SCOALA NORMALA SUPERIOARA

EXAMEN DE ADMITERE 2001, DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA

1. Aratati ca orice matrice reala antisimetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisface inegalitatea

$$\det(I_n + A) \geq 1.$$

2. Fie $a \geq 1$ un numar real si $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2. Aratati ca sirul (u_n) definit prin relatia

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$$

este convergent si calculati limita sa.

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrica definita pozitiv. Aratati ca

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-^t XAX) dx_1...dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}},$$

unde prin X s-a notat vectorul coloana cu coeficienti $x_1, ..., x_n$.

4. Fie M o suprafata inchisa in $\mathbb{R}^3$. Fie $p, q \in M$ doua puncte care maximizeaza distanta euclidiana dintre oricare doua puncte de pe M. a)Aratati ca spatiile tangente T_pM si T_qM sunt paralele ca plane in $\mathbb{R}^3$. b) Ce se intampla daca in loc de suparfata inchisa M consideram o curba inchisa neteda C in $\mathbb{R}^3$?

5.[1] Fie $G = SL(2, \mathbb{R})$ multimea matricilor reale $2X2$ cu determinant 1 inzestrata cu topologia indusa de pe $\mathbb{R}^4$. Care este grupul fundamental al lui G ?

6. Presupunem ca n becuri sunt controlate de n intrerupatoare astfel incat intrerupatorul k controleaza becul k (posibil si altele) si controleaza si becul j daca si numai daca intrerupatorul j controleaza la randul lui becul k. La inceput toate becurile sunt stinse. Aratati ca exista o combinatie care aprinde toate becurile concomitent. (Indicatie: Pentru o aplicatie liniara $T, v \in Im(T)$ daca si numai daca $Im(T)^{\perp} \in v^{\perp}$.)

Date: 12 septembrie 2001, orele 9,00-13,00.

[1]Nota: Prblema numarul 5 nu a fost luata in calcul la punctajul final, deoarece notiunea de grup fundamental nu era cunoscuta candidatilor.