Geometria Varietăţilor Torice

Foaia de Exerciţii no. 2

08.05.06

1) Fie $P \subset \mathbb{R}^n$ un politop de dimensiune n foarte simplu şi fie X_P varietatea torică, netedă şi proiectivă asociată. Pentru fiecare $i = 0, \dots, n$, notăm cu f_i numărul de feţe de dimensiune i ale lui P.

(i) Arătaţi că pentru orice $q = 0, \dots, n$ avem relaţia :

$$b_{2q}(X_P) = \sum_{i=q}^{n} (-1)^{i-q} \binom{i}{q} f_i.$$

(ii) Calculaţi numerele Betti ale spaţiului proiectiv complex $\mathbb{P}^n$.

(iii) Arătaţi relaţiile *Dehn-Sommerville* :

$$\sum_{i=q}^{n} (-1)^{i-q} \binom{i}{q} f_i = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{n-j}{q-j} f_{n-j},$$

pentru orice $q = 0, \dots, n$.

(iv) Arătaţi relaţiile *Euler-Poincaré* :

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1};$$

în particular, pentru $n = 3$, obţinem formula lui Euler : $f_0 - f_1 + f_2 = 2$.

2) Fie $P \subset \mathbb{R}^n$ un politop convex de dimensiune n ale cărui vârfuri se află în $\mathbb{Z}^n$ şi fie

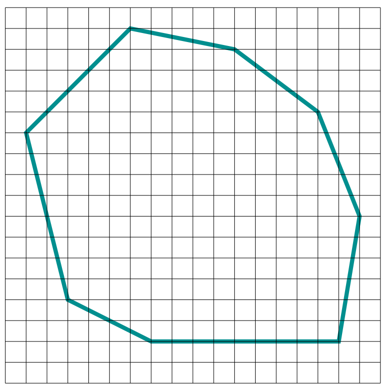
$$E_P(t) = 1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

polinomul Ehrhart asociat (unde $a_n = \mathrm{vol}(P)$). Atunci

$$a_{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{F \subset P \text{ faţetă}} \mathrm{vol}(F),$$

unde $\mathrm{vol}(F)$ este volumul lui F în spaţiul generat de F.

3) Determinaţi aria poligonului din figura de mai jos (fiecare pătrat este de arie 1) :



4) Determinaţi polinomul Ehrhart al n-simplexului standard :

$$P = \mathrm{conv}(0, e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

unde $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ este baza canonică.

5) Determinaţi polinomul Ehrhart al politopului :

$$P = \mathrm{conv}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}^3,$$

unde $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ este baza canonică.