MEMORIU DE ACTIVITATE
Radu Pantilie

Domeniul meu de cercetare este *geometria diferenţială*, lucrările elaborate de mine, pînă in prezent, abordînd, în principal, *aplicaţiile şi morfismele armonice*, *teoria twistor*, *varietăţile Einstein şi auto-duale*, *spaţiile Weyl*, *geometria cuaternionică* şi *geometria complexă generalizată*.

Toate aceste teme de cercetare sunt fundamentale pentru matematică existînd, de exemplu, peste o mie de lucrări ştiinţifice dedicate studiului aplicaţiilor armonice. In plus, consider că rezultatele obţinute de mine sunt fundamentale, pentru domeniile respective. Astfel, principalele mele rezultate pot fi structurate după cum urmează:

• *rezultate de clasificare pentru morfisme armonice* (de exemplu, clasificarea completă a morfismelor armonice cu fibre unidimensionale pe varietăţi Einstein şi pe varietăţi riemanniene conform plate de dimensiune cel putin patru): [C5] , [C7] , [C9] , [C10] , [C11] , [C13] , [C14] , [C16] .

• *restricţii geometrice si topologice pentru morfisme armonice; de asemenea, restricţii topologice pentru varietăţi compacte înzestrate cu acţiuni ale cercului* (obţinînd astfel, in particular, exemple de varietăţi compacte care nu pot fi domeniu de morfisme armonice cu fibre unidimensionale, indiferent de metrica pe care ar purta-o): [C5] , [C12] , [C14] , [D1] .

• *noi exemple si construcţii de aplicaţii şi morfisme armonice*: [C5] , [C6] , [C7] , [C9] , [C13] , [C17] , [G3] .

• *o nouă construcţie de metrici Einstein auto-duale*: [C11] .

• *introducerea noţiunilor de structură şi aplicaţie twistorială şi iniţierea studiului relaţiilor dintre acestea, aplicaţiile şi morfismele armonice, şi construcţiile de metrici Einstein şi auto-duale*: [C13] , [C14] , [C15] , [C17] , [C20] .

• *construirea unor noi clase naturale de structuri twistoriale*: [C15] , [C22] , [C24] , [C25] .

• *introducerea unei noţiuni naturale de aplicaţie cuaternionică, studiul proprietăţilor ei twistoriale şi descrierea tuturor aplicaţiilor cuaternionice între spaţii proiective cuaternionice*: [C19] .

• *descoperirea extensiei adecvate a noţiunii de varietate Cauchy–Riemann (CR) la geometria cuaternionică*: [C22] , [C26] .

• *descoperirea unui functor covariant natural de la clasa perechilor formate dintr-un spaţiu vectorial cuaternionic si un subspaţiu real, la clasa fascisolelor coerente peste sfera Riemann; deasemenea, utilizarea acestui functor la demonstrarea clasificării subspaţiilor reale ale unui spatiu vectorial cuaternionic*: [C23] .

• *introducerea noţiunii de varietate co-CR cuaternionică a cărei teorie twistor unifică, in mod natural, teoriile twistor corespunzătoare varietăţilor anti-auto-duale, cuaternionice (clasice) şi spaţiilor Einstein–Weyl tridimensionale*: [C25] , [G1] , [G4] , [G5] .

• *introducerea unei noţiuni naturale de aplicaţie olomorfă între varietăţi complexe generalizate şi obţinerea unor rezultate de factorizare pentru varietăţi Kähler generalizate; deasemenea, descoperirea unor noi clase naturale de varietăţi complexe generalizate*: [C18] , [C21] , [C24] , [D3] .

• *descoperirea noţiunii adecvate de varietate cuaternionică generalizată şi iniţierea studiului proprietăţilor acestora*: [C24] .

De-a lungul timpului, am fost implicat în cinci **proiecte de cercetare**, două dintre acestea internaţionale, iar în patru dintre acestea am fost director/responsabil de proiect (a se vedea C.V.-ul). Deasemenea, în prezent, sunt membru al unei echipe de cercetare finanţată printr-un Grant PN II IDEI. Lucrările elaborate de mine, drept (co)autor, şi care au beneficiat de finanţare, în cadrul acestor granturi, sunt următoarele: [B2] , [C13] ,. . . , [C26] , [G2] , [G3] .

In continuare, voi prezenta, cu mai multe detalii, o parte dintre rezultatele menţionate mai înainte.

I. *Clasificarea morfismelor armonice cu fibre unidimensionale pe varietăţi Einstein şi pe varietăţi riemanniene conform plate de dimensiune cel putin patru.* Astfel, avem următoarele rezultate pentru un morfism armonic $\varphi : (M^{n+1}, g) \to (N^n, h)$.

• Dacă (M^{n+1}, g) este Einstein iar $n \geq 4$ atunci φ este de tip Killing sau de tip warped-product [C10]; dacă $n = 3$, atunci φ este de tip Killing, warped-product sau de un nou tip de morfism armonic, dat de ecuaţia cîmpurilor lui Beltrami din hidrodinamică [C9]. Acest al treilea tip de morfism armonic, introdus în [C9], conduce la o nouă construcţie de metrici Einstein auto-duale [C11].

• Dacă (M^{n+1}, g) este conform plată, $n \geq 4$ şi φ este real analitică atunci φ este de tip Killing sau distribuţia sa orizontală este integrabilă iar foile sale, înzestrate cu metrica indusă de $\lambda^{-2n+4}g$, au curbură constantă [C16]. Urmează că aplicaţia polinomială Hopf $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(z_1, z_2) \to (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z_2})$ este, pînă la difeomorfisme conforme locale, unicul morfism armonic, cu fibre unidimensionale şi distribuţie orizontală neintegrabilă, între varietăţi riemanniene conform plate de dimensiuni cel puţin trei [C16].

II. *Introducerea noţiunilor de structură şi aplicaţie twistorială şi iniţierea studiului proprietăţilor geometrice ale acestora.* Structurile şi aplicaţiile twistoriale au fost introduse, pentru categoria varietăţilor complexe, în [C13] şi, pentru categoria varietăţilor diferenţiabile, în [C20]. Acestea permit o abordare sistematică a teoriei twistor oferind, astfel, o viziune unitară asupra variatelor construcţii din cadrul acesteia. Deasemenea,

• am construit noi structuri twistoriale naturale pentru varietăţile riemanniene cu curbură constantă, de dimensiune cel puţin patru, şi am demonstrat că acestea sunt singurele spaţii Weyl, de dimensiune cel puţin patru, pe care aceste construcţii funcţionează [C15].

• am obţinut o descriere geometrică detaliată a aplicaţiilor twistoriale cu fibre unidimensionale definite pe spaţii Weyl cvadridimensionale înzestrate cu structura aproape twistorială neintegrabilă [C20] .

• am introdus o noţiune de aplicaţie cuaternionică şi am arătat că aceasta dă morfismele naturale ale geometriei cuaternionice; de exemplu, am demonstrat că aplicaţiile cuaternionice, de rang cel puţin unu, se caracterizează prin faptul că sunt twistoriale; am folosit apoi acest rezultat pentru a descrie toate aplicaţiile cuaternionice între spaţii proiective cuaternionice [C19] .

III. *Plasarea în contextul geometriei Weyl a studiului morfismelor armonice şi iniţierea studiului proprietăţilor twistoriale ale acestora* ([C14] , [C17] , [C20]). De exemplu, am obţinut următoarele rezultate.

• Orice morfism armonic cu fibre bidimensionale definit pe un spaţiu Einstein–Weyl cvadridimensional este twistorial [C14] .

• Orice morfism armonic între spaţii Einstein–Weyl de dimensiuni patru şi trei este twistorial [C14] .

• Fie (M^4, c, D) un spaţiu Einstein–Weyl (cvadridimensional) pe care pot fi definite local cinci foliaţii bidimensionale distincte ce produc morfisme armonice. Atunci, local, există o structură Hermitiană J pe (M^4, c) , astfel încît $DJ = 0$, sau (M^4, c) este (anti-)auto-duală şi D este conexiunea Levi–Civita a unui reprezentant Einstein al lui c [C14] .

• Orice submersie orizontal conformă analitică pe o varietate conformă (N^3, c_N) , cu valori în (P^2, c_P) , se 'extinde', în mod unic, la un morfism armonic definit pe $\mathscr{H}$-spaţiul (M^4, g) al lui (N^3, c_N) , cu valori în (P^2, c_P) . Mai mult, în acest fel sunt obţinute toate morfismele armonice pozitive cu fibre bidimensionale definite pe (M^4, g) [C17] .

IV. *Introducerea noţiunii de varietate (co-)CR cuaternionică.* Este binecunoscut faptul că o varietate complexă induce, pe orice hipersuprafaţă a sa, o structura CR. Apare, în mod evident, întrebarea: dar în contextul geometriei cuaternionice, care este noţiunea adecvata de structură

CR cuaternionică? (Desigur, intrebarea se pune şi pentru subvarietăţi de codimensiuni mai mari.)

Dualizînd, spre deosebire de cazul complex, distribuţia cuaternionică generată de un cîmp vectorial cuaternionic nu este neapărat integrabilă. Aşadar, cîtul local al unei varietăţi cuaternionice, printr-un cîmp vectorial cuaternionic, nu este o varietate cuaternionică - dar, care este structura cît, astfel indusă? Menţionez că, în mod clasic, se ştia raspunsul la aceasta întrebare pentru dimensiunea cea mai mică, anume patru: structura cît, astfel indusă, este o structură Einstein–Weyl tridimensională. Aceasta ne conduce la o abordare dintr-o altă perspectivă a acestei probleme: care este structura geometrică ce corespunde, prin intermediul teoriei twistor, varietăţilor complexe înzestrate cu familii local complete de sfere Riemann scufundate ai căror fibraţi normali sunt pozitivi? Notînd cu $\mathcal{O}(1)$ dualul fibratului tautologic peste sferă, se cunoştea raspunsul doar pentru $\mathcal{O}(2)$ şi $2k\mathcal{O}(1)$, anume, spaţiile Einstein–Weyl tridimensionale şi, respectiv, varietăţile cuaternionice, de dimensiune $4k$; în particular, pentru $k = 2$ se obţin varietăţile anti-auto-duale.

O *structură aproape CR cuaternionică* [C22] pe o varietate M este o pereche (E, ι), unde E este un fibrat vectorial cuaternionic peste M, iar ι este un morfism injectiv de fibraţi vectoriali de la TM la E astfel încît $\iota^{-1}\big(E^J\big)$ este o structură CR liniară pe $T_{\pi(J)}M$, pentru fiecare structură complexă liniară admisibilă J pe E, unde $E^J = \ker(J+\mathrm{i})$, iar $\pi : Z \to M$ este proiecţia fibratului structurilor complexe liniare admisibile pe E.

Fie (M, E, ι) o varietate aproape CR cuaternionică. Presupunînd E înzestrat cu o conexiune compatibilă ∇ putem construi o structură aproape CR pe Z, după cum urmează. Mai întîi, fie $\mathcal{B}$ distribuţia complexa pe Z, caracterizată de faptul că $\mathcal{B}_J$ este ridicarea orizontală, în raport cu ∇, a lui $\iota^{-1}\big(E^J\big)$, pentru fiecare $J \in Z$. Atunci $\mathcal{C} = \mathcal{B} \oplus (\ker \mathrm{d}\pi)^{0,1}$ este o structură aproape CR pe Z.

Dacă $\mathcal{C}$ este integrabilă, spunem că (M,E,ι,∇) este o *varietate CR cuaternionică* iar $(Z,\mathcal{C})$ este spaţiul twistor al său [C22] .

Referitor la integrabilitatea structurilor CR cuaternionice, în [C22] am demonstrat urmatoarele pentru o structură aproape CR cuaternionică (E,ι) şi o conexiune compatibilă ∇ pe E, cu R forma sa de curbură şi $T=\mathrm{d}^{\nabla}\iota$ torsiunea sa:

• (E,ι,∇) este integrabilă dacă şi numai dacă $T\big(\Lambda^2(T^JM)\big)\subseteq E^J$ şi $R\big(\Lambda^2(T^JM)\big)(E^J)\subseteq E^J$, pentru orice $J\in Z$, unde $T^JM=\iota^{-1}\big(E^J\big)$.
In plus, notînd $\operatorname{rank}E=4k$, $\dim M=4k-m$, avem următoarele fapte, care pentru $k=m=1$ şi $m=0$ se reduc la rezultate clasice:

• dacă $2k-m=1$ atunci (E,ι,∇) este integrabilă;

• dacă $2k-m\neq 2$ şi ∇ este fără torsiune atunci (E,ι,∇) este integrabilă.

In cazul real-analitic se obţine o formă mai tare a integrabilităţii, anume, *realizabilitatea* [C22] :

• orice varietate CR cuaternionică real-analitică (M,E,ι,∇) se scufundă, cu germen unic, într-o varietate cuaternionică N astfel încît $E=TN|_M$ iar $\mathcal{C}=T^{\mathbb{C}}Z\cap(T^{0,1}Z_N)|_M$, unde Z_N este spaţiul twistor al lui N.

Spunem atunci că N este *spaţiul heaven* al lui (M,E,ι,∇) .

Cel mai simplu exemplu de varietate CR cuaternionică este dat de spaţiile vectoriale CR cuaternionice, introduse şi clasificate în [C22] prin intermediul unui functor covariant de la clasa acestora la clasa fibraţilor vectorial olomorfi strict negativi peste sferă. Dualizînd, se obţin spaţiile vectoriale co-CR cuaternionice ce corespund, astfel, fibraţilor vectoriali olomorfi strict pozitivi peste sferă.

Mai mult [C23] , aceşti doi functori pot fi unificaţi într-un functor ce asociază oricarei perechi (U,E) , cu E spaţiu vectorial cuaternionic şi $U\subseteq E$ subspaţiu real, un fascicol analitic coerent peste sfera structurilor complexe liniare admisibile pe E. Aceasta conduce la clasificarea subspaţiilor reale ale spaţiilor vectoriale cuaternionice. Urmează că:

• orice asemenea pereche (U, E) admite o descompunere unică $(U, E) = (U_-, E_-) \times (U_t, E_t) \times (U_+, E_+)$, unde (U_-, E_-) este CR cuaternionic, (U_+, E_+) corespunde unui spaţiu vectorial co-CR cuaternionic, iar fasciculul lui (U_t, E_t) este de torsiune [C23].

Procedînd ca mai înainte, se obţine şi clasa *varietăţilor co-CR cuaternionice* ale caror spaţii twistor sunt varietăţi complexe inzestrate cu familii local complete de sfere scufundate; mai mult,

• dacă Y este spaţiul twistor al unei varietăţi co-CR cuaternionice M atunci, pentru fiecare $x \in M$, sfera twistor $t_x \subseteq Y$ corespunzatoare este astfel încît fibratul său normal se identifică, în mod natural, cu fibratul vectorial olomorf al lui T_xM (ca spaţiu vectorial co-CR cuaternionic) [C25].

Naturaleţea teoriei varietăţilor (co-)CR cuaternionice dă o primă indicaţie că acestea există din abundenţă. Iată, alte trei clase de exemple, unde $n \geq 1$:

• varietatea Grassmann $\mathrm{Gr}_3^+(n+3, \mathbb{R})$ a subspaţiilor vectoriale tridimensionale orientate a lui $\mathbb{R}^{n+3}$ este o varietate CR cuaternionică al cărei spaţiu heaven este $\mathrm{Gr}_4^+(n+4, \mathbb{R})$ (un spaţiu Wolf) [C25] (pentru $n = 1$ se obţine S^3, cu structura sa conformă, scufundată în S^4 privită ca varietate anti-auto-duală);

• varietatea $\mathrm{Gr}_2^0(2n+2, \mathbb{C})$, formată din acele $q \in \mathrm{Gr}_2(2n+2, \mathbb{C})$ care sunt izotrope faţă de structura simplectică complexă liniară a lui $\mathbb{C}^{2n+2} (= \mathbb{H}^{n+1})$, este o varietate CR cuaternionică al cărei spaţiu heaven este $\mathrm{Gr}_2(2n+2, \mathbb{C})$ [C25];

• fie Q fibratul vectorial Riemannian orientat de rang trei al cărui fibrat in sfere este spaţiul twistor Z al unei varietăţi cuaternionice M; atunci $\mathrm{SO}(Q)$ este o varietate CR cuaternionică al cărei spaţiu heaven este o binecunoscută varietate hipercomplexă asociată lui M [C25].

In plus, toate aceste trei clase de varietăţi sunt înzestrate, deasemenea, cu structuri co-CR cuaternionice naturale iar spaţiile twistor corespunzatoare sunt Q_{n+1} , $\mathrm{Gr}_2^0(2n+2,\mathbb{C})$ şi, respectiv, $\mathbb{C}P^1\times Z$, unde Q_{n+1} este hipercuadrica direcţiilor izotrope din $\mathbb{C}^{n+3}$ (privit drept complexificatul lui $\mathbb{R}^{n+3}$) [C25] ; in particular, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, hipersfera S^{4n+3} este o varietate co-CR cuaternionică al cărei spaţiu twistor este $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^{2n+1}$ (pentru $n=0$ se obţine S^3 cu structura sa Einstein–Weyl clasică).

V. *Contribuţii la geometria complexă generalizată.* In [C21] , am introdus o noţiune adecvată de aplicaţie olomorfă, între varietăţi complexe generalizate, bazîndu-ne pe următoarele considerente. Orice structură complexă generalizată liniară determină o structură co-CR liniară şi o structură Poisson liniară, invariante în raport cu B-transformările liniare. In plus, structura complexă generalizată liniară este determinată de aceste două structuri, pînă la B-transformări liniare. In concordanţă, o aplicaţie între varietăţi aproape complexe generalizate este *olomorfă (in sens generalizat)* dacă diferenţiala sa este un morfism Poisson co-CR liniar, în fiecare punct. Urmează că, teorema Darboux generalizată poate fi întărită pentru a obţine:

• pe o mulţime deschisă şi densă, orice aplicaţie olomorfă între varietăţi complexe generalizate este, local şi pînă la B-transformări, produsul unei aplicaţii olomorfe (clasice) cu un morfism Poisson între varietăţi simplectice [C21] .

Este evident că există două moduri posibile de a forma produsul cartezian a două varietăţi Kähler generalizate. Astfel, primul produs a două varietăţi Kähler (clasice) este tot o varietate Kähler, în timp ce al doilea produs este Kähler doar in sens generalizat (presupunînd că cei doi factori au dimensiunea strict pozitivă). Am obţinut următoarea caracterizare a varietăţilor Kähler generalizate astfel obţinute:

• orice varietate Kähler generalizată pentru care cele două structuri hermitiene asociate comută este, local şi pînă la o unică B-transformare, al doilea produs a două varietăţi Kähler [C21] .

Deasemenea, în [C24], am iniţiat studiul *varietăţilor cuaternionice generalizate* prin clasificarea spaţiilor vectoriale cuaternionice generalizate şi prin evidenţierea a două clase naturale de asemenea varietăţi (neclasice):

• Oricărui spaţiu vectorial CR cuaternionic şi oricărui spaţiu vectorial simplectic complex li se asociază, în mod natural, cîte un spaţiu vectorial cuaternionic generalizat. Mai mult, pîna la o B-transformare liniară, orice spaţiu vectorial cuaternionic generalizat este un produs în care un factor este dat de un spaţiu vectorial CR cuaternionic, iar ceilalţi factori sunt daţi de spaţii vectoriale simplectice complexe; în plus, factorii sunt unici pînă la o reordonare [C24].

• Orice varietate simplectică complexă este inzestrată cu o structură cuaternionică generalizată naturală; urmează că, produsul oricărei varietăţi simplectice complexe cu sfera Riemann este, în mod canonic, o varietate complexă generalizată [C24].

• Spaţiul heaven al oricărui spaţiu Einstein–Weyl tridimensional este înzestrat cu o structura cuaternionică generalizată naturală [C24].