Folosim următoarea egalitate din geometria Kähler (*cf.* [Be], 2.53), care are loc pentru orice 1-formă bazică α:

$$\delta_B\nabla^+\alpha - \delta_B\nabla^-\alpha = Ric^T(\alpha^\#),$$

care împreună cu formula Bochner (2.30) implică:

(2.33) $$\delta_B\nabla^-\alpha = \frac{1}{2}\Delta_B\alpha - Ric^T(\alpha^\#) = \frac{1}{2}\Delta_B\alpha + \iota_{\phi\alpha^\#}\rho^T.$$

Cu ajutorul formulei de adjuncţionare:

(2.34) $$\delta_B(\iota_X\psi) = \langle \mathrm{d}_\mathrm{B}\, X^\flat, \psi\rangle - \langle X^\flat, \delta_B\psi\rangle,$$

care are loc pentru orice câmp vectorial bazic X şi orice 2-formă bazică ψ, calculăm:

$$\begin{aligned}\delta_B\delta_B\nabla^-\alpha &= \delta_B(\frac{1}{2}\Delta_B\alpha + \iota_{\phi\alpha^\#}\rho^T)\\ &= \frac{1}{2}\Delta_B\delta_B\alpha + \langle \mathrm{d_B}(\phi\alpha^\#)^\flat, \rho^T\rangle - \langle(\phi\alpha^\#)^\flat, \delta_B\rho^T\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Delta_B\delta_B\alpha - \langle \mathrm{d_B}(\phi\alpha), \rho^T\rangle - \langle\phi\alpha, \delta_B\rho^T\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Delta_B\delta_B\alpha - \langle \mathrm{d_B^c}\,\alpha, \rho^T\rangle + \frac{1}{2}\langle\phi\alpha, \mathrm{d_B^c}\,scal^T\rangle,\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezultă din identitatea Bianchi contractată transversă: $\delta_B\rho^T = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d_B^c}\,scal^T$. Cum $(\phi\alpha, \mathrm{d_B^c}\,scal^T) = (\phi\alpha, \phi\,\mathrm{d_B}\,scal^T) = (\alpha, \mathrm{d_B}\,scal^T)$, rezultă formula căutată (2.31).
Înlocuind pe α cu $\mathrm{d_B}\,f$ obţinem:

$$\begin{aligned}\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d_B}\,f &= \frac{1}{2}\Delta_B\delta_B\,\mathrm{d_B}\,f - \langle\mathrm{d_B^c}\,\mathrm{d_B}\,f, \rho^T\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathrm{d_B}\,f, \mathrm{d_B}\,scal^T\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Delta_B^2 f + \langle\mathrm{d_B}\mathrm{d_B^c}\,f, \rho^T\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathrm{d_B}\,f, \mathrm{d_B}\,scal^T\rangle.\end{aligned}$$

□

Avem nevoie şi de următoarea egalitate (*cf.* [Be], 2.74 şi [G]), unde φ_i sunt 2-forme bazice:

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r\wedge(\mathrm{d}\eta)^{n-r} = \frac{(n-r)!}{n!}\Lambda_B^r(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r)(\mathrm{d}\eta)^n. \tag{2.35}$$

În particular, pentru $r = 1$ şi $r = 2$ obţinem:

$$\varphi_1\wedge(\mathrm{d}\eta)^{n-1} = \frac{1}{n}\Lambda_B(\varphi_1)(\mathrm{d}\eta)^n = \frac{1}{n}\langle\varphi_1, \mathrm{d}\eta\rangle(\mathrm{d}\eta)^n. \tag{2.36}$$

(2.37)

$$\begin{aligned}\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge(\mathrm{d}\eta)^{n-2} &= \frac{(n-2)!}{n!}\Lambda_B^2(\varphi_1\wedge\varphi_2)(\mathrm{d}\eta)^n\\ &= \frac{1}{n(n-1)}[\Lambda_B(\varphi_1)\wedge\Lambda_B(\varphi_2) - \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle](\mathrm{d}\eta)^n.\end{aligned}$$

3. Descompunerea câmpurilor vectoriale c-olomorfe pe varietăţi Sasaki compacte

În această secţiune determinăm rezultatul analog pentru varietăţi Sasaki al descompunerii câmpurilor vectoriale olomorfe pe varietăţile Kähler compacte. Reamintim pentru început care este descompunerea în cazul Kähler.

Spaţiul câmpurilor vectoriale olomorfe pe varietăţile Kähler compacte. Fie (M, g, J, ω) o varietate Kähler compactă, atunci are loc[42]:

Propoziţia 3.1. *Orice câmp vectorial real olomorf X pe M se scrie unic sub forma:*

$$X = X_H + \operatorname{grad} f + J \operatorname{grad} h, \tag{3.1}$$

unde X_H este dualul riemannian al unei 1-forme armonice, iar f şi h sunt funcţii reale unic determinate până la o constantă aditivă.

Observaţia 3.1. Pentru a obţine unicitatea funcţiilor din descompunere se impun condiţiile de normalizare: $\int_M f \operatorname{vol}_g = \int_M h \operatorname{vol}_g = 0$. Atunci $f^X := f$ ($F^X := f + ih$) se numeşte *potenţialul real* (*complex*) al câmpului olomorf X. Pentru un câmp vectorial olomorf fixat X, ambele potenţiale depind de metrica g aleasă.

Potenţialul real f^X este determinat de egalitatea:

$$\mathcal{L}_X \omega = \mathrm{dd}^c f^X,$$

deoarece are loc: $\mathcal{L}_X \omega = \mathrm{d}(\iota_X \omega) = \mathrm{d}(JX^\flat) = \mathrm{dd}^c f$, ţinând cont de descompunerea 1-formei duale: $X^\flat = X_H^\flat + \mathrm{d}f + \mathrm{dd}^c h$.

Observaţia 3.2. Algebra Lie a câmpurilor vectoriale olomorfe pe M, notată $\mathfrak{hol}(M)$, este a priori o algebră Lie reală, dar acţiunea lui J o transformă într-o algebră Lie complexă: într-adevăr, din integrabilitatea lui J ştim că X olomorf implică JX olomorf şi pentru orice $X, Y \in \mathfrak{hol}(M)$ are loc: $[JX, Y] = J[X, Y]$.

3.1. Câmpurile vectoriale c-olomorfe pe varietăţi Sasaki.

Pentru a enunţa rezultatul analog pe varietăţile Sasaki, trebuie mai întâi să considerăm o noţiune corespunzătoare de olomorfie pentru câmpurile vectoriale, adică să definim, cel puţin la nivel infinitezimal, ce înseamnă olomorfia pe o varietate Sasaki[43]. Există două definiţii, prima, considerată de Tanno în [Ta], cere ca un câmp olomorf X să invarieze tensorul ϕ: $\mathcal{L}_X \phi = 0$, iar cea de-a doua, mai generală, introdusă în [BS] şi numită *contact-olomorfie*, cere ca ϕ să fie invariantă din punctul de vedere al distribuţiei de contact. Mai precis:

[42] Această descompunere este o consecinţă a descompunerii Hodge şi este demonstrată, de exemplu, în [G] şi [M].

[43] Enunţăm definiţiile numai în cazul Sasaki, dar ele se pot da mai general, pentru varietăţile de aproape contact normale.

Definiţia 3.1. Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki. Un câmp vectorial X se numeşte *(contact-) olomorf* dacă:

$$(\mathcal{L}_X \phi)Y = \eta([X, \phi Y])\xi, \tag{3.2}$$

pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$.

În continuare considerăm această definiţie pentru un câmp vectorial "olomorf" pe o varietate Sasaki, pe care îl numim *c-olomorf*.

Observaţia 3.3. Condiţia de c-olomorfie din Definiţia 3.1 reprezintă colinearitatea dintre $(\mathcal{L}_X \phi)Y$ şi ξ, pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$: prin aplicarea 1-formei η, rezultă că factorul de colinearitate este cel din ecuaţia (3.2).

Observaţia 3.4. Unul dintre avantajele considerării acestei definiţii este ϕ- invarianţa (care nu este adevărată pentru noţiunea mai restrictivă de olomorfie): dacă X este un câmp vectorial c-olomorf, atunci şi ϕX este c-olomorf[44].
Dacă X este c-olomorf, atunci paranteza Lie $[X, \xi]$ este colineară cu ξ, adică X este câmp vectorial foliat în raport cu foliaţia $\mathcal{F}_\xi$ generată de ξ (*cf.* Definiţia 2.3). Astfel X se proiectează peste un câmp vectorial transvers $\bar{X}$, care este o secţiune a fibratului normal $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ şi, prin izomorfismul dintre $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ şi $\mathcal{D}$, $\bar{X}$ se identifică cu $X^{\mathcal{D}}$, componenta orizontală a lui X.

Exemplul 3.1. Pe o varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, câmpul Reeb ξ şi orice multiplu al său este c-olomorf, deoarece avem: $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$, iar $\mathcal{L}_{f\xi}\phi = f\mathcal{L}_\xi \phi - (\mathrm{d}f \circ \phi) \otimes \xi$.

Observaţia 3.5. Pe o varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, orice câmp vectorial X se descompune în mod unic, conform (2.16), sub forma: $X = \eta(X)\xi + X^{\mathcal{D}}$, unde $X^{\mathcal{D}}$ este ortogonal pe ξ. Din Exemplul 3.1 rezultă echivalenţa: X este c-olomorf dacă şi numai dacă $X^{\mathcal{D}}$ este c-olomorf.

Cum pentru orice câmp orizontal Y are loc: $[Y, \xi] \in \mathcal{D}$ (aceasta rezultă din proprietăţile care definesc câmpul Reeb ξ şi din formula lui $\mathrm{d}\eta$ aplicată lui Y şi ξ), atunci $[X^{\mathcal{D}}, \xi] \in \mathcal{D}$, dar, în acelaşi timp, din Observaţia 3.4, $[X^{\mathcal{D}}, \xi]$ este colinear cu ξ, deci rezultă $[X^{\mathcal{D}}, \xi] = 0$.

Observaţia 3.6. Mulţimea câmpurilor vectoriale c-olomorfe formează o subalgebră Lie a lui $\mathcal{X}(M)$, pe care o notăm $\mathfrak{chol}(M)$. Cum orice câmp vectorial c-olomorf este foliat (*cf.* Observaţia 3.4), are loc incluziunea de subalgebre Lie: $\mathfrak{chol}(M) \subset \mathfrak{fol}(M, \mathcal{F}_\xi)$. Deoarece $\xi \in \mathfrak{chol}(M)$ şi ξ este în nucleul lui ϕ, atunci acţiunea lui ϕ nu induce o structură de algebră Lie complexă pe $\mathfrak{chol}(M)$ (ca în cazul Kähler, *cf.* Observaţia 3.2), dar dacă ne uităm la imaginea ei prin proiecţia naturală din şirul exact (2.6): $0 \to \mathcal{X}_{\mathcal{F}_\xi}(M) \to \mathfrak{fol}(M, \mathcal{F}_\xi) \to \mathfrak{trans}(M, \mathcal{F}_\xi) \to 0$, şi la endomorfismul indus de ϕ (*cf.* (2.17)), atunci acţiunea lui $\bar{J}$ defineşte

[44] Aceasta rezultă printr-un calcul direct din definiţie (*cf.* [BS], Lema 3.1).

o structură de algebră Lie complexă pe mulţimea câmpurilor vectoriale c-olomorfe transverse.

Observaţia 3.7. Noţiunea de câmp vectorial c-olomorf este, de fapt, o noţiune de olomorfie transversă. Într-adevăr, dacă considerăm pe mulţimea secţiunilor fibratului normal $\nu(\mathcal{F}_\xi)$, endomorfismul indus $\bar{\phi}$ şi croşetul indus: $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]}$, atunci un câmp vectorial X se numeşte *transvers olomorf* dacă pentru orice secţiune $\bar{Y}$ a lui $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ are loc: $[\bar{X}, \bar{\phi}\bar{Y}] = \bar{\phi}\overline{[X, Y]}$. Echivalenţa cu Definiţia 3.1 a câmpurilor c-olomorfe rezultă într-o direcţie prin aplicarea proiecţiei naturale şi reciproc din faptul că (3.2) este o consecinţă a condiţiei ca $(\mathcal{L}_X\phi)Y$ să fie colinear cu ξ, pentru orice câmp vectorial Y.

Observaţia 3.8. Printr-un calcul direct rezultă că un câmp vectorial X este transvers (ceea ce, prin identificarea dintre fibrarea normală $\nu(\mathcal{F}_\xi)$ şi distribuţia orizontală $\mathcal{D}$, revine la faptul că $X \in \xi^\perp$ şi $[X, \xi] = 0$) dacă şi numai dacă 1-forma duală $X^\flat$ este bazică.

Avem nevoie de următoarea caracterizare echivalentă a c-olomorfiei unui câmp vectorial în funcţie de derivata covariantă a 1-formei duale:

Propoziţia 3.2. *Pe o varietate Sasaki* $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$*, un câmp vectorial* X *este c-olomorf dacă şi numai dacă* 1*-forma duală* $X^\flat$ *are derivata covariantă* ϕ*-invariantă*[45]*, adică* $\nabla^- X^\flat = 0$.

Demonstraţie. Conform Observaţiei 3.5, putem considera $X = X^{\mathcal{D}}$. Notăm cu α 1-forma duală a lui X faţă de g: $\alpha = X^\flat$. Arătăm următoarea echivalenţă, în care apare conexiunea Levi-Civita, ∇^M, a metricii g:

$$X \text{ este } c\text{-olomorf} \iff (\nabla^M)^- \alpha|_{\mathcal{D}} = 0 \text{ şi } \nabla^M_\xi \alpha = \phi \circ \alpha. \tag{3.3}$$

Presupunând că am demonstrat (3.3), vrem să folosim relaţia dintre cele două conexiuni Levi-Civita, ∇^M şi ∇, pentru a obţine echivalenţa din enunţ. Din (2.18) avem:

$$\nabla_Y Z = \begin{cases} \pi_{\mathcal{D}}(\nabla^M_Y Z), & \text{dacă } Y, Z \in \xi^\perp \\ \pi_{\mathcal{D}}([Y, Z]), & \text{dacă } Y \in \langle\xi\rangle,\ Z \in \xi^\perp \\ 0, & \text{dacă } Z \in \langle\xi\rangle \end{cases} \tag{3.4}$$

Arătăm mai întâi egalitatea: $\nabla^M_\xi \alpha - \phi \circ \alpha = \nabla_\xi \alpha$, pentru o 1-formă bazică α. Pentru orice câmp vectorial Y avem:

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi \alpha)(Y) &= \xi(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_\xi Y) = \xi(\alpha(Y)) - \alpha(\pi_{\mathcal{D}}[\xi, Y]) \\ &= \xi(\alpha(Y)) - \alpha([\xi, Y]) = \xi(\alpha(Y)) + \alpha(\nabla^M_Y \xi) - \alpha(\nabla^M_\xi Y) \\ &= (\nabla^M_\xi \alpha)(Y) + \alpha(\phi Y) = (\nabla^M_\xi \alpha)(Y) - (\phi \circ \alpha)(Y). \end{aligned}$$

[45] Păstrăm notaţiile din secţiunea 2.2, deci ∇ este conexiunea Levi-Civita transversă a metricii foliate g, iar ∇^- este dată de (2.19).

Astfel rezultă că a doua condiţie din membrul drept din (3.3) este echivalentă cu $\nabla_\xi \alpha = 0$, care la rândul ei este echivalentă cu $\nabla^-_\xi \alpha = 0$, deoarece din formula (2.19) obţinem $(\nabla^- \alpha)(\xi, \cdot) = \frac{1}{2}(\nabla \alpha)(\xi, \cdot)$.

Pe de altă parte, pe direcţiile orizontale avem: $(\nabla^M_Y \alpha)(Z) = (\nabla_Y \alpha)(Z)$, pentru orice $Y, Z \in \xi^\perp$:

$$\begin{aligned}(\nabla_Y \alpha)(Z) &= Y(\alpha(Z)) - \alpha(\nabla_Y Z) = Y(\alpha(Z)) - \alpha(\pi_{\mathcal{D}}(\nabla^M_Y Z)) \\ &= Y(\alpha(Z)) - \alpha(\nabla^M_Y Z) = (\nabla^M_Y \alpha)(Z),\end{aligned}$$

unde pentru penultima egalitate am folosit $\alpha(\xi) = 0$, deoarece α este bazică. Rezultă astfel că prima condiţie din membrul drept din (3.3) este echivalentă cu $\nabla^- \alpha | \mathcal{D} = 0$. Pentru a obţine echivalenţa din enunţ mai trebuie să arătăm că pentru orice 1-formă bazică α are loc $(\nabla^- \alpha)(\cdot, \xi) = 0$:

$$\begin{aligned}(\nabla^-_Y \alpha)(\xi) &= \frac{1}{2}[(\nabla_Y \alpha)(\xi) - (\nabla_{\phi Y} \alpha)(\phi \xi) = \frac{1}{2}(\nabla_Y \alpha)(\xi) \\ &= \frac{1}{2}[Y(\alpha(\xi)) - \alpha(\nabla_Y \xi)] = 0, \quad (\forall) Y \in \mathcal{X}(M)\end{aligned}$$

A rămas să demonstrăm echivalenţa (3.3). Pentru aceasta arătăm mai întâi că are loc egalitatea:

$$((\nabla^M)^- \alpha)(Y, Z) = -\frac{1}{2} \mathrm{d}\eta((\mathcal{L}_X \phi) Y, Z), \quad (\forall) Y, Z \in \mathcal{D}. \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\eta&((\mathcal{L}_X \phi) Y, Z) = g((\mathcal{L}_X \phi) Y, \phi Z) = g([X, \phi Y] - \phi[X, Y], \phi Z) \\ &= g(\nabla^M_X \phi Y, \phi Z) - g(\nabla^M_{\phi Y} X, \phi Z) - g(\phi[X, Y], \phi Z) \\ &= g((\nabla^M_X \phi)(Y) + \phi(\nabla^M_X Y), \phi Z) - g(\nabla^M_{\phi Y} X, \phi Z) - g([X, Y], Z) \\ &= g(g(X, Y)\xi - \eta(Y) X, \phi Z) + g(\nabla^M_X Y, Z) - g(\nabla^M_{\phi Y} X, \phi Z) \\ &- g(\nabla^M_X Y, Z) + g(\nabla^M_Y X, Z) \\ &= g(\nabla^M_Y \alpha^\#, Z) - g(\nabla^M_{\phi Y} \alpha^\#, \phi Z) + g(X, Y) g(\xi, \phi Z) - \eta(Y) g(X, \phi Z) \\ &= \nabla^M \alpha(Y, Z) - \nabla^M \alpha(\phi Y, \phi Z) = 2((\nabla^M)^- \alpha)(Y, Z).\end{aligned}$$

Arătăm în continuare implicaţia ”$\Rightarrow$”: dacă $X = \alpha^\#$ este c-olomorf, atunci $(\mathcal{L}_{\alpha^\#} \phi)(\cdot)$ este multiplu de ξ şi cum $\iota_\xi \mathrm{d}\eta = 0$, din egalitatea (3.5) rezultă $(\nabla^M)^- \alpha|_{\mathcal{D}} = 0$. Verificăm cea de-a doua condiţie, $\nabla^M_\xi \alpha = \phi \circ \alpha$:

$$\begin{aligned}(\nabla^M_\xi \alpha)(Y) &= g(\nabla^M_\xi \alpha^\#, Y) = g([\xi, \alpha^\#] + \nabla^M_{\alpha^\#} \xi, Y) \\ &= g(\nabla^M_{\alpha^\#} \xi, Y) = g(\phi \alpha^\#, Y),\end{aligned}$$

pentru orice câmp vectorial Y. Folosind această formulă rezultă egalitatea dorită astfel:

Dacă $Y = \xi$: $(\nabla^M_\xi \alpha)(Y) = g(\phi \alpha^\#, \xi) = 0$ şi $(\phi \circ \alpha)(\xi) = -\alpha(\phi \xi) = 0$.
Dacă $Y \in \xi^\perp$: $(\nabla^M_\xi \alpha)(Y) = -g(\alpha^\#, \phi Y) = -\alpha(\phi Y) = (\phi \circ \alpha)(Y)$.

Reciproc, din $(\nabla^M)^- \alpha|_{\mathcal{D}} = 0$ şi (3.5) rezultă că $(\mathcal{L}_X \phi)(Y)$ este multiplu de ξ, pentru orice $Y \in \mathcal{D}$. Pentru ca X să fie c-olomorf trebuie să verificăm că şi $(\mathcal{L}_X \phi)(\xi)$ este multiplu de ξ. Arătăm că, de fapt,

$(\mathcal{L}_X\phi)(\xi)$ este nul. Pentru aceasta aplicăm a doua condiţie din ipoteză, şi anume $\nabla^M_\xi\alpha = \phi\circ\alpha$, pentru $Y\in\xi^\perp$, respectiv $Y=\xi$:

$$(\phi\circ\alpha)(Y) = (\nabla^M_\xi\alpha)(Y) = g(\nabla^M_\xi\alpha^\#, Y) = g([\xi,\alpha^\#],Y) + (\phi\circ\alpha)(Y),$$

ceea ce implică $g([\xi,\alpha^\#],Y)=0$, pentru orice $Y\in\xi^\perp$. Pentru $Y=\xi$ obţinem:

$$0 = (\phi\circ\alpha)(\xi) = (\nabla^M_\xi\alpha)(\xi) = g([\xi,\alpha^\#],\xi) + g(\phi\alpha^\#,\xi) = g([\xi,\alpha^\#],\xi),$$

de unde rezultă şi $g([\xi,\alpha^\#],\xi)=0$, deci $[\xi,\alpha^\#]=0$ şi avem:

$$(\mathcal{L}_X\phi)(\xi) = [X,\phi\xi] - \phi([X,\xi]) = -\phi([\alpha^\#,\xi]) = 0.$$

□

3.2. **Descompunerea în cazul regulat.** Prezentăm mai întâi descompunerea câmpurilor vectoriale c-olomorfe pe varietăţile Sasaki regulate. În acest caz descompunerea rezultă prin ridicarea descompunerii de pe varietăţile Kähler, folosind fibrarea Boothby-Wang.

Avem nevoie de următoarea corespondenţă dintre câmpurile c-olomorfe pe o varietate Sasaki regulată şi câmpurile olomorfe pe varietatea Kähler cât[46]:

Propoziţia 3.3 ([BS]). *Fie $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ o varietate Sasaki compactă regulată şi $\pi: M^{2n+1}\to N^{2n}$ fibrarea Boothby-Wang. Dacă X este un câmp c-olomorf pe M, atunci, conform Observaţiei 3.4, X este proiectabil şi, în plus, π_*X este olomorf pe N. Reciproc, lift-ul orizontal al unui câmp vectorial olomorf de pe N este un câmp vectorial c-olomorf pe M.*

Observaţia 3.9. Conform observaţiilor anterioare 3.4 şi 3.5, orice câmp $X\in\mathcal{X}(M)$ se descompune unic astfel: $X = X^{\mathcal{D}} + \eta(X)\xi$, unde $X^{\mathcal{D}}$ este câmp vectorial transvers. Astfel, din Propoziţia 3.3 rezultă:

$$\begin{aligned}\mathfrak{chol}(M) &\cong \langle\xi\rangle \oplus \widetilde{\mathfrak{hol}(N)},\\ X &\mapsto (\eta(X)\xi, X^{\mathcal{D}} = \widetilde{\pi_*X^{\mathcal{D}}}),\end{aligned}$$

unde $\tilde{\ }$ reprezintă lift-ul orizontal prin fibrarea Boothby-Wang.

Fixăm o varietate Sasaki compactă regulată $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,\bar g)$ şi considerăm fibrarea Boothby-Wang, $\pi:(M,\bar g)\to(N,g)$, care, conform secţiunii 1.2, este o submersie riemanniană şi fibrare principală în cercuri.

Fie $X\in\mathfrak{chol}(M)$, atunci $X^{\mathcal{D}}$ este de forma: $X^{\mathcal{D}}=\tilde Y$ cu $Y\in\mathfrak{hol}(N)$ (*cf.* Observaţia 3.9). Cum N este o varietate Kähler compactă, aplicând descompunerea (3.1) pentru câmpul vectorial olomorf

[46] Acest rezultat este demonstrat în [BS] şi reprezintă o altă motivaţie pentru faptul că noţiunea de c-olomorfie este naturală, în sensul că este compatibilă cu cea de pe varietatea Kähler cât.

Y, rezultă:

$$Y = Y_H + \operatorname{grad} f + J \operatorname{grad} h, \tag{3.6}$$

unde Y_H este dualul 1-formei armonice $\alpha := g(Y_H, \cdot)$ şi $f, h \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Considerăm lift-ul acestei descompuneri:

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_H + \widetilde{\operatorname{grad} f} + \widetilde{J \operatorname{grad} h} \tag{3.7}$$

şi arătăm că aceasta este descompunerea căutată, adică:

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_H + \operatorname{grad} \tilde{f} + \phi \operatorname{grad} \tilde{h}, \tag{3.8}$$

unde $\tilde{f} = f \circ \pi$, $\tilde{h} = h \circ \pi$, iar dualul lui $\tilde{Y}_H$ este o 1-formă armonică pe M. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm:

Propoziţia 3.4. *Folosind aceleaşi notaţii ca mai sus au loc următoarele:*

(1) $\widetilde{\operatorname{grad} f} = \operatorname{grad} \tilde{f}$, $\quad (\forall) f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ *(unde gradientul este considerat în raport cu metrica g, respectiv $\bar{g}$).*
(2) $\widetilde{JY} = \phi\tilde{Y}$, $(\forall) Y \in \mathcal{X}(N)$.
(3) $\bar{g}(\tilde{Y}, \cdot) = \pi^*(\alpha)$, *unde* $\alpha := g(Y, \cdot)$, $\quad (\forall) Y \in \mathcal{X}(N)$.
(4) *Dacă α este o 1-formă armonică pe N, atunci $\pi^*\alpha$ este o 1-formă armonică pe M.*

Demonstraţie. (1): Deoarece $\tilde{f} := f \circ \pi$, rezultă $\mathrm{d}\tilde{f} = \mathrm{d}f \circ \pi_*$. Din definiţia gradientului avem următoarele relaţii:

$$\mathrm{d}f(Y) = g(\operatorname{grad} f, Y), (\forall) Y \in \mathcal{X}(N), \tag{3.9}$$

$$\mathrm{d}\tilde{f}(X) = \bar{g}(\operatorname{grad} \tilde{f}, X), (\forall) X \in \mathcal{X}(M). \tag{3.10}$$

Vrem să vedem că în orice punct p al varietăţii M are loc:

$$\pi_{*,p}(\operatorname{grad} \tilde{f})_p = (\operatorname{grad} f)_{\pi(p)}.$$

Considerăm $X = \tilde{Y}$ în relaţia (3.10), pentru $Y \in \mathcal{X}(N)$:

$$\mathrm{d}\tilde{f}(\tilde{Y}) = \bar{g}(\operatorname{grad} \tilde{f}, \tilde{Y}). \tag{3.11}$$

Cum, în plus, are loc:

$$\mathrm{d}\tilde{f}(\tilde{Y}) = (\mathrm{d}f \circ \pi_*)(\tilde{Y}) = \mathrm{d}f(Y) = g(\operatorname{grad} f, Y),$$

iar π este o submersie riemanniană, rezultă:

$$\bar{g}(\operatorname{grad} \tilde{f}, \tilde{Y}) = g(\operatorname{grad} f, Y) = \bar{g}(\widetilde{\operatorname{grad} f}, \tilde{Y}),$$

deci, pentru orice punct $p \in M$ şi $Y_p \in T_{\pi(p)}N$ avem:

$$\bar{g}_p((\operatorname{grad} \tilde{f})_p, \tilde{Y}_p) = \bar{g}_p(\widetilde{\operatorname{grad} f}_p, \tilde{Y}_p).$$

Deoarece această egalitate este adevărată şi pentru ξ_p:

$$(0 =)\bar{g}_p((\operatorname{grad} \tilde{f})_p, \xi_p) = \bar{g}_p(\widetilde{\operatorname{grad} f}_p, \xi_p)(= 0),$$

rezultă $(\operatorname{grad}\tilde{f})_p = (\widetilde{\operatorname{grad} f})_p$, în orice punct p din M, deci $\operatorname{grad}\tilde{f} = \widetilde{\operatorname{grad} f}$. În particular, rezultă că $\operatorname{grad}\tilde{f}$ este un câmp vectorial proiectabil.

(2): Rezultă direct din fibrarea Boothby-Wang, deoarece definiţia lui ϕ, conform (1.10), este:

$$\phi X = \widetilde{J\pi_* X},$$

unde $\tilde{\cdot}$ este lift-ul orizontal, iar aici $X = X_p$ este vector într-un punct.

(3): Vrem să arătăm $\pi^*(Y^\flat) = \tilde{Y}^\flat$, adică egalitatea de 1-forme pe M: $\bar{g}(\tilde{Y}, \cdot) = \pi^*\alpha$, unde $\alpha := g(Y, \cdot)$.

Fie $p \in M$ fixat şi $X \in T_pM$. Este suficient să verificăm că are loc:

$$\bar{g}_p((\tilde{Y})_p, X) = (\pi^*\alpha)_p(X),$$

pentru $X = \xi_p$ şi $X \in \xi_p^\perp$. În primul caz avem $\bar{g}_p(\tilde{Y}_p, \xi_p) = 0$, deoarece $\tilde{Y}_p$ este orizontal, iar pe de altă parte $(\pi^*\alpha)_p(\xi_p) := \alpha_{\pi(p)}(\pi_*\xi_p) = 0$. În al doilea caz, pentru $X \in \xi^\perp$, obţinem:

$$\bar{g}_p(\tilde{Y}_p, X) = g_{\pi(p)}(Y_{\pi(p)}, (\pi_*)_p(X)) = \alpha_{\pi(p)}((\pi_*)_p X) = (\pi^*\alpha)_p(X).$$

Rezultă astfel că $\tilde{Y}$ este dualul riemannian (în raport cu metrica $\bar{g}$) al 1-formei $\pi^*\alpha$.

(4): Fie α o 1-formă armonică pe N. Arătăm atunci că şi lift-ul ei, $\pi^*\alpha$, este 1-formă armonică. Cum lucrăm pe varietăţi compacte, are loc echivalenţa: o formă este armonică dacă şi numai dacă este închisă şi coînchisă. Deoarece d comută cu pull-back-ul, obţinem:

$$\mathrm{d}\pi^*\alpha = \pi^*\mathrm{d}\alpha = 0,$$

deci mai trebuie să verificăm $\delta\pi^*\alpha = 0$, ceea ce rezultă dacă arătăm relaţia de comutare: $\delta\pi^*\alpha = \pi^*\delta\alpha$ pentru 1-forme. Pentru aceasta considerăm pentru codiferenţială următoarea formulă:

$$\delta\alpha = -\sum_i \iota_{e_i}\nabla_{e_i}\alpha,$$

unde $\{e_i\}$ este o bază locală ortonormată şi ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii în raport cu care definim codiferenţiala. Alegem o astfel de bază locală ortonormată pe M faţă de metrica $\bar{g}$, formată din ξ şi $X_i = \tilde{Y}_i$ proiectabile, pentru $i = \overline{1, 2n}$. Observăm că, deoarece π este submersie riemanniană, $\{Y_i\}_{i=\overline{1,2n}}$ formează o bază locală ortonormată pe N faţă de metrica g. Atunci calculăm:

$$\delta(\pi^*\alpha) = -\sum_{i=1}^{2n} \iota_{X_i}\bar{\nabla}_{X_i}(\pi^*\alpha) - \iota_\xi\bar{\nabla}_\xi(\pi^*\alpha),$$

unde ultimul termen se anulează, deoarece aplicând formula generală: $(\bar{\nabla}_X\beta)(Y) = (\mathcal{L}_X\beta)(Y) - \beta(\bar{\nabla}_Y X)$ pentru $X = Y = \xi$ obţinem:

$$\iota_\xi\bar{\nabla}_\xi(\pi^*\alpha) = (\mathcal{L}_\xi(\pi^*\alpha))(\xi) - (\pi^*\alpha)(\bar{\nabla}_\xi\xi) = 0.$$

Pentru prima sumă obţinem:

$$\text{(3.12)}\quad \begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n}(\bar\nabla_{X_i}(\pi^*\alpha))(X_i) &= \sum_i [X_i(\pi^*\alpha(X_i)) - (\pi^*\alpha)(\bar\nabla_{X_i}X_i)]\\ &= \sum_i [\tilde Y_i(\pi^*\alpha(\tilde Y_i)) - (\pi^*\alpha)(\bar\nabla_{\tilde Y_i}\tilde Y_i)],\end{aligned}$$

iar în continuare, pentru fiecare $i = \overline{1, 2n}$, avem:

(3.13)

$$\begin{aligned}\tilde Y_i(\pi^*\alpha(\tilde Y_i)) = \tilde Y_i(\alpha(Y_i)\circ\pi) &= \mathrm{d}(\alpha(Y_i)\circ\pi)(\tilde Y_i) = \mathrm{d}(\alpha(Y_i))\circ\pi_*(\tilde Y_i)\\ &= \mathrm{d}(\alpha(Y_i))(Y_i)\circ\pi = Y_i(\alpha(Y_i))\circ\pi,\end{aligned}$$

(3.14)

$$(\pi^*\alpha)(\bar\nabla_{\tilde Y_i}\tilde Y_i) = \alpha(\pi_*(\bar\nabla_{\tilde Y_i}\tilde Y_i))\circ\pi \overset{(*)}{=} \alpha(\pi_*(\mathcal{H}\nabla_{\tilde Y_i}\tilde Y_i))\circ\pi = \alpha(\nabla_{Y_i}Y_i)\circ\pi,$$

unde pentru $(*)$ am folosit formula generală pentru submersii riemanniene[47]: $\bar\nabla_X Y = A_X Y + \mathcal{H}\nabla_X Y$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, pe care o aplicăm pentru $Y = X$ şi, ţinând cont că A este antisimetric, rezultă: $\bar\nabla_X X = \mathcal{H}\nabla_X X$.

Din (3.12), (3.13) şi (3.14) rezultă:

$$\text{(3.15)}\quad \begin{aligned}\delta(\pi^*\alpha) &= -\sum_{i=1}^{2n}(Y_i(\alpha(Y_i)))\circ\pi - \alpha(\nabla_{Y_i}Y_i)\circ\pi\\ &= -\sum_{i=1}^{2n}(\iota_{Y_i}\nabla_{Y_i}\alpha)\circ\pi = \delta\alpha\circ\pi = \pi^*(\delta\alpha).\end{aligned}$$

□

Observaţia 3.10. Din Propoziţia 3.4, (4), ştim că pullback-ul prin proiecţia fibrării Boothby-Wang al unei 1-forme armonice $\alpha \in \mathfrak{harm}^1(N)$ este armonică: $\pi^*\alpha \in \mathfrak{harm}^1(M)$. Dar este adevărat şi reciproc: conform Propoziţiei 2.5, orice 1-formă armonică β pe M este bazică: $\iota_\xi\beta = 0$, dar şi $\mathcal{L}_\xi\beta = 0$, deoarece ξ este câmp vectorial Killing. Rezultă astfel izomorfismul $\mathfrak{harm}^1(M) \cong \mathfrak{harm}^1(N)$, deci, în particular, primele numere Betti coincid: $b_1(M) = b_1(N)$.

3.3. **Descompunerea în cazul general.** Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki compactă şi $X \in \mathfrak{chol}(M)$. Conform Observaţiei 3.5, X se descompune unic astfel: $X = \eta(X)\xi + X^{\mathcal{D}}$ şi în continuare presupunem $X = X^{\mathcal{D}}$. Avem nevoie de următorul rezultat:

Lema 3.1. *Dacă X este un câmp vectorial bazic, adică $X \in \xi^\perp$ şi $[X, \xi] = 0$, atunci $\alpha := X^\flat$ este o 1-formă bazică şi $\mathrm{d}\alpha$ este o 2-formă de tipul $(1,1)$.*

---

[47] A este unul din tensorii lui O'Neill pentru submersii riemanniene şi este definit prin formula: $A_X Y = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{V}Y + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{H}Y$, unde $\mathcal{H}Y$ şi $\mathcal{V}Y$ reprezintă componenta orizontală, respectiv verticală a câmpului vectorial Y.

Demonstraţie. Verificăm mai întâi că α este bazică: $\iota_\xi \alpha = g(X, \xi) = 0$, deoarece X este orizontal, iar pentru derivata Lie avem:

$$(\mathcal{L}_\xi \alpha)(Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) + g([\xi, X], Y) = 0.$$

Pentru ca $\mathrm{d}\alpha$ să fie de tipul $(1,1)$ trebuie ca pentru orice $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ să aibă loc:

$$\mathrm{d}\alpha(\phi Y, \phi Z) = \mathrm{d}\alpha(Y, Z).$$

Dacă Y sau Z sunt colineare ξ, atunci egalitatea este verificată, deoarece $\iota_\xi \mathrm{d}\alpha = \mathcal{L}_\xi \alpha - \mathrm{d}\iota_\xi \alpha = 0$.

Dacă $Y, Z \in \xi^\perp$ se obţine:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\alpha(\phi Y, \phi Z) &\overset{(a)}{=} g(\nabla_{\phi Y} X, \phi Z) - g(\phi Y, \nabla_{\phi Z} X) \\ &\overset{(b)}{=} g(m\xi + \phi \nabla_Y X, \phi Z) - g(\phi Y, m'\xi + \phi \nabla_Z X) \\ &= g(\phi \nabla_Y X, \phi Z) - g(\phi Y, \phi \nabla_Z X) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_Z X) \overset{(a)}{=} 2\mathrm{d}\alpha(Y, Z), \end{aligned}$$

unde pentru (a) am aplicat următoarea formulă:

$$\mathrm{d}\alpha(Y, Z) = \frac{1}{2}[g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_Z X)],$$

care rezultă direct din definiţia derivatei exterioare, iar pentru (b) folosim următorul rezultat din [BS], Propoziţia 3.3: pe o varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, dacă $X \in \mathfrak{chol}(M)$, atunci $\phi \circ \nabla X - \nabla X \circ \phi$ este colinear cu ξ, adică pentru orice $Y \in \xi^\perp$ are loc: $\phi(\nabla_Y X) - \nabla_{\phi Y} X = m\xi$, unde m este un scalar care depinde de Y. $\square$

Descompunerea unui câmp vectorial c-olomorf va rezulta, ca şi în cazul Kähler, pornind de la descompunerea Hodge a 1-formei duale. Astfel, în continuare, arătăm că pentru $\alpha = X^\flat$, cu $X \in \mathfrak{chol}(M)$ şi $X \in \xi^\perp$, are loc următoarea descompunere transversă:

$$\alpha = \alpha_H + \mathrm{d}_\mathrm{B} f + \phi\, \mathrm{d}_\mathrm{B} h,$$

unde $f, h \in \Omega^0_B(M)$ şi α_H este o 1-formă bazică armonică.

Fixăm un câmp vectorial c-olomorf X pe M şi $\alpha = X^\flat$, 1-forma sa duală, care, conform Lemei 3.1 este bazică şi are diferenţiala de tipul $(1,1)$. Aplicând pentru α descompunerea Hodge transversă (2.26), obţinem:

$$\alpha = \alpha_H + \mathrm{d}_\mathrm{B} \varphi + \delta_B \gamma, \tag{3.16}$$

unde $\alpha_H \in \mathfrak{harm}^1_B(M) = \mathfrak{harm}^1(M)$, $\varphi \in \Omega^0_B(M)$ şi $\gamma \in \Omega^2_B(M)$.

Aplicăm pentru 2-forma $\mathrm{d}\alpha$, care este reală, închisă, bazică şi de tipul $(1,1)$, Lema $\partial\bar{\partial}$ transversă 2.1 (sub forma ei $\mathrm{d}_\mathrm{B}\mathrm{d}^\mathrm{c}_\mathrm{B}$, *cf.* Observaţia 2.8) şi rezultă că există o funcţie bazică h astfel încât $\mathrm{d}_\mathrm{B}\, \alpha = \mathrm{d}_\mathrm{B}\mathrm{d}^\mathrm{c}_\mathrm{B}\, h$, deci $\mathrm{d}_\mathrm{B}(\alpha - \mathrm{d}^\mathrm{c}_\mathrm{B}\, h) = 0$ şi atunci, din descompunerea Hodge, există $f \in \Omega^0_B(M)$ astfel încât $\alpha - \mathrm{d}^\mathrm{c}_\mathrm{B}\, h = \alpha'_H + \mathrm{d}_\mathrm{B} f$, unde $\alpha'_H \in \mathfrak{harm}^1_B(M)$:

$$\alpha = \alpha'_H + \mathrm{d}_\mathrm{B} f + \phi\, \mathrm{d}_\mathrm{B} h. \tag{3.17}$$

Comparând această descompunere cu cea Hodge dată de (3.16) şi ţinând cont de ortogonalitatea dintre spaţiile respective, şi anume[48]:

$$\mathrm{im}(\mathrm{d_B}) \perp \mathfrak{harm}^1_B, \quad \mathrm{im}(\delta_B) \perp \mathfrak{harm}^1_B, \quad \mathrm{im}(\phi\, \mathrm{d_B}) \perp \mathfrak{harm}^1_B,$$

rezultă:

$$\underbrace{\alpha'_H - \alpha_H}_{\in \mathfrak{harm}^1_B} = \underbrace{\mathrm{d_B}(\varphi - f) + \delta_B \gamma + \phi\, \mathrm{d_B}\, h}_{\in (\mathfrak{harm}^1_B)^\perp},$$

deci $\alpha'_H = \alpha_H$.

Unicitatea descompunerii: presupunem că există două astfel de descompuneri, cum partea armonică am văzut că este aceeaşi, rezultă că există funcţiile bazice f, f_1, h, h_1 astfel încât $\alpha = \alpha_H + \mathrm{d_B}\, f + \phi\, \mathrm{d_B}\, h$ şi $\alpha = \alpha_H + \mathrm{d_B}\, f_1 + \phi\, \mathrm{d_B}\, h_1$, deci $\mathrm{d_B}(f - f_1) = \phi\, \mathrm{d_B}(h_1 - h)$. Deoarece acestea sunt ortogonale (*cf.* Lema 3.2, (*ii*)) rezultă $\mathrm{d_B}(f - f_1) = \mathrm{d_B}(h - h_1) = 0$ şi, cum funcţiile sunt bazice, aceasta implică că f şi f_1, respectiv h şi h_1, diferă printr-o constantă aditivă. Dacă impunem condiţiile de normalizare: $\int_M f\, vol_g = \int_M h\, vol_g = 0$, atunci f şi h sunt unic determinate.

A mai rămas să arătăm:

Lema 3.2. *Cu notaţiile precedente, au loc următoarele relaţii de ortogonalitate:*

(i) $\mathrm{im}(\phi\, \mathrm{d_B}) \perp \mathfrak{harm}^1_B(M)$

(ii) $\mathrm{d_B}(\Omega^0(M)) \perp \phi\, \mathrm{d_B}(\Omega^0(M))$

Demonstraţie. (i) Fie $\alpha \in \mathfrak{harm}^1_B(M)$, $\beta \in \Omega^0_B(M)$.

$$\int_M \langle \alpha, \phi\, \mathrm{d_B}\, \beta \rangle vol_g = -\int_M \langle \phi\alpha, \mathrm{d_B}\, \beta \rangle vol_g = -\int_M \langle \delta_B \phi\alpha, \beta \rangle vol_g = 0,$$

deoarece ϕ comută cu Δ_B, deci $\phi\alpha$ este armonică şi atunci este coînchisă: $\delta_B \phi\alpha = 0$.

(ii) Fie $f, h \in \Omega^0_B(M)$.

$$\int_M \langle \mathrm{d_B}\, f, \phi\, \mathrm{d_B}\, h \rangle vol_g = \int_M \langle f, \delta_B\, \mathrm{d^c_B}\, h \rangle vol_g = -\int_M \langle f, \mathrm{d^c_B}\, \delta_B h \rangle vol_g = 0,$$

unde pentru ultima egalitate am folosit faptul că δ_B şi $\mathrm{d^c_B}$ anticomută, iar $\delta_B h = 0$, deoarece h este funcţie. $\square$

Am obţinut astfel descompunerea (3.17) pentru $\alpha = X^\flat$, unde $X \in \xi^\perp$ şi $X \in \mathfrak{chol}(M)$:

$$\alpha = \alpha_H + \mathrm{d_B}\, f + \phi\, \mathrm{d_B}\, h$$

şi care, prin dualitatea dată de metrica g, corespunde următoarei descompuneri a câmpului vectorial X:

$$X = X_H + \mathrm{grad}\, f + \phi\, \mathrm{grad}\, h,$$

[48]Primele două relaţii de ortogonalitate le ştim din descompunerea Hodge (2.26), iar pe ultima o demonstrăm în Lema 3.2.

unde $X_H = \alpha_H^{\#}$. Pentru aceasta mai trebuie să verificăm $\phi\,\mathrm{d_B}\,h = (\phi\,\mathrm{grad}\,h)^\flat$, adică:

$$\phi\,\mathrm{d_B}\,h(Y) = g(\phi\,\mathrm{grad}\,h, Y), \quad (\forall) Y \in \mathcal{X}(M).$$

Dacă $Y = \xi$ ambii termeni sunt nuli, iar dacă $Y \in \xi^\perp$, obţinem:

$$g(\phi\,\mathrm{grad}\,h, Y) = -g(\mathrm{grad}\,h, \phi Y) = -dh(\phi Y) = (\phi\,\mathrm{d_B}\,h)(Y).$$

Rezumând, am obţinut următorul rezultat:

Propoziţia 3.5. *Pe o varietate Sasaki compactă $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, un câmp vectorial c-olomorf X are următoarea descompunere unică:*

$$X = \eta(X)\xi + X_H + \mathrm{grad}\,f + \phi\,\mathrm{grad}\,h,$$

unde f şi h sunt funcţii bazice cu $\int_M f\,vol_g = \int_M h\,vol_g = 0$ şi 1-forma duală a lui X_H este armonică: $X_H^\flat \in \mathfrak{harm}^1_B(M) = \mathfrak{harm}^1(M)$.

4. Metrici Sasaki extremale

Înainte de a defini metricile Sasaki extremale prin analogie cu cele din geometria Kähler, prezentăm pe scurt motivaţia introducerii metricilor Kähler extremale, definiţia lor şi caracterizarea echivalentă, care stabileşte că acestea sunt metricile Kähler a căror curbură scalară este potenţial de olomorfie. Folosim această caracterizare pentru a da o primă definiţie a metricilor Sasaki extremale în Secţiunea 4.1 (după ce introducem pentru varietăţile Sasaki noţiunea corespunzătoare celei de potenţial de olomorfie), urmând apoi să stabilim echivalenţa cu abordarea variaţională în Teorema 4.2.

Metrici Kähler extremale. Aceste metrici au fost introduse în [Cal] de E. Calabi, ca fiind punctele critice ale funcţionalei ce îi poartă numele şi care este dată de integrarea pătratului curburii scalare, definită pe mulţimea metricilor Kähler dintr-o clasă Kähler fixată. Motivaţia principală a introducerii acestor metrici a fost de a găsi reprezentanţi canonici într-o clasă Kähler dată[49].

Fie (M, J) o varietate complexă compactă de dimensiune reală $2m$ şi Ω un element fixat al spaţiului de Rham $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ al lui M. Notăm cu $\mathcal{M}(\Omega)$ mulţimea tuturor metricilor Kähler compatibile cu J, a căror formă Kähler aparţine lui Ω şi presupunem că aceasta este o clasă Kähler, adică mulţimea $\mathcal{M}(\Omega)$ este nevidă. Din Lema $\mathrm{dd^c}$ rezultă că, pentru orice două elemente ω_0 şi ω din $\mathcal{M}(\Omega)$, există o funcţie reală ϕ unic determinată până la o constantă aditivă, astfel încât să aibă loc:

$$\omega = \omega_0 + \mathrm{dd^c}\phi.$$

Cu alte cuvinte, pentru orice alegere a unui punct bază ω_0, $\mathcal{M}(\Omega)$ se identifică cu submulţimea lui $C^\infty(M, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ formată din clasele $[\phi]$ pentru care forma $\omega_0 + \mathrm{dd^c}\phi$ este pozitiv definită (aici $[\phi]$ este clasa lui ϕ modulo o constantă aditivă).

[49] Eugenio Calabi a introdus metricile Kähler extremale în 1982 cu scopul de a lărgi clasa metricilor Kähler-Einstein (faptul că orice metrică Kähler-Einstein este Kähler extremală rezultă din echivalenţa stabilită în Teorema 4.1, pentru că orice metrică Einstein în dimensiune mai mare ca 3 are curbura scalară constantă, deci este potenţial de olomorfie), deoarece există varietăţi a căror clasă Chern este pozitivă şi care nu admit nici o metrică Kähler-Einstein. Din păcate, existenţa unei metrici Kähler extremale pe o varietate complexă compactă impune anumite restricţii asupra grupului de automorfisme: dacă nu este discret, trebuie să conţină un subgrup compact conex netrivial, existând astfel varietăţi care nu admit nici o metrică extremală (un exemplu se obţine prin eclatarea lui $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ în punctele $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, $(0, 1)$, (∞, ∞), varietate pentru care componenta identităţii a grupului de automorfisme este grupul aditiv $\mathbb{C}$). După aceea s-au găsit şi alte obstrucţii la existenţa metricilor Kähler extremale, de exemplu invariantul Futaki, obstrucţia Calabi-Lichnerowicz-Matsushima, dar problema determinării existenţei sau nu a metricilor Kähler extremale reprezentând o clasă dată rămâne deschisă.

Definiţia 4.1. Fie (M, J) o varietate complexă compactă, pe care fixăm o clasă de coomologie $\Omega \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$. *Funcţionala Calabi* este definită pe $\mathcal{M}(\Omega)$ astfel:

$$C(g) = \int_M scal_g^2 \, vol_g. \tag{4.1}$$

Definiţia 4.2. O metrică Kähler pe varietatea compactă complexă (M, J) se numeşte *extremală* dacă este punct critic al funcţionalei Calabi C pe spaţiul corespunzător $\mathcal{M}(\Omega)$.

Exemplul 4.1. Exemple de metrici Kähler extremale care nu au curbura scalară constantă sunt obţinute din construcţia lui Calabi în [Cal]. Varietăţile considerate sunt fibrări complexe în drepte proiective peste spaţiul proiectiv complex $(n-1)$-dimensional, $\mathbb{C}P^{n-1}$, şi se arată că există o unică metrică Kähler extremală în fiecare clasă de coomologie de Rham a unei metrici Kähler. Pentru $n = 2$ se obţin exemple de astfel de metrici (Kähler extremale de curbură scalară neconstantă) pe suprafeţele Hirzebruch F_k.

Calculând prima derivată a funcţionalei Calabi se demonstrează următoarea echivalenţă[50]:

Teorema 4.1. *O metrică Kähler g pe o varietate complexă compactă (M, J) este extremală dacă şi numai dacă curbura ei scalară, $scal_g$, este potenţial de olomorfie*[51].

4.1. **Potenţial de olomorfie. O primă definiţie a metricilor Sasaki extremale.** Introducem mai întâi noţiunea de potenţial de olomorfie pe o varietate Sasaki, prin analogie cu cea de pe varietăţile Kähler, impunând în plus condiţia de invarianţă de-a lungul direcţiei câmpului vectorial caracteristic ξ. Pentru aceasta folosim noţiunea de contact-olomorfie introdusă în Secţiunea 3, Definiţia 3.1.

Definiţia 4.3. Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki. O funcţie f pe M se numeşte *potenţial de olomorfie* dacă $\operatorname{grad} f$ este câmp vectorial c-olomorf şi $\xi(f) = 0$, adică f este funcţie bazică.

Observaţia 4.1. Tot prin analogie cu geometria Kähler, ne va interesa în special condiţia ca funcţia dată de curbura scalară a metricii Sasaki să fie potenţial de olomorfie. În acest caz particular, funcţia este deja bazică, deoarece ξ este câmp vectorial Killing, deci invariază curbura scalară: $\xi(scal) = 0$.

[50] Această teoremă a fost demonstrată de Calabi în [Cal], iar o demonstraţie detaliată este prezentată şi în [G].

[51] Reamintim că o funcţie reală f pe o varietate Kähler (M, g, J, ω) se numeşte *potenţial (real) de olomorfie* dacă gradientul său este un câmp vectorial real olomorf (*i.e.* $\mathcal{L}_{\operatorname{grad} f} J = 0$). Pentru o funcţie reală f pe o varietate Kähler (M, g, J, ω), are loc echivalenţa: $\operatorname{grad} f$ este câmp vectorial real olomorf dacă şi numai dacă $J \operatorname{grad} f$ este câmp vectorial Killing (în raport cu g).

La fel ca în cazul Kähler, unde un potenţial de olomorfie asigură existenţa unei simetrii infinitezimale, şi pe o varietate Sasaki obţinem simetrii infinitezimale, dar numai transverse. Mai precis:

Propoziţia 4.1. *Pe o varietate Sasaki* $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$*, pentru orice funcţie bazică* f*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) $\operatorname{grad} f$ *este c-olomorf,* i.e. f *este potenţial de olomorfie;*

(2) $\phi(\operatorname{grad} f)$ *este câmp vectorial Killing transvers, adică are loc:*

$$(\mathcal{L}_{\phi(\operatorname{grad} f)} g)|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}} = 0.$$

Demonstraţie. Folosim rezultatul din [BS], Propoziţia 3.4, potrivit căreia, pe o varietate de contact metrică, oricare două dintre următoarele afirmaţii o implică pe a treia:

(i) $(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 0$, pentru orice $Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$;

(ii) $\iota_X \mathrm{d}\eta$ este o formă închisă;

(iii) X este câmp vectorial olomorf.

Aceste echivalenţe sunt de fapt o consecinţă imediată a formulei: $(\mathcal{L}_X g)(\phi Y, Z) = (\mathcal{L}_X \mathrm{d}\eta)(Y, Z) - g((\mathcal{L}_X \phi)Y, Z)$. Pentru un câmp vectorial de forma $\phi \operatorname{grad} f$, condiţia (ii) este întotdeauna îndeplinită:

$$\mathcal{L}_{\phi \operatorname{grad} f}(\mathrm{d}\eta) = \mathrm{d}(\iota_{\phi \operatorname{grad} f} \mathrm{d}\eta) = -\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0,$$

unde penultima egalitate rezultă din faptul că $\operatorname{grad} f$ este orizontal (*cf.* Observaţia 3.4):

$$\mathrm{d}\eta(\phi \operatorname{grad} f, \cdot) = -g(\operatorname{grad} f, \cdot) + \eta(\operatorname{grad} f)\eta(\cdot) = -\mathrm{d}f(\cdot).$$

Funcţia f este potenţial de olomorfie dacă şi numai dacă $\phi \operatorname{grad} f$ este câmp vectorial c-olomorf (aceasta rezultă din proprietatea de ϕ-invarianţă a noţiunii de c-olomorfie). Aplicând rezultatul menţionat mai sus pentru $X = \phi \operatorname{grad} f$, echivalenţa din enunţ rezultă din $(i) \Leftrightarrow (iii)$, deoarece (ii) este deja satisfăcută. □

Acum putem enunţa o primă definiţie a metricilor Sasaki extremale[52]:

Definiţia 4.4. Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki. Metrica g se numeşte *Sasaki extremală* dacă curbura ei scalară, $scal_g$, este potenţial de olomorfie.

Exemplul 4.2. Direct din definiţie rezultă că orice varietate Sasaki care are curbura scalară constantă (în particular orice varietate Sasaki-Einstein) este extremală, dar ne interesează mai ales alte exemple de varietăţi Sasaki extremale (*cf.* Exemplul 4.3).

Avantajul acestei definiţii este acela că ne permite să analizăm legătura cu metricile Kähler extremale, prin cele două construcţii: fibrarea Boothby-Wang (în cazul unei structuri Sasaki quasi-regulate) şi conul metric, după cum vom vedea în continuare.

[52] Denumirea de "metrică extremală" va fi justificată de Teorema 4.2.

4.2. **Corespondenţa dintre metricile extremale Kähler şi Sasaki.**

Cazul regulat. În această secţiune prezentăm corespondenţa prin fibrarea Boothby-Wang dintre metricile Sasaki extremale regulate şi cele Kähler extremale.

Considerăm o structură Sasaki regulată $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ şi proiecţia fibrării Boothby-Wang, $\pi : M \to N$. Avem nevoie de corespondenţa dintre câmpurile vectoriale c-olomorfe pe o varietate Sasaki regulată şi cele olormorfe de pe varietate Kähler cât, stabilită în Propoziţia 3.3, precum şi de legătura între gradienţi dată de Propoziţia 3.4:

$$\mathrm{grad}\, \tilde{f} = \widetilde{\mathrm{grad}\, f}, \quad (\forall) f \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

În particular, pentru funcţia dată de curbura scalară, obţinem:

$$\widetilde{\mathrm{grad}\, scal_N} = \mathrm{grad}\, \widetilde{scal_N} = \mathrm{grad}(scal_N \circ \pi) = \mathrm{grad}(scal_M), \tag{4.2}$$

unde, pentru ultima egalitate, am folosit următoarea relaţie dintre curburile scalare:

$$scal_M = scal_N \circ \pi - 2n, \tag{4.3}$$

care rezultă din (2.24), ţinând cont că, în cazul regulat, structura transversă coincide cu cea a varietăţii cât (altfel, (4.3) se poate calcula şi direct din formulele pentru submersii riemanniene).

Folosind cele menţionate mai sus obţinem următoarele echivalenţe:
$scal_M$ este potenţial de olomorfie
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{grad}(scal_M)$ este c-olomorf pe N (*cf.* Observaţia 4.1)
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{grad}(scal_N)$ este olomorf pe M (*cf.* Propoziţia 3.3 şi (4.2))
$\Longleftrightarrow$ $scal_N$ este potenţial de olomorfie.

Rezumând, am obţinut[53]:

Propoziţia 4.2. *Are loc următoarea echivalenţă:*
$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ *este Sasaki compactă regulată extremală* $\Longleftrightarrow$ *varietatea cât* (N, ω, h, J) *este Kähler compactă extremală.*

Exemplul 4.3. Această echivalenţă ne dă o metodă generală de a obţine metrici Sasaki extremale pornind de la cele Kähler extremale. În acest fel obţinem o metrică Sasaki extremală pe $S^2 \times S^3$: conform Exemplului 1.6, $S^2 \times S^3$ este spaţiul total al unei fibrări Boothby-Wang peste prima suprafaţă Hirzebruch, care este înzestrată cu metrica Kähler extremală construită de Calabi. Metrica Sasaki extremală astfel obţinută nu are curbura scalară constantă datorită relaţiei (4.3) şi a faptului că metrica Kähler de la care am pornit nu are această proprietate (*cf.* [Cal]).

[53] Notaţiile sunt aceleaşi cu cele considerate în Secţiunea 1.2.

Legătura cu conul Kähler. Considerăm conul Kähler[54] al varietăţii Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$:

$$(C(M) = M \times \mathbb{R}^+, \bar{g} = dr^2 + r^2 g, J, \omega = \mathrm{d}(r^2\eta)),$$

şi proiecţia pe primul factor, $p : M \times \mathbb{R}^+ \to M$.

Vrem să studiem legătura dintre proprietatea de extremalitate a metricii Sasaki g şi cea a metricii con $\bar{g}$. Arătăm că, de această dată, este adevărată numai una dintre implicaţii: dacă $C(M)$ este varietate Kähler extremală, atunci rezultă că M este Sasaki extremală. Reciproc, se obţine numai o condiţie de ”extremalitate transversă”[55] (sensul precis al acestei afirmaţii fiind dat de Propoziţia 4.5).

Avem nevoie de următoarele formule care stabilesc relaţia dintre curburile scalare, respectiv dintre gradienţii lor:

Lema 4.1. *Cu notaţiile de mai sus, au loc egalităţile:*

$$\overline{scal} = \frac{1}{r^2} scal \circ p - 2n(2n+1)\frac{1}{r^2}. \tag{4.4}$$

$$\mathrm{grad}(\overline{scal}) = \frac{1}{r^4}\,\mathrm{grad}(scal) - \frac{2}{r^4}(scal \circ p - 2n(2n+1))\psi. \tag{4.5}$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi cum se obţine (4.4) din formulele generale pentru produsele twistate (*cf.* [O'N], Cap. 7). În general, pentru un produs twistat[56] de varietăţi riemanniene:

$$(B \times_f F, g_{B\times_f F} = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)),$$

unde f este o funcţie strict pozitivă pe B, iar π şi σ sunt proiecţiile pe primul, respectiv al doilea factor, există formule explicite care exprimă geometria lui $B \times_f F$ în funcţie de f şi geometriile lui B şi F. Dintre acestea, folosim următoarea expresie a curburii scalare:

(4.6)
$$scal_{B\times_f F} = scal_B \circ \pi + \frac{1}{f^2} scal_F \circ \sigma - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\rangle}{f^2},$$

unde d este dimensiunea fibrei: $d = \dim F$.

---

[54] Folosim aceleaşi notaţii ca în Secţiunea 1.1, unde am explicitat această construcţie; în particular câmpul lui Euler este $\psi = r\frac{\partial}{\partial r}$. De asemenea, menţionăm că identificăm câmpurile vectoriale de pe M cu cele induse pe $C(M)$.

[55] Redescoperim, de fapt, una dintre implicaţiile echivalenţei pe care tocmai am demonstrat-o în cazul regulat, şi anume că structura transversă este extremală, dar acum o obţinem în cadrul mai general al unei structuri Sasaki oarecare.

[56] Produsul twistat (”warped product”) este o generalizare a produsului riemannian, în care metrica produs este modificată omotetic pe fiecare fibră $\{p\}\times F$. Metrica twistată este caracterizată de următoarele cerinţe: $(\forall)q \in F$, $\pi|_{B\times\{q\}}$ este izometrie; $(\forall)p \in B$, $\sigma|_{\{p\}\times F}$ este omotetie cu factorul de scalare $\frac{1}{f(p)}$ şi $(\forall)(p, q) \in B \times F$, foaia $B \times \{q\}$ şi fibra $\{p\} \times F$ sunt ortogonale.

În cazul nostru: $C(M) = M \times_r \mathbb{R}^+$, unde baza este $\mathbb{R}^+$, fibra este M, iar funcţia de twistare este dată de coordonata de pe semidreapta reală: $f = r$. Cum $dim(B) = dim(\mathbb{R}^+) = 1$, rezultă $scal_B = 0$, iar $d = dim(F) = dim(M) = 2n+1$. Înlocuind acestea în (4.6), expresia curburii scalare se simplifică şi obţinem (4.4), deoarece $\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\rangle = 1$ şi $\Delta f = 0$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(r) = r$).

Pentru a stabili relaţia (4.5) dintre gradienţi, folosim expresia generală a gradientului în funcţie de coeficienţii metricii într-un sistem local de coordonate $\{x_i\}$:

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{4.7}$$

unde $(g^{ij})_{i,j}$ este inversa matricei dată de coeficienţii metricii g.

Considerând pe $C(M)$ coordonatele locale de forma $\{x_i, r\}_{i=1,\dots,dim(M)}$, obţinem în baza corespunzătoare $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial r}\}$ următoarea exprimare matriceală a metricii:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} r^2 g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci inversa este $\bar{g}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} g^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi din (4.7) şi (4.4) rezultă (4.5) astfel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\overline{scal}) &= \frac{1}{r^2} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial(\overline{scal})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{scal})}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r^4} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial(scal)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{2}{r^3}(scal \circ p - 2n(2n+1)) \frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r^4}\, \mathrm{grad}(scal) - \frac{2}{r^3}(scal \circ p - 2n(2n+1)) \frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r^4}\, \mathrm{grad}(scal) - \frac{2}{r^4}(scal \circ p - 2n(2n+1))\psi.
\end{aligned}$$

□

Ca şi în cazul regulat, avem nevoie de corespondenţa dintre câmpurile vectoriale c-olomorfe pe M şi cele olomorfe pe $C(M)$ (*cf.* [BS], Propoziţia 3.2):

Propoziţia 4.3. *Fie $C(M)$ conul unei varietăţi Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ şi $X \in \mathcal{X}(M)$. Atunci $X + f\psi \in \mathcal{X}(C(M))$, unde f este o funcţie arbitrară pe $C(M)$, este olomorf dacă şi numai dacă:*

(1) $(\mathcal{L}_X \phi)(Y) = Y(f)\xi, (\forall) Y \in \mathcal{X}(M)$.
(2) $[X, \xi] = -r\frac{\partial f}{\partial r}\xi = -\psi(f)\xi$.

În particular, dacă $X + f\psi$ este un câmp vectorial olomorf pe con, atunci X este c-olomorf pe M.

Demonstraţie. Printr-un calcul direct obţinem următoarele formule:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{X+f\psi}J)(Y) =&[(X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) - (\phi Y)(f) - \eta(Y)\psi(f)]\psi \\
&+ (\mathcal{L}_X\phi)(Y) - Y(f)\xi, \quad (\forall)Y \in \mathcal{X}(M).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$
(\mathcal{L}_{X+f\psi}J)(\psi) = \xi(f)\psi - [X,\xi] - \psi(f)\xi. \tag{4.9}
$$

Condiţia ca $X + f\psi$ să fie olomorf este echivalentă cu anularea ambelor expresii, iar prin proiecţie pe TM, respectiv pe direcţia câmpului lui Euler, obţinem următoarele condiţii, pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$:

(i) $(\mathcal{L}_X\phi)(Y) = Y(f)\xi$;
(ii) $[X,\xi] = -\psi(f)\xi$;
(iii) $\xi(f) = 0$;
(iv) $X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) - (\phi Y)(f) - \eta(Y)\psi(f) = 0$.

Mai trebuie să arătăm că (iii) şi (iv) sunt consecinţe ale primelor două relaţii. Din (i) şi Observaţia 3.3, rezultă că X este c-olomorf pe M, ceea ce implică $(\mathcal{L}_X\phi)(\xi) = 0$; pe de altă parte, tot din (i), considerând $Y = \xi$, avem: $(\mathcal{L}_X\phi)(\xi) = \xi(f)\xi$, rezultând astfel (iii).

Pentru a obţine (iv), aplicăm (i) înlocuind Y cu ϕY şi ţinem cont că factorul de colinearitate cu ξ al derivatei Lie în direcţia lui X, tot conform Observaţiei 3.3, este egal cu $\eta([X,\phi Y])$:

$$
\begin{aligned}
(\phi Y)(f) &= \eta([X, -Y + \eta(Y)\xi] = X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) + \eta(Y)\eta([X,\xi]) \\
&\overset{(ii)}{=} X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) - \eta(Y)\psi(f).
\end{aligned}
$$

□

Observaţia 4.2. Pe o varietate Sasaki $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, gradientul unei funcţii invariate de ξ comută cu ξ. Aceasta se obţine direct din formula lui Cartan şi din faptul că ξ este un câmp Killing:

$$
\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}f = (\mathcal{L}_\xi g)(\mathrm{grad}\, f, \cdot) + g(\mathcal{L}_\xi(\mathrm{grad}\, f), \cdot),
$$

$$
\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}f = \iota_\xi d^2 f + \mathrm{d}\iota_\xi \mathrm{d}f = \mathrm{d}(\xi(f)) = 0,
$$

de unde, din nedegenerarea lui g, rezultă $0 = \mathcal{L}_\xi(\mathrm{grad}\, f) = [\xi, \mathrm{grad}\, f]$. În particular, pentru curbura scalară (care, conform Observaţiei 4.1, este o funcţie invariată de ξ), rezultă că ξ comută cu $\mathrm{grad}(scal)$.

Corolarul 4.1. *Fie f, h funcţii pe $C(M)$, astfel încât h nu se anulează nicăieri şi depinde numai de coordonata semidreptei reale $\mathbb{R}^+$. Fie X un câmp care comută cu ξ. Dacă $h \cdot (X + f\psi)$ este un câmp vectorial olomorf pe $C(M)$, atunci X este un câmp vectorial c-olomorf pe M.*

Demonstrație. Pentru $Y \in \mathcal{X}(M)$ are loc:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_{h(X+f\psi)}J)(Y) = [h(X+f\psi), JY] - J[h(X+f\psi), Y] \\ &= h(\mathcal{L}_{X+f\psi}J)(Y) - (JY)(h)(X+f\psi) + Y(h)J(X+f\psi) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pentru $Y \in \mathcal{D} = \xi^{\perp}$, $JY = \phi Y - \eta(Y)\psi = \phi Y \in \mathcal{D}$ şi, cum h depinde numai de coordonata r, rezultă $Y(h) = 0$, $(JY)(h) = 0$, deci din (4.10) avem:

$$(\mathcal{L}_{X+f\psi}J)(Y) = 0, (\forall) Y \in \mathcal{D},$$

iar din (4.8), prin proiecţie pe subfibrarea $\mathcal{D}$, rezultă $(\mathcal{L}_X\phi)(Y) = 0, (\forall)Y \in \mathcal{D}$. Pentru $Y = \xi$, din faptul că X comută cu ξ, obţinem:

$$(\mathcal{L}_X\phi)(\xi) = [X, \phi\xi] - \phi([X,\xi]) = 0.$$

Rezultă astfel că $(\mathcal{L}_X\phi)(Y) \in \langle\xi\rangle$, $(\forall)Y \in \mathcal{X}(M)$, deci X este un câmp vectorial c-olomorf. $\square$

O consecinţă imediată a acestor calcule este:

Propoziţia 4.4. *Dacă $\bar{g} = dr^2 + r^2 g$ este metrică Kähler extremală pe conul $C(M)$, atunci g este metrică Sasaki extremală pe M.*

Demonstrație. Deoarece $\mathrm{grad}(\overline{scal})$ este câmp vectorial olomorf şi, conform (4.5), se descompune astfel:

$$\mathrm{grad}(\overline{scal}) = \frac{1}{r^4}[\mathrm{grad}(scal) - 2(scal \circ p - 2n(2n+1))\psi],$$

iar din Observaţia 4.2 sunt îndeplinite ipotezele Corolarului 4.1, pentru $h = \frac{1}{r^4}$, rezultă că $\mathrm{grad}(scal)$ este un câmp vectorial c-olomorf, deci g este metrică Sasaki extremală. $\square$

Reciproc, arătăm că este adevărat numai un rezultat parţial. Pentru aceasta avem nevoie de:

Lema 4.2. *Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki, $(C(M), \bar{g})$ conul ei Kähler şi f o funcţie pe M astfel încât $X = \mathrm{grad}\, f$ comută cu ξ şi aparţine subfibrării $\mathcal{D}$. Dacă X este c-olomorf, atunci $X - 2f\psi \in \mathcal{X}(C(M))$ este olomorf.*

Demonstrație. Pentru a arăta că $X - 2f\psi$ este olomorf aplicăm criteriul dat de Propoziţia 4.3, deci trebuie să verificăm condiţiile:

(1) $(\mathcal{L}_X\phi)(Y) = -Y(2f)\xi, (\forall)Y \in \mathcal{X}(M)$.
(2) $[X, \xi] = \psi(2f)\xi$.

Cum X este c-olomorf, avem: $(\mathcal{L}_X\phi)(Y) = \eta([X, \phi Y])\xi$, pentru orice $Y \in \mathcal{X}(M)$. Astfel, pentru a obţine (1), este suficient să arătăm egalitatea de 1-forme:

$$\eta([X, \phi\cdot]) = -2\mathrm{d}f,$$

care rezultă din condiţia Sasaki (1.2), $[\phi, \phi](X, Y) = -2\mathrm{d}\eta(X, Y)\xi$:

$$[\phi X, \phi Y] + \phi^2[X, Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] = -2\mathrm{d}\eta(X, Y)\xi.$$

Înlocuind în această formulă pe X cu ϕX şi ţinând cont că $\phi^2 X = -X$ (deoarece $X \in \mathcal{D}$), obţinem:

$$[-X, \phi Y] + \phi^2[\phi X, Y] - \phi[-X, Y] - \phi[\phi X, \phi Y] = -2\mathrm{d}\eta(\phi X, Y)\xi,$$

şi, aplicând în continuare η, rezultă:

$$\eta([X, \phi Y]) = 2\mathrm{d}\eta(\phi X, Y) = -2g(X, Y) = -2\mathrm{d}f(Y).$$

Condiţia (2) rezultă direct din ipoteza $[X, \xi] = 0$ şi din faptul că f este o funcţie pe M: $\psi(f) = r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$. □

Propoziţia 4.5. *Dacă* $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ *este o varietate Sasaki extremală şi* $(C(M), \bar{g})$ *este conul Kähler corespunzător, atunci* $\mathrm{grad}(\overline{scal})$ *este un câmp vectorial "olomorf pe direcţiile transverse", în sensul că are loc:*

$$(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}(\overline{scal})} J)|_{\mathcal{D}} = 0.$$

Demonstraţie. Aplicăm Lema 4.2 pentru $f = scal - 2n(2n+1)$ cu $X = \mathrm{grad}\, f = \mathrm{grad}(scal)$, deoarece sunt îndeplinite ipotezele:

- $X = \mathrm{grad}(scal)$ comută cu ξ (*cf.* Observaţia 4.2);
- $X \in \mathcal{D}$: $g(X, \xi) = \mathrm{d}f(\xi) = \xi(scal) = 0$ (*cf.* Observaţia 4.1).

Astfel, câmpul vectorial

$$X - 2f\psi = \mathrm{grad}(scal) - 2(scal - 2n(2n+1))\psi = r^4\, \mathrm{grad}(\overline{scal}), \tag{4.11}$$

rezultă olomorf (unde pentru ultima egalitate am folosit (4.5)). Pe de altă parte, din (4.10) rezultă că, pentru orice funcţie h care depinde numai de r şi pentru orice $Y \in \mathcal{D}$ are loc: $(\mathcal{L}_{hZ} J)(Y) = h(\mathcal{L}_Z J)(Y)$, pentru orice $Z \in \mathcal{X}(C(M))$. Aplicând acest rezultat pentru $h = r^4$ şi $Z = \mathrm{grad}(\overline{scal})$, din (4.11) rezultă: $(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}(\overline{scal})} J)|_{\mathcal{D}} = 0$. □

4.3. **Echivalenţa cu abordarea variaţională.** În această secţiune stabilim pentru geometria Sasaki rezultatul analog celui din geometria Kähler, potrivit căruia o metrică Kähler extremală[57] este caracterizată de proprietatea curburii ei scalare de a fi potenţial de olomorfie (*cf.* Teorema 4.1). Considerăm pentru varietăţile Sasaki funcţionala corespunzătoare celei Calabi, stabilind mai întâi domeniul ei de definiţie, adică mulţimea metricilor Sasaki la care ne restrângem.

Deformări ale structurilor Sasaki. Există mai multe posibilităţi de a modifica o structură Sasaki fixată, $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, astfel încât să obţinem tot structuri Sasaki.

Dacă păstrăm distribuţia de contact, $\mathcal{D}$, şi structura CR, $\phi|_{\mathcal{D}}$, atunci forma de contact ia următoarea formă:

$$\tilde{\eta} = f\eta, f \in \mathcal{C}^\infty(M), f > 0,$$

iar câmpul Reeb se modifică astfel:

$$\tilde{\xi} = \xi + \rho,$$

unde $f = \frac{1}{1+\eta(\rho)}$. Endomorfismul $\tilde{\phi}$ şi metrica $\tilde{g}$ sunt definite corespunzător, astfel încât să fie îndeplinite condiţiile de compatibilitate:

$$\tilde{\phi} = \phi - \phi(\tilde{\xi}) \otimes \tilde{\eta}, \quad \tilde{g} = \mathrm{d}\tilde{\eta} \circ (Id \otimes \tilde{\phi}) + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\eta}.$$

Se arată că structura $(\tilde{\phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ este Sasaki dacă şi numai dacă $\tilde{\xi}$ este câmp vectorial Killing în raport cu metrica $\tilde{g}$, iar o altă condiţie echivalentă, dată în funcţie de f, este ca hessiana inversei lui f să satisfacă egalitatea: $H_{f^{-1}}(\phi X, \phi Y) = H_{f^{-1}}(X, Y)$, pentru orice $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$[58].

Pentru definirea funcţionalei Calabi pe varietăţile Sasaki ne vor interesa, prin analogie cu geometria Kähler, deformările care păstrează clasa fundamentală bazică de coomologie determinată de forma Kähler transversă[59]. Pentru a vorbi despre "obiecte bazice" este necesar să fixăm foliaţia caracteristică[60]. Astfel, considerăm mulţimea structurilor Sasaki care au acelaşi câmp Reeb ξ, deci, în particular, au aceeaşi foliaţie $\mathcal{F}_\xi$[61].

---

[57] *Cf.* Definiţia 4.1.

[58] Acestă echivalenţă este demonstrată în [GO], unde a fost introdus prima dată acest tip de deformare în cazul 3-dimensional. Aceste deformări au fost folosite în [Bel] pentru clasificarea varietăţilor Sasaki 3-dimensionale.

[59] Pe o varietate Sasaki $\left(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g\right)$, forma Kähler transversă este dată de restricţia lui $\mathrm{d}\eta$ la distribuţia de contact (*cf.* Secţiunea 2.2).

[60] Astfel, toate structurile obţinute prin aceste deformări sunt de acelaşi tip, regulate, quasi-regulate sau neregulate.

[61] În [BG1], Lema 6.5.14., se arată că acest caz nu este "departe" de cel al structurilor care păstrează foliaţia caracteristică, în sensul următor: $\mathcal{S}(\mathcal{F}_\xi) = \mathcal{S}^+(\mathcal{F}_\xi) \cup \mathcal{S}^-(\mathcal{F}_\xi)$, unde $\mathcal{S}^+(\mathcal{F}_\xi) = \cup_{a \in \mathbb{R}^+} \mathcal{S}(a^{-1}\xi)$, cu $\mathcal{S}(\mathcal{F}_\xi)$, respectiv $\mathcal{S}(\xi)$ reprezentând mulţimea structurilor Sasaki care au fixată foliaţia caracteristică, respectiv câmpul Reeb, iar indicele "$-$" se referă la mulţimea structurilor Sasaki conjugate: $(-\phi, -\xi, -\eta, g)$.

Fie M o varietate compactă şi (ξ, η, ϕ, g) o structură Sasaki[62] fixată pe M. Notăm cu $\mathcal{S}(\xi)$ mulţimea structurilor Sasaki care au acelaşi câmp Reeb:

$$\mathcal{S}(\xi) = \{(\xi', \eta', \phi', g') - \text{structură Sasaki pe } M |\ \xi' = \xi\}.$$

Observaţia 4.3. Toate structurile Sasaki din $\mathcal{S}(\xi)$ determină aceeaşi clasă bazică de coomologie. Deoarece au acelaşi câmp Reeb, rezultă că diferenţa dintre cele două forme de contact, $\zeta = \eta' - \eta$, este o formă bazică: $\zeta(\xi) = 0$, $\mathcal{L}_\xi \zeta = \mathcal{L}_\xi \eta' - \mathcal{L}_\xi \eta = 0$, deci se obţine aceeaşi clasă fundamentală de coomologie bazică $[\mathrm{d}\eta']_B = [\mathrm{d}\eta]_B \in H^{1,1}_B(\mathcal{F}_\xi)$ (*cf.* Propoziţia 2.6, (2)). Atunci putem aplica pentru $\mathrm{d}\eta$ şi $\mathrm{d}\eta'$ Lema $\partial\bar{\partial}$-transversă[63] (*cf.* Propoziţia 2.7) şi rezultă că există o funcţie bazică φ astfel încât:

$$\mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi. \tag{4.12}$$

Următorul rezultat ne asigură că toate structurile Sasaki din $\mathcal{S}(\xi)$ au acelaşi volum:

Propoziţia 4.6. *Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki compactă. Pentru orice $(\xi', \eta', \phi', g') \in \mathcal{S}(\xi)$, volumul total al lui M în raport cu g', respectiv g, este acelaşi: $Vol(M, g) = Vol(M, g')$.*

Demonstraţie. Din Observaţia 4.3 rezultă că $\mathrm{d}\eta'$ este de forma (4.12), iar $\alpha := \eta - \eta' + \mathrm{d_B^c}\,\varphi$ este o 1-formă bazică. Folosind pentru metricile Sasaki g şi g' expresia formei volum în funcţie de forma de contact, obţinem:

$$vol_g = \frac{1}{n!}\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} vol_{g'} &= \frac{1}{n!}\eta' \wedge (\mathrm{d}\eta')^n = \frac{1}{n!}(\eta + \mathrm{d_B^c}\,\varphi - \alpha) \wedge (\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n \\ &= \frac{1}{n!}\eta \wedge (\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n, \end{aligned} \tag{4.14}$$

unde pentru ultima egalitate am folosit faptul că $\mathrm{d_B^c}\,\varphi - \alpha$ este formă bazică, iar $H^k_B = 0$, pentru $k > 2n$. Din dezvoltarea:

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n = (\mathrm{d}\eta)^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (\mathrm{d}\eta)^{n-i} \wedge (\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^i$$

[62]Chiar dacă metrica Sasaki g este complet determinată de celelalte elemente ale structurii prin $g = \mathrm{d}\eta \circ (Id \otimes \phi) + \eta \otimes \eta$, o scriem în continuare ca o componentă a structurii, deoarece ne va interesa cum se modifică curbura scalară a acestei metrici, atunci când structura Sasaki variază.

[63]Considerăm concluzia acestei leme sub forma dată de Observaţia 2.8, unde în locul operatorilor ∂_B şi $\bar{\partial}_B$ sunt utilizaţi operatorii reali $\mathrm{d_B}$ şi $\mathrm{d_B^c}$ şi următoarea relaţie dintre ei: $\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c} = 2i\partial_B\bar{\partial}_B$.

obţinem:

$$\begin{aligned}
Vol(M,g') &= \int_M vol_{g'} = \frac{1}{n!}\int_M \eta\wedge(\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n \\
&= Vol(M,g) + \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\int_M \eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^{n-i}\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^i \\
&= Vol(M,g) + \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\int_M \eta\wedge \mathrm{d}((\mathrm{d}\eta)^{n-i}\wedge \mathrm{d_B^c}\,\varphi\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^{i-1}) \\
&= Vol(M,g),
\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezultă din teorema lui Stokes:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \mathrm{d}(\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^{n-i}\wedge \mathrm{d_B^c}\,\varphi\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^{i-1}) \\
&= \int_M (\mathrm{d}\eta)^{n+1-i}\wedge \mathrm{d_B^c}\,\varphi\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^{i-1} \\
&+ \int_M \eta\wedge \mathrm{d}((\mathrm{d}\eta)^{n-i}\wedge \mathrm{d_B^c}\,\varphi\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^{i-1}),
\end{aligned}$$

iar primul termen se anulează, deoarece $(\mathrm{d}\eta)^{n+1-i}\wedge \mathrm{d_B^c}\,\varphi\wedge(\mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^{i-1}$ este o $(2n+2)$-formă bazică. □

La fel cum în geometria Kähler fixăm de la început structura complexă a varietăţii, şi în cazul Sasaki ne restrângem la submulţimea structurilor din $\mathcal{S}(\xi)$ care au aceeaşi structură olomorfă transversă[64], adică cele pentru care următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{\phi'} & TM \\
\downarrow\pi & & \downarrow\pi \\
\nu(\mathcal{F}_\xi) & \xrightarrow{\bar{J}} & \nu(\mathcal{F}_\xi)
\end{array}$$

Notăm această mulţime astfel:

$$\mathcal{S}(\xi,\bar{J}) = \{(\xi',\eta',\phi',g')-\text{structură Sasaki pe } M|\ \xi'=\xi, \pi\circ\phi' = \bar{J}\circ\pi\}.$$

Ca şi în geometria Kähler, obţinem o descriere mai simplă a acestui spaţiu:

Propoziţia 4.7. *Mulţimea structurilor Sasaki cu acelaşi câmp Reeb ξ şi aceeaşi structură olomorfă transversă $\bar{J}$ este un spaţiu afin modelat*

[64]Este vorba de structura complexă $\bar{J}$, indusă de ϕ pe fibrarea normală, $\bar{J}:\nu(\mathcal{F}_\xi)\to\nu(\mathcal{F}_\xi)$ (*cf.* (2.17)). În acest fel, structurile Sasaki considerate au structurile CR subiacente diferite (deoarece distribuţiile de contact sunt subfibrări diferite), dar care sunt izomorfe ca fibrări vectoriale complexe (*cf.* Observaţia 2.5).

pe $\mathcal{C}_B^\infty(M) \times \mathcal{C}_B^\infty(M)$*. Mai precis, are loc:*

(4.15)
$$\mathcal{S}(\xi, \bar{J}) = \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}_B^\infty(M) \times \mathcal{C}_B^\infty(M) | \, \mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi > 0, \\ \int_M \varphi\, vol_g = \int_M \psi\, vol_g = 0\},$$

orice structură Sasaki (ξ', η', ϕ', g') *din* $\mathcal{S}(\xi, \bar{J})$ *fiind determinată de funcţiile bazice* φ *şi* ψ *astfel:*

$$\begin{cases} \eta' = \eta + \mathrm{d_B^c}\,\varphi + \mathrm{d_B}\,\psi, \\ \phi' = \phi - (\eta' \circ \phi) \otimes \xi, \\ g' = \mathrm{d}\eta' \circ (Id \otimes \phi') + \eta' \otimes \eta'. \end{cases} \tag{4.16}$$

În particular are loc: $\mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi$.

Demonstraţie. Fie $(\xi', \eta', \phi', g') \in \mathcal{S}(\xi, \bar{J})$. Conform Observaţiei 4.3, există o funcţie bazică φ astfel încât:

$$\mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi. \tag{4.17}$$

Deoarece (ξ', η', ϕ', g') este Sasaki, rezultă $\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi > 0$. Ecuaţia (4.17) este îndeplinită dacă şi numai dacă există o funcţie bazică ψ astfel încât:

$$\eta' = \eta + \mathrm{d_B^c}\,\varphi + \mathrm{d_B}\,\psi.$$

Observăm că funcţia ψ este bazică, deoarece $\eta(\xi) = \eta'(\xi) = 1$, de unde rezultă $0 = \iota_\xi\, \mathrm{d_B^c}\,\psi = \mathcal{L}_\xi \psi$. Cum φ şi ψ sunt definite până la o constantă aditivă, se impun condiţiile de normalizare: $\int_M \varphi\, vol_g = 0$, $\int_M \varphi\, vol_g = 0$, astfel încât perechea (φ, ψ) este unic determinată.

Reciproc, având structura Sasaki fixată (ξ, η, ϕ, g) şi o pereche de funcţii bazice, (φ, ψ), care satisfac condiţiile din (4.15), definim noua structură prin formulele (4.16).

Atunci η' este o formă de contact pe M: altfel, presupunând că $\eta' \wedge (\mathrm{d}\eta')^n = \eta' \wedge (\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n$ s-ar anula într-un punct, luăm produsul interior cu ξ şi obţinem $0 = (\mathrm{d}\eta + \mathrm{d_B}\,\mathrm{d_B^c}\,\varphi)^n$, ceea ce contrazice condiţia de pozitivitate.

Din (4.16) rezultă că ϕ' şi ϕ se proiectează peste aceeaşi structură olomorfă transversă, $\bar{J}$, adică $\phi'(X) - \phi(X) \in \langle \xi \rangle, (\forall) X \in \mathcal{X}(M)$, deci există o 1-formă θ astfel încât $\phi' = \phi + \theta \otimes \xi$. Din $\eta' \circ \phi' = 0$, rezultă că θ are forma din (4.16):

$$0 = \eta' \circ \phi' = \eta' \circ (\phi + \theta \otimes \xi) = \eta' \circ \phi + \theta.$$

Printr-un calcul direct se verifică: $(\phi')^2 = -Id + \eta' \otimes \xi$ şi condiţia de pozitivitate: $\mathrm{d}\eta' \circ (Id \otimes \phi') > 0$. Conform Observaţiei 1.2, structura (ϕ', ξ', η', g') este Sasaki, deoarece structura transversă nu s-a schimbat, deci este integrabilă şi $\xi' = \xi$ este Killing şi faţă de metrica g', pentru că $\mathcal{L}_\xi \eta' = 0$ şi $\mathcal{L}_\xi \phi' = 0$.

$\square$

Odată fixată o structură Sasaki (ϕ, ξ, η, g) pe varietatea compactă M, notăm cu $\mathcal{M}(\Omega_B)$ mulţimea metricilor Sasaki care au aceeaşi structură olomorfă transversă şi determină aceeaşi clasă de coomologie bazică $\Omega_B = [\mathrm{d}\eta]_B$:

$$\mathcal{M}(\Omega_B) = \{g' | \,(\exists)(\phi', \xi', \eta', g') \in \mathcal{S}(\xi, \bar{J})\}.$$

Funcţionala Calabi. Considerăm analogul funcţionalei Calabi pentru varietăţi Sasaki:

Definiţia 4.5. Fie M o varietate compactă, pe care fixăm o structură Sasaki, (ϕ, ξ, η, g), ce determină clasa fundamentală de coomologie bazică $\Omega_B = [\mathrm{d}\eta]_B \in H^{1,1}_B(M, \mathbb{R})$. *Funcţionala Calabi* este definită pe $\mathcal{M}(\Omega_B)$ prin:

$$C : \mathcal{M}(\Omega_B) \to \mathbb{R}, \quad C(g) = \int_M scal_g^2 \, vol_g.$$

În continuare calculăm prima derivată a funcţionalei Calabi, pentru a demonstra că o metrică g este extremală dacă şi numai dacă $scal_g$ este potenţial de olomorfie.

Variaţia corespunzătoare a formei bazice $\mathrm{d}\eta$ este:

$$\dot{\overline{\mathrm{d}\eta}} = \mathrm{d_B d_B^c}\, \dot{\varphi},$$

iar variaţiile corespunzătoare ale elementelor care apar în expresia funcţionalei C sunt calculate în următoarea lemă[65]:

Lema 4.3. *Pentru orice variaţie $\dot{\eta} = \mathrm{d_B^c}\, \dot{\varphi} + \mathrm{d_B}\, \dot{\psi}$ (corespunzătoare variaţiei metricii g în $\mathcal{M}(\Omega_B)$), variaţia formei Kähler transverse este $\dot{\overline{\mathrm{d}\eta}} = \mathrm{d_B d_B^c}\, \dot{\varphi}$, iar prima variaţie a formei volum vol_g, a formei Ricci transverse şi a curburii scalare $scal_g$ sunt date de formulele:*

$$\dot{\overline{vol_g}} = -\Delta_B \dot{\varphi}\, vol_g, \tag{4.18}$$

$$\dot{\overline{\rho^T}} = \frac{1}{2}\, \mathrm{d_B d_B^c}\, \Delta_B \dot{\varphi}, \tag{4.19}$$

(4.20)
$$\dot{\overline{scal_g}} = -\Delta_B^2 \dot{\varphi} - 2\langle \mathrm{d_B d_B^c}\, \dot{\varphi}, \rho^T \rangle = -2\delta_B \delta_B \nabla^- d_B \dot{\varphi} + \langle \mathrm{d_B}\, scal_g, \mathrm{d_B}\, \dot{\varphi} \rangle.$$

[65] Observăm că acest calcul este analog celui din cazul Kähler, diferenţa este aceea că, existând numai o structură Kähler transversă, intervin "obiectele" transverse (Ric^T, s^T, etc.) şi operatorii bazici.

Demonstraţie. Pornind de la formula formei volum a lui M în funcţie de forma de contact η: $vol_g = \frac{1}{n!}\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n$, obţinem (4.18) astfel:

$$\begin{aligned}\dot{vol}_g &= \frac{1}{n!}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n + \frac{1}{(n-1)!}\eta \wedge \mathrm{d}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1}\\ &= \frac{1}{n!}(\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\,\dot\psi) \wedge (\mathrm{d}\eta)^n + \frac{1}{(n-1)!}\eta \wedge \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1}\\ &\overset{(a)}{=} \frac{1}{n!}\Lambda_B(\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi)\,\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n = \langle \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi, \mathrm{d}\eta\rangle vol_g \overset{(b)}{=} -\Delta_B\dot\varphi\, vol_g,\end{aligned}$$

unde pentru (a) am folosit faptul că $(\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\,\dot\psi) \wedge (\mathrm{d}\eta)^n$ este o $(2n+2)$-formă bazică, deci este identic nulă (coomologia bazică $H^r_B(M)$ este trivială pentru $r > 2n$) şi egalitatea (2.36) cu $\varphi_1 = \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi$, iar (b) rezultă din formula (2.28).

Pentru (4.19) utilizăm scrierea locală a formei Ricci pe o varietate Kähler, care în cazul structurii transverse este dată de:

$$\rho^T \overset{loc}{=} -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}} \log \frac{vol^T}{vol^T_0},$$

unde vol^T_0 este forma volum transversă a metricii Kähler transverse plate. Astfel, folosind relaţia dintre forma volum a lui M şi forma volum transversă: $vol_g = \eta \wedge vol^T$ şi (4.18), obţinem:

$$\dot{\rho^T} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\frac{\dot{vol}^T}{vol^T_0} \cdot \frac{vol^T_0}{vol^T} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\frac{\dot{vol}_g}{vol_g} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\Delta_B\dot\varphi.$$

Determinăm variaţia curburii scalare observând că aceasta este dată numai de variaţia curburii scalare transverse (*cf.* (2.24) avem $scal_g = scal^T - 2n$). Pornim de la identitatea următoare:

$$\frac{1}{2n}scal^T\,(\mathrm{d}\eta)^n = \rho^T \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1}, \tag{4.21}$$

care rezultă din (2.36) astfel:

$$\rho^T \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1} = \frac{1}{n}\Lambda_B(\rho^T)(\mathrm{d}\eta)^n = \frac{1}{n}\langle \mathrm{d}\eta, \rho^T\rangle(\mathrm{d}\eta)^n = \frac{1}{2n}scal^T(\mathrm{d}\eta)^n.$$

Derivând (4.21) obţinem:

$$\frac{1}{2n}\dot{scal}^T(\mathrm{d}\eta)^n + \frac{1}{2}scal^T\,\mathrm{d}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1} = \dot{\rho^T} \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1} + (n-1)\rho^T \wedge \mathrm{d}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-2}. \tag{4.22}$$

Din formulele (2.36) şi (2.37) obţinem egalităţile:

$$\dot{\rho^T} \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1} = \frac{1}{n}\Lambda_B(\dot{\rho^T})(\mathrm{d}\eta)^n, \quad \mathrm{d}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-1} = \frac{1}{n}\Lambda_B(\mathrm{d}\dot\eta)(\mathrm{d}\eta)^n,$$

$$\rho^T \wedge \mathrm{d}\dot\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{n-2} = \frac{1}{n(n-1)}[\Lambda_B(\rho^T)\Lambda_B(\mathrm{d}\dot\eta) - \langle \rho^T, \mathrm{d}\dot\eta\rangle](\mathrm{d}\eta)^n.$$

Folosind aceste formule şi aplicând izomorfismul Hodge-$\bar{*}$, (4.22) devine:

$$\dot{scal}^T = -scal^T\Lambda_B(\mathrm{d}\dot\eta) + 2\Lambda_B(\dot{\rho^T}) + 2[\Lambda_B(\rho^T)\Lambda_B(\mathrm{d}\dot\eta) - \langle \rho^T, \mathrm{d}\dot\eta\rangle]$$

Înlocuind $\dot{d\eta} = \mathrm{d_B}\mathrm{d^c_B}\,\dot\varphi$, $\dot{\rho^T} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d_B}\mathrm{d^c_B}\,\Delta_B\dot\varphi$ şi $\Lambda_B(\rho^T) = \frac{1}{2}scal^T$ rezultă că primul şi al treilea termen se reduc şi obţinem:

$$\begin{aligned}\dot{scal^T} &= \Lambda_B(\mathrm{d_B}\mathrm{d^c_B}\,\Delta_B\dot\varphi) - 2\langle \mathrm{d_B}\mathrm{d^c_B}\,\dot\varphi, \rho^T\rangle \\ &= -\Delta_B^2\dot\varphi - 2\langle \mathrm{d_B}\mathrm{d^c_B}\,\dot\varphi, \rho^T\rangle,\end{aligned} \tag{4.23}$$

unde ultima egalitate rezultă din formula (2.28) aplicată funcţiei bazice $\Delta_B\dot\varphi$. Cum $\dot{scal_g} = \dot{scal^T}$, obţinem prima formulă pentru variaţia curburii scalare. A doua expresie rezultă direct din Lema 2.2, (2.32) aplicată funcţiei bazice $f = \dot\varphi$ şi ţinând cont că $\mathrm{d_B}\, scal_g = \mathrm{d_B}\, scal^T$. □

Din lema precedentă putem deduce acum calculul primei derivate a lui C:

Propoziţia 4.8. *Prima derivată a funcţionalei C, de-a lungul oricărei variaţii $\dot\eta = \mathrm{d^c_B}\,\dot\varphi + \mathrm{d_B}\,\dot\psi$ a metricii g în $\mathcal{M}(\Omega_B)$, este dată de:*

$$\dot C = -4(\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d_B}\, scal_g, \dot\varphi). \tag{4.24}$$

Demonstraţie. Din (4.18) şi (4.20), obţinem:

$$\begin{aligned}\dot C &= \int_M \Big[(2scal_g\dot{scal_g})\, vol_g + scal_g^2\, \dot{vol_g}\Big] \\ &= \int_M (2scal_g\dot{scal_g} - scal_g^2\Delta_B\dot\varphi)\, vol_g \\ &= \int_M (-4scal_g\delta_B\delta_B\nabla^-\,\mathrm{d_B}\,\dot\varphi + 2scal_g\langle \mathrm{d_B}\, scal_g, \mathrm{d_B}\,\dot\varphi\rangle - scal_g^2\Delta_B\dot\varphi)\, vol_g \\ &= -4\int_M scal_g\, \delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d_B}\,\dot\varphi\, vol_g \\ &= -4(\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d_B}\, scal_g, \dot\varphi),\end{aligned}$$

unde penultima egalitate se obţine din:

$$\begin{aligned}\int_M 2scal_g\langle \mathrm{d_B}\, scal_g, \mathrm{d_B}\,\dot\varphi\rangle\, vol_g &= \int_M \langle \mathrm{d_B}\, scal_g^2, \mathrm{d_B}\,\dot\varphi\rangle\, vol_g \\ = \int_M \langle scal_g^2, \delta_B\,\mathrm{d_B}\,\dot\varphi\rangle\, vol_g &= \int_M scal_g^2\Delta_B\dot\varphi\, vol_g,\end{aligned}$$

iar ultima egalitate rezultă din faptul că operatorul bazic $\delta_\mathrm{B}\delta_\mathrm{B}\nabla^-\mathrm{d_B}$ este autoadjunct. □

O consecinţă imediată a acestei propoziţii este echivalenţa următoare, care justifică Definiţia 4.4 a metricilor Sasaki extremale:

Teorema 4.2. *O metrică Sasaki g pe o varietate compactă M cu structura olomorfă transversă fixată este punct critic al funcţionalei C dacă şi numai dacă curbura ei scalară, $scal_g$, este potenţial de olomorfie.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 4.8, rezultă că o metrică Sasaki g este punct critic în $\mathcal{M}(\Omega_B)$, dacă şi numai dacă produsul scalar global

$(\dot\varphi, \delta_{\mathrm{B}}\delta_{\mathrm{B}}\nabla^{-}\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g)$ se anulează pentru orice variaţie a lui g corespunzătoare variaţiei lui η: $\dot\eta = \mathrm{d}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi + \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\,\dot\psi$. Această condiţie este echivalentă cu $\nabla^{-}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g = 0$, datorită formulei de adjuncţionare (2.29):

$$\begin{aligned}(\nabla^{-}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g, \nabla^{-}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g) &= (\delta_B\nabla^{-}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g, \mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g)\\ &= (\delta_B\delta_B\nabla^{-}\,\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g, scal_g)\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că 1-forma $\mathrm{d}_{\mathrm{B}}\, scal_g$ este ϕ-invariantă. Sau, echivalent, conform Lemei 3.2, câmpul vectorial dual, care este gradientul curburii scalare, este c-olomorf, adică $scal_g$ este potenţial de olomorfie (*cf.* Definiţia 4.3). $\square$

4.4. **Algebra Lie a câmpurilor vectoriale c-olomorfe pe o varietate Sasaki extremală compactă.** În această secţiune prezentăm extinderea în cazul Sasaki a rezultatului lui Calabi[66] (*cf.* [Cal]) referitor la structura algebrei Lie a câmpurilor vectoriale olomorfe pe o varietate Kähler cu o metrică extremală. Acest rezultat reprezintă o generalizare a teoremei lui Lichnerowicz pentru metricile Kähler de curbură scalară constantă, care, la rândul său, generalizează teorema lui Matsushima pentru varietăţile Kähler-Einstein. Pentru demonstrarea rezultatului în cazul Sasaki folosim descompunerea câmpurilor vectoriale c-olomorfe, obţinută în Secţiunea 3.

Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki compactă fixată. Ne uităm în continuare la algebra Lie a câmpurilor vectoriale c-olomorfe:

$$\mathfrak{chol} = \{X \in \mathcal{X}(M) |\ (\mathcal{L}_X \phi)Y = \eta([X, \phi Y])\xi\}.$$

Conform Exemplului 3.1, pentru orice funcţie $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f\xi$ este un câmp vectorial c-olomorf, deci $\mathfrak{chol}$ nu poate avea dimensiune finită. De aceea excludem direcţia câmpului caracteristic ξ, uitându-ne la câmpurile vectoriale c-olomorfe transverse, adică la imaginea acestei algebre Lie prin proiecţia canonică pe fibrarea normală, $\pi : TM \to \nu(\mathcal{F}_\xi)$, pe care o notăm:

$$\mathfrak{chol}^T = \{\bar{X} |\ X \in \mathfrak{chol}\},$$

şi care, conform Observaţiei 3.6, are o structură de algebră Lie complexă, sub acţiunea lui $\bar{J}$. Metrica Sasaki g ne permite să identificăm[67] acest spaţiu cât cu mulţimea câmpurilor vectoriale olomorfe care sunt secţiuni în subfibrarea $(\mathcal{D}, J = \phi|_{\mathcal{D}})$:

$$\mathfrak{chol}^T \cong \{X \in \mathfrak{chol} |\ X \in \Gamma(\mathcal{D})\}.$$

Exemplul 4.4. Dacă metrica g a structurii Sasaki este extremală, atunci curbura ei scalară, $scal$, este potenţial de olomorfie şi gradientul său, $\mathrm{grad}\, scal$, este un câmp vectorial c-olomorf transvers: $\mathrm{grad}\, scal \in \Gamma(\mathcal{D})$, deoarece $g(\mathrm{grad}\, scal, \xi) = \xi(scal) = 0$.

Reamintim că pentru orice câmp vectorial $X \in \mathfrak{chol}^T$ am obţinut următoarea descompunere unică (*cf.* Propoziţia 3.5):

$$X = X_H + \mathrm{grad}\, f + \phi\, \mathrm{grad}\, h, \tag{4.25}$$

unde f şi h sunt funcţii bazice cu $\int_M f\, vol_g = \int_M h\, vol_g = 0$ şi 1-forma duală a lui X_H este armonică: $X_H^\flat \in \mathfrak{harm}^1_B(M) = \mathfrak{harm}^1(M)$.

---

[66]Extinderea în cazul Sasaki este demonstrată şi în [BGS], unde este folosită o abordare "complexă", în sensul că sunt considerate funcţiile şi formele diferenţiale cu valori complexe şi operatorii transverşi ∂ şi $\bar{\partial}$.

[67]Conform Observaţiei 3.5, un câmp vectorial c-olomorf X se descompune unic astfel: $X = \eta(X)\xi + X^{\mathcal{D}}$, unde $X^{\mathcal{D}}$ este ortogonal pe ξ şi este c-olomorf. În continuare folosim această identificare, deoarece preferăm să privim câmpurile vectoriale c-olomorfe transverse ca formând o submulţime a lui $\mathfrak{chol}$.

Notăm în continuare[68] $K := \phi\,\mathrm{grad}\, scal$. Dacă metrica Sasaki g este extremală, atunci K este câmp vectorial c-olomorf şi Killing transvers (*cf.* Propoziţia 4.1).

Considerăm şi submulţimea câmpurilor c-olomorfe transverse care nu au parte armonică[69], notată:

$$\mathfrak{chol}_0^T = \{X \in \mathfrak{chol}^T \mid X_H = 0\}.$$

Orice element al lui $\mathfrak{chol}_0^T$ este de forma: $X = \mathrm{grad}\, f + \phi\,\mathrm{grad}\, h$, unde f, h sunt funcţii bazice. Din Propoziţia 3.2, X este c-olomorf dacă şi numai dacă[70] $\nabla^- X^\flat = 0$, adică $\nabla^-(\mathrm{d_B}\, f + \mathrm{d_B^c}\, h) = 0$. Considerând funcţia bazică complexă $F = f + ih$, această ultimă condiţie este echivalentă cu $(\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{0,2} = 0$, deoarece are loc:

$$(\nabla(\mathrm{d_B}\, f + \mathrm{d_B^c}\, h))^{0,2} = 2(\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{0,2}. \tag{4.26}$$

Introducem operatorul[71] L, care acţionează pe funcţii complexe bazice astfel:

$$LF = 2\delta_B \delta_B (\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{0,2},$$

şi conjugatul său:

$$\bar{L}F = 2\delta_B \delta_B (\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{2,0}.$$

Propoziţia 4.9. *Operatorii L şi $\bar{L}$ au următoarele expresii:*

$$LF = \delta_B \delta_B \nabla^- \,\mathrm{d_B}\, F + \frac{i}{2}\mathcal{L}_K F, \tag{4.27}$$

$$\bar{L}F = \delta_B \delta_B \nabla^- \,\mathrm{d_B}\, F - \frac{i}{2}\mathcal{L}_K F. \tag{4.28}$$

Demonstraţie. Din Lema 2.2, considerând $\alpha = \mathrm{d_B^c}\, f$ în formula (2.31), obţinem:

$$\begin{aligned} \delta_B \delta_B \nabla^- \,\mathrm{d_B^c}\, f &= \frac{1}{2}\Delta_B \delta_B \,\mathrm{d_B^c}\, f - \langle (\mathrm{d_B^c})^2 f, \rho^T \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{d_B^c}\, f, \mathrm{d_B}\, scal \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \phi\, \mathrm{d_B}\, f, \mathrm{d_B}\, scal \rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathrm{d_B}\, f, \phi\, \mathrm{d_B}\, scal \rangle \\ &= -\frac{1}{2}(\mathrm{d_B}\, f)(K) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_K f, \end{aligned} \tag{4.29}$$

deoarece $\delta_B \,\mathrm{d_B^c}\, f = 0$ (conform identităţilor Kähler transverse (2.27), care implică $\delta_B \,\mathrm{d_B^c} + \mathrm{d_B^c}\, \delta_B = 0$). Din (4.29) şi (4.26) rezultă formulele dorite. □

---

[68]Ar trebui să considerăm gradientul curburii scalare transverse, dar datorită relaţiei (2.24), acesta coincide cu gradientul curburii scalare a metricii Sasaki g.

[69]Se poate arăta că acest spaţiu se identifică, ca şi în cazul Kähler, cu mulţimea câmpurilor c-olomorfe care se anulează cel puţin într-un punct al varietăţii M.

[70]Reamintim că ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii transverse.

[71]Acesta este analogul operatorului de ordin 4 care apare în cazul Kähler, de exemplu în [G].

Ca şi în cazul Kähler, operatorii L şi $\bar{L}$ sunt autoadjuncţi şi semipozitiv definiţi, deoarece avem (conform formulei de adjuncţionare (2.29)):

$$(LF, F) = 2\int_M \left|(\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{0,2}\right|^2 vol_g, \quad (\bar{L}F, F) = 2\int_M \left|(\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{2,0}\right|^2 vol_g,$$

de unde rezultă că nucleul lui L este spaţiul funcţiilor complexe cu proprietatea $(\nabla\, \mathrm{d_B}\, F)^{0,2} = 0$. Astfel, am obţinut:

Propoziţia 4.10. *Un câmp vectorial X aparţine lui $\mathfrak{chol}_0^T$ dacă şi numai dacă este de forma $X = \mathrm{grad}\, f + \phi\, \mathrm{grad}\, h$, unde f, h sunt funcţii reale bazice care satisfac: $LF = 0$, cu $F = f + ih$, sau, echivalent, sistemul:*

$$\begin{cases} \delta_B\delta_B\nabla^-\, \mathrm{d_B}\, f - \frac{1}{2}\mathcal{L}_K h = 0, \\ \delta_B\delta_B\nabla^-\, \mathrm{d_B}\, h + \frac{1}{2}\mathcal{L}_K f = 0, \end{cases}$$

unde $K = \phi\, \mathrm{grad}\, scal$.

Notăm algebra Lie a câmpurilor Killing transverse (în raport cu metrica transversă corespunzătoare g_T, care se identifică cu $g|_{\mathcal{D}}$ prin izometria dintre $(\nu(\mathcal{F}_\xi), g_T)$ şi $(\mathcal{D}, g|_{\mathcal{D}})$ dată de aplicaţia de splitare $\sigma : \nu(\mathcal{F}_\xi) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$, *cf.* (2.16)):

$$\mathfrak{k}^T = \{X \in \mathfrak{chol}^T \mid (\mathcal{L}_X g)|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}} = 0\}.$$

Deoarece geometria transversă a unei varietăţi Sasaki este Kähler, rezultă că orice câmp Killing transvers este c-olomorf[72]:

$$\mathfrak{k}^T \subset \mathfrak{chol}^T. \tag{4.30}$$

Considerăm spaţiul câmpurilor Killing hamiltoniene transverse, *i.e.* de forma $X = \phi\, \mathrm{grad}\, f$, cu f o funcţie bazică, şi anume:

$$\mathfrak{k}_0^T = \mathfrak{k}^T \cap \mathfrak{chol}_0^T.$$

O consecinţă a Propoziţiei 4.10 este următoarea descriere a acestui spaţiu:

$$\mathfrak{k}_0^T = \{X \in \mathcal{X}(M) \mid X = \phi\, \mathrm{grad}\, h, h \in \ker(\delta_B\delta_B\nabla^-\, \mathrm{d_B})\}. \tag{4.31}$$

Cu $\mathfrak{a}^T$ notăm algebra Lie a câmpurilor transvers paralele[73], care este o subalgebră Lie a lui $\mathfrak{k}^T$.

Lema 4.4. *Un câmp vectorial c-olomorf transvers X, a cărui 1-formă duală este armonică (bazică), este transvers paralel.*

Demonstraţie. Deoarece X este c-olomorf, rezultă că ∇X este o 1-formă care comută cu ϕ. Pe de altă parte, din egalitatea dintre operatorii Laplace transverşi pe varietăţile Sasaki: $\Delta_B = \Delta_B^{\mathrm{c}}$, avem $\Delta_B^{\mathrm{c}} X^\flat = 0$, şi, deoarece M este compactă, această egalitate implică $\mathrm{d_B^c}\, X^\flat = 0$.

[72]Mai mult, se poate arăta că acestea (câmpurile Killing transverse) sunt câmpurile c-olomorfe transverse care au divergenţa transversă nulă.

[73]Nu există câmpuri vectoriale netriviale paralele în raport cu metrica g (*cf.* Corolarul 2.2), dar pot exista în raport cu metrica transversă g_T.

Ultima condiţie este echivalentă cu faptul că $\nabla X^\flat$ anticomută cu ϕ, rezultând astfel $\nabla X = 0$ (cum ∇ este conexiunea Levi-Civita a metricii transverse, aceasta înseamnă că X este transvers paralel). $\square$

În continuare presupunem că $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ este o varietate Sasaki compactă extremală.

Lema 4.5. *Pe o varietate Sasaki compactă extremală operatorii L şi $\bar{L}$ comută.*

Demonstraţie. Dacă structura Sasaki este extremală, atunci câmpul vectorial $K = \phi\,\mathrm{grad}\,scal$ este c-olomorf şi Killing transvers, de unde rezultă că $\mathcal{L}_K$ comută cu $\mathrm{d_B}$, δ_B şi ∇^- , deci are loc:

$$\mathcal{L}_K \delta_B \delta_B \nabla^- \,\mathrm{d_B}\, F = \delta_B \delta_B \nabla^- \,\mathrm{d_B}\, \mathcal{L}_K F,$$

pentru orice funcţie bazică F. Folosind expresiile operatorilor date de (4.27) şi (4.28), rezultă că L şi $\bar{L}$ comută. $\square$

Teorema 4.3. *Fie $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ o varietate Sasaki compactă extremală. Atunci algebra Lie complexă a câmpurilor vectoriale c-olomorfe transverse admite următoarea descompunere ortogonală*[74]*:*

$$\mathfrak{chol}^T = \mathfrak{chol}^T_{(0)} \oplus (\oplus_{\lambda>0}\mathfrak{chol}^T_{(\lambda)}), \tag{4.32}$$

unde $\mathfrak{chol}^T_{(0)}$ este nucleul lui $\mathcal{L}_K$, i.e. *centralizatorul lui K în $\mathfrak{chol}^T$, iar pentru orice $\lambda > 0$, $\mathfrak{chol}^T_{(\lambda)}$ este spaţiul câmpurilor vectoriale din $\mathfrak{chol}^T$ care satisfac*[75]*: $\mathcal{L}_K \bar{X} = \lambda \bar{J}\bar{X}$.*

Subspaţiul $\mathfrak{chol}^T_{(0)}$ admite, la rândul său, descompunerea ortogonală:

$$\mathfrak{chol}^T_{(0)} = \mathfrak{a}^T \oplus \mathfrak{k}^T_0 \oplus \phi\mathfrak{k}^T_0. \tag{4.33}$$

În plus, fiecare $\mathfrak{chol}^T_{(\lambda)}$, $\lambda > 0$, este conţinut în idealul $\mathfrak{chol}^T_0$, deci au loc şi următoarele descompuneri ortogonale:

$$\mathfrak{chol}^T = \mathfrak{a}^T \oplus \mathfrak{chol}^T_0, \tag{4.34}$$

$$\mathfrak{k}^T = \mathfrak{a}^T \oplus \mathfrak{k}^T_0, \tag{4.35}$$

$$\mathfrak{chol}^T_0 = \mathfrak{k}^T_0 \oplus \phi\mathfrak{k}^T_0 \oplus (\oplus_{\lambda>0}\mathfrak{chol}^T_{(\lambda)}). \tag{4.36}$$

Demonstraţie. Fie X un câmp vectorial c-olomorf transvers. Atunci, conform Propoziţiei 3.5, acesta are următoarea descompunere:

$$X = X_H + \mathrm{grad}\, f + \phi\,\mathrm{grad}\, h,$$

unde f, h sunt funcţii bazice şi 1-forma duală a lui X_H este armonică. Din (2.33) rezultă $\delta_B \nabla^-(X_H)^\flat = \iota_{\phi X_H}\rho^T$. Din formula de adjuncţionare

[74]Atragem atenţia asupra notaţiei: spaţiile $\mathfrak{chol}^T_0$ şi $\mathfrak{chol}^T_{(0)}$ sunt diferite.

[75]$\bar{J}$ este operatorul indus de ϕ (*cf.* (2.17)). Echivalent, această condiţie se rescrie astfel: $[\bar{K}, \bar{X}] = \lambda\bar{J}\bar{X}$, unde $[\cdot,\cdot]$ este paranteza Lie definită pe mulţimea câmpurilor vectoriale foliate, $\mathfrak{fol}$ (deci în particular pe $\mathfrak{chol} \subset \mathfrak{fol}$) prin $[\bar{K}, \bar{X}] := \overline{[K, X]}$.

(2.29) şi deoarece 1-forma $\phi(X_H)^\flat$ este armonică (Δ_B comută cu ϕ), rezultă:

$$\delta_B\delta_B\nabla^-(X_H)^\flat = \delta_B(\iota_{\phi X_H}\rho^T) = -\langle\phi(X_H)^\flat, \delta_B\rho^T\rangle = \frac{1}{2}\langle\phi(X_H)^\flat, \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\, scal\rangle.$$

Astfel, $\delta_B\delta_B\nabla^-(X_H)^\flat$ este egal cu produsul scalar dintre o 1-formă armonică, $\phi(X_H)^\flat$, şi duala unui câmp vectorial Killing, $\mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c}\, scal = K^\flat$, deci este constant. Deoarece $K = \phi\,\mathrm{grad}\, scal$ are zerouri pe varietatea compactă M, rezultă că această constantă este zero: $\delta_B\delta_B\nabla^-(X_H)^\flat = 0$. Deoarece X este c-olomorf, din Propoziţia 3.2 rezultă $\nabla^- X^\flat = 0$, deci şi $\delta_B\delta_B\nabla^-(\mathrm{d}_\mathrm{B} f + \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c} h) = 0$, egalitate care se rescrie în funcţie de operatorul L astfel: $L(F) + \bar{L}(\bar{F}) = 0$, unde $F = f + ih$, deoarece are loc:

$$\begin{aligned} L(F) + L(\bar{F}) &\overset{(4.27),(4.28)}{=} \delta_B\delta_B\nabla^-\,\mathrm{d}_\mathrm{B}(F+\bar{F}) + \frac{i}{2}\mathcal{L}_K(F-\bar{F}) \\ &= 2[\delta_B\delta_B\nabla^-\,\mathrm{d}_\mathrm{B} f - \frac{1}{2}\mathcal{L}_K h] \overset{(4.29)}{=} \delta_B\delta_B\nabla^-(\mathrm{d}_\mathrm{B} f + \mathrm{d}_\mathrm{B}^\mathrm{c} h). \end{aligned}$$

Pornind cu ϕX în locul lui X (care este tot un câmp vectorial c-olomorf datorită ϕ-invarianţei), obţinem: $L(iF) + \bar{L}(\overline{iF}) = 0$, deci $L(F) - \bar{L}(\bar{F}) = 0$, rezultând astfel $L(F) = 0$. Din Propoziţia 4.10, această condiţie este echivalentă cu faptul că $\mathrm{grad}\, f + \phi\,\mathrm{grad}\, h$ aparţine lui $\mathfrak{chol}_0^T$. Rezultă atunci că şi X_H este c-olomorf şi, conform Lemei 4.4, aceasta implică $X_H \in \mathfrak{a}^T$. Astfel se obţine descompunerea (4.34), iar prin intersecţie cu spaţiul câmpurilor Killing transverse, $\mathfrak{k}^T$, rezultă (4.35).

Conform Lemei 4.5, L şi $\bar{L}$ comută între ele, deci $\bar{L}$ acţionează pe $\ker L$. Din (4.27) şi (4.28) rezultă că această acţiune coincide cu acţiunea lui $-i\mathcal{L}_K$. Din descompunerea (4.34) şi Lema 4.10, putem identifica $\mathfrak{chol}^T$ cu suma directă dintre $\mathfrak{a}^T$ şi $\ker L$, iar acţiunea lui $\mathcal{L}_K$ pe $\mathfrak{chol}_0^T$ se identifică cu acţiunea lui $\mathcal{L}_K$ pe $\ker L$ (deoarece K este Killing rezultă că $\mathcal{L}_K$ comută cu grad, deci funcţia complexă corespunzătoare câmpului $\mathcal{L}_K X$, cu $X = \mathrm{grad}\, f + \phi\,\mathrm{grad}\, h$ şi $F = f + ih$, este $\mathcal{L}_K F$). Astfel, acţiunea lui $\bar{L}$ pe $\ker L$ corespunde acţiunii lui $-i\mathcal{L}_K$ pe $\mathfrak{chol}_0^T$ şi cum funcţia asociată câmpului ϕX este iF (unde F este funcţia asociată câmpului c-olomorf $X = \mathrm{grad}\, f + \phi\,\mathrm{grad}\, h$), iar $\bar{L}$ este autoadjunct şi semipozitiv, rezultă că $\mathfrak{chol}^T$ se descompune astfel:

$$\mathfrak{chol}^T = \mathfrak{chol}_{(0)}^T \oplus (\oplus_{\lambda>0}\mathfrak{chol}_{(\lambda)}^T),$$

unde $\mathfrak{chol}_{(0)}^T$ este nucleul lui $\mathcal{L}_K$ în $\mathfrak{chol}^T$, iar pentru orice $\lambda > 0$, $\mathfrak{chol}_{(\lambda)}^T$ este spaţiul câmpurilor vectoriale din $\mathfrak{chol}^T$ care satisfac $\mathcal{L}_K\bar{X} = \lambda\bar{J}\bar{X}$ ($\mathfrak{chol}_{(\lambda)}^T = \{0\}$ cu excepţia unui număr finit de valori ale lui λ).

Deoarece orice câmp Killing transvers X invariază curbura scalară (care este funcţie bazică): $\mathcal{L}_X scal = 0$, rezultă $[X, \mathrm{grad}\, scal] = 0$, ceea ce implică şi $[X, K] = 0$ (deoarece X fiind Killing transvers, este, în particular, şi c-olomorf, deci $[X, \cdot]$ comută cu $\bar{J}$). Rezultă astfel că

$\mathfrak{chol}^T_{(0)}$ conţine suma directă $\mathfrak{a}^T \oplus \mathfrak{k}^T_0 \oplus \phi\mathfrak{k}^T_0$. Mai mult, cele două spaţii coincid, deoarece din (4.27) rezultă că nucleul lui $\mathcal{L}_K$ restricţionat la $\ker L$ coincide cu nucleul operatorului $\delta_B \delta_B \nabla^- \mathrm{d}_\mathrm{B}$ şi folosind descrierea (4.31) a spaţiului $\mathfrak{k}^T_0$ rezultă incluziunea inversă. Astfel obţinem (4.33), iar (4.36) este o consecinţă a descompunerilor (4.32) şi (4.33). □

Observaţia 4.4. Acest rezultat reprezintă o obstrucţie pentru existenţa metricilor extremale pe o varietate Sasaki, la fel ca şi în cazul Kähler. Dacă, în plus, presupunem că există o metrică extremală a cărei curbură scalară este constantă, atunci câmpul vectorial K este identic nul şi descompunerea (4.32) devine:

$$\mathfrak{chol}^T = \mathfrak{chol}^T_{(0)} = \mathfrak{a}^T \oplus \mathfrak{k}^T_0 \oplus \phi\mathfrak{k}^T_0.$$

În cazul în care structura Sasaki extremală $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ este regulată şi $\pi : M \to N$ este fibrarea Boothby-Wang, algebra Lie a câmpurilor vectoriale c-olomorfe transverse, $\mathfrak{chol}^T(M)$, se identifică cu algebra Lie a câmpurilor vectoriale olomorfe de pe N, $\mathfrak{hol}(N)$ (*cf.* Propoziţia 3.3), iar descompunerea (4.32) corespunde descompunerii lui $\mathfrak{hol}(N)$ pe varietatea Kähler extremală N.

Bibliografie

[ADM] V. Apostolov, T. Drăghici, A. Moroianu, *The odd-dimensional Goldberg conjecture*, Math. Nachr. **279** (2006), 948–952.

[BA] R. Barre, A. El K. Alaoui, *Foliations*, Handbook of Differential Geometry (ed. F. Dillen, L. Verstaehlen), Elsevier Science Publishers, 2002.

[Bel] F. A. Belgun, *Normal CR-Structures on Compact 3-Manifolds*, Math. Z., **238** (2001), 441–460.

[BMS] F. A. Belgun, A. Moroianu, U. Semmelmann, *Symmetries of Contact Metric Manifolds*, Geom. Dedicata **101** (2003), 203–216.

[Be] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **3**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bl] D.E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhäuser Boston, Progress in Mathematics, vol. **203**, 2002.

[BG1] C.P. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, to appear, Oxford, 2006.

[BG2] C. Boyer, K. Galicki, *3-Sasakian Manifolds*, Essays on Einstein Manifolds, C. LeBrun and M. Wang, Eds., Surveys in Differential Geometry, Vol. **VI**, Supplement to JDG.

[BG3] C. Boyer, K. Galicki, *On Sasakian-Einstein Geometry*, Int. J. of Math. **11** (2000), 873–909.

[BG4] C. Boyer, K. Galicki, *On the Geometry of Sasakian-Einstein 5-Manifolds*, Math. Ann. **325** (2003), 485–524.

[BGO] C. Boyer, K. Galicki, L. Ornea, *Constructions in Sasakian Geometry*, arXiv: math.DG/0602233, 2006.

[BGS] C. Boyer, K. Galicki, S. Simanca, *Canonical Sasakian Metrics*, arXiv: math.DG/0604325, 2006.

[BS] V. Brânzănescu, R. Slobodeanu, *Holomorphicity and Walczak Formula on Sasakian Manifolds*, arXiv: math.DG/0407276, preprint 2005, to appear in J. Geom. Phys..

[Cal] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, 1982, 259–290.

[ElKA] A. El K. Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Math. **73** (1990), 57–106.

[FOW] A. Futaki, H. Ono, G. Wang, *Transverse Kähler Geometry of Sasaki Manifolds and Toric Sasaki-Einstein Manifolds*, arXiv: math.DG/0607586, 2006.

[G] P. Gauduchon, *Calabi's Extremal Kähler Metrics*, Note de curs, IMAR, 2005.

[GO] P. Gauduchon, L. Ornea, *Locally Conformally Kähler Metrics on Hopf Surfaces*, Ann. Inst. Fourier, **48** (1998), 1107–1127.

[Kob] S. Kobayashi, *Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group*, Tôhoku Math. J., **8** (1956), 29–45.

[MSY] D. Martelli, J. Sparks, S.-T. Yau, *Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation*, arXiv:hep-th/0603021, 2006.

[M] A. Moroianu, *Kähler Geometry*, arXiv: math.DG/0402223, 2004.

[O'N] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Pure and Applied Math. **103**, Academic Press, New York, 1983.

[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, *Sasakian Structures on CR-Manifolds*, arXiv: math.DG/0606136, 2006.

[OV2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Einstein-Weyl structures on complex manifolds and conformal version of Monge-Ampere equation*, arXiv: math.CV/0606309, 2006.

[Sa] S. Sasaki, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure*, Tôhoku Math. J. **2** (1960), 459–476.

[Ta] S. Tanno, *Some transformations on manifolds with almost contact and contact metric structures I*, Tôhoku Math. J. **15** (1963), 140-147.

[Ton] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian Manifolds*, Springer Verlag, New York, 1988.