MEMORIU DE ACTIVITATE

Laurenţiu Leuştean

1 Cercetări în proof mining

Actualul meu domeniu de cercetare este *proof mining*, o paradigmă dezvoltată de Ulrich Kohlenbach în anii '90, având ca scop extragerea conţinutului finitar şi combinatorial din demonstraţii care folosesc principii infinitare. Noua informaţie obţinută este atât de natură cantitativă, cum ar fi algoritmi şi margini efective, dar şi de natură calitativă, cum ar fi uniformităţi ale marginilor şi premize mai slabe. Această direcţie de cercetare îşi are rădăcinile în programul lui Kreisel de *desfăşurare a demonstraţiilor (unwinding of proofs)*, iniţiat în anii '50.

Recent, Terence Tao [91] a propus ca direcţie de cercetare *analiza hard*, bazată pe argumente finitare, în locul argumentelor infinitare din *analiza soft*, având ca inspiraţie metodele folosite de el şi Green [37] pentru a demonstra că mulţimea numerelor prime conţine progresii aritmetice de lungime finită arbitrară. Proof mining ne permite să obţinem rezultate din analiza hard, după cum observă şi Tao [91]: *"There are rigorous results from proof theory, such as Herbrand's theorem, which can allow one to automatically convert certain types of qualitative arguments into quantitative ones.*

Aplicaţiile proof mining constau în preprocesarea demonstraţiei matematice originale astfel încât enunţul teoremei şi principalele concepte să aibă forma logică potrivită, urmată de identificare paşilor cheie în demonstraţie, cărora li se dă o interpretare computaţională. Ca rezultat obţinem demonstraţii directe pentru versiunile cantitative explicite ale rezultatelor originale, demonstraţii matematice elementare, care nu conţin instrumente din logică. În contextul acestor aplicaţii, metateoreme logice generale au fost obţinute de Kohlenbach [52, 53] şi Gerhardy şi Kohlenbach [31, 32], având următoarea formă: dacă un anumit enunţ este demonstrat într-un sistem formal asociat unei structuri matematice abstracte (de exemplu, spaţii metrice, CAT(0), Hilbert sau W-hiperbolice, spaţii Banach (uniform convexe)), atunci din demonstraţie se pot extrage margini efective uniforme. Importanţa metateoremelor constă în faptul că ele pot fi folosite pentru a infera rezultate noi de existenţă uniformă fără a fi necesară parcurgerea demonstraţiei rezultatului iniţial.

În continuare prezint cercetarea proprie în domeniul proof mining.

1.1 Metateoreme logice pentru alte structuri

În [68] am demonstrat metateoreme logice pentru structuri importante din teoria geometrică a grupurilor, cum ar fi *spaţiile hiperbolice* definite de Gromov [39], $\mathbb{R}$-*arborii* (introduşi de Tits [93]), precum şi spaţiile UCW-hiperbolice. Spaţiile W-hiperbolice au fost definite în [52] ca spaţii metrice împreună cu o funcţie de convexitate $W : X \times X \times [0,1] \to X$ care satisface proprietăţi adecvate. După cum am remarcat în [1], spaţiile Busemann [17] sunt exact spaţiile W-hiperbolice unic geodezice. Spaţile UCW-hiperbolice sunt o clasă de spaţii W-hiperbolice uniform convexe introdusă şi studiată de mine în [69, 72] ca o generalizare naturală a spaţiilor Banach uniform convexe şi a spaţiilor CAT(0) (în particular a bilei Hilbert [36]).

De asemenea, împreună cu Kohlenbach [60] am obţinut metateoreme pentru spaţiile Banach uniform netede, structuri centrale în geometria spaţiilor Banach.

1.2 O versiune cantitativă a teoremei ergodice de medie

Reamintesc formularea în spaţii Hilbert a binecunoscutei teoreme ergodice de medie a lui von Neumann.

Teoremă *Fie H un spaţiu Hilbert şi $U : H \to H$ un operator unitar. Atunci pentru orice $x \in H$, media Cesàro $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U^i x$ converge către $P_{Fix(U)}x$, proiecţia lui x pe mulţimea punctelor fixe ale lui U.*

Dacă $\mathcal{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ este un spaţiu de probabilitate care păstrează măsura, $H = L^2(\mathcal{X})$ şi $U = U_T$:

$L^2(\mathcal{X}) \to L^2(\mathcal{X})$, $f \mapsto f \circ T$ este operatorul indus, media Cesàro pornind din $f \in L^2(\mathcal{X})$ devine media ergodică $A_n f = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$.

Avigad, Gerhardy şi Towsner [2] au arătat că nu putem obţine în general rate calculabile de convergenţă. În această situaţie, se consideră următoarea reformulare echivalentă a proprietăţii lui (x_n) de a fi Cauchy:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall i, j \in [N, N + g(N)] \quad \left(\|x_i - x_j\| < 2^{-k}\right).$$

Aceasta este cunoscută în logică ca fiind interpretarea *no-counterexample* [63, 64] a proprietăţii Cauchy şi a fost popularizată în ultimii ani sub numele de *metastabilitate* de Tao [91, 92]. În [92], Tao a generalizat teorema ergodică de medie la transformări multiple care păstrează măsura, demonstrând mai întâi un rezultat finitar exprimat în termeni de metastabilitate. Recent, Walsh [94] a folosit din nou metastabilitatea pentru a obţine L^2-convergenţa mediilor ergodice polinomiale multiple asociate unor grupuri nilpotente de transformări care păstrează măsura. Metateoremele logice arată că pentru o largă clasă de demonstraţii, putem extrage o *rată de metastabilitate*, adică o margine superioară $\Phi(\varepsilon, g)$ pentru $\exists N$.

În [58] am demonstrat următoarea versiune cantitativă a teoremei ergodice de medie pentru spaţii Banach uniform convexe [6].

Teoremă *Fie X un spaţiu Banach uniform convex cu modul de uniform convexitate η, $T : X \to X$ un operator liniar nonexpansiv şi $b > 0$. Atunci pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| \le b$,*

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\, \exists N \le \Phi(\varepsilon, g, b, \eta)\, \forall i, j \in [N, N + g(N)]\left(\|x_i - x_j\| < \varepsilon\right), \quad \textit{unde}$$

$\Phi(\varepsilon, g, b, \eta) = M \cdot \tilde{h}^K(1)$, cu $M = \left\lceil \frac{16b}{\varepsilon} \right\rceil$, $h(n) = 2(Mn + g(Mn))$, $\tilde{h}(n) = \max\limits_{i \le n} h(i)$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{16}\eta\left(\frac{\varepsilon}{8b}\right)$ şi $K = \left\lceil \frac{b}{\gamma} \right\rceil$.

Consecinţe imediate ale teoremei sunt rezultatele obţinute de Avigad, Gerhardy şi Towsner [2] pentru spaţii Hilbert şi de Tao [92] pentru un sistem dinamic finitar particular. Cu toate că rezultatul nostru este semnificativ mai general decât cel obţinut în [2], extragerea marginilor este considerabil mai uşoară şi chiar mai bună din punct de vedere numeric. Metoda noastră a fost folosită de Avigad şi Towsner [4] pentru a analiza teorema de structură Furstenberg-Zimmer şi de Avigad şi Rute [3] pentru a calcula margini efective pentru numărul de ε-fluctuaţii (i.e. perechi (i, j) cu $i > j$ şi $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$).

1.3 Rezultate efective în teoria ergodică neliniară

Wittmann [95] a demonstrat următorul rezultat.

Teoremă *Fie C o mulţime mărginită, convexă şi închisă a unui spaţiu Hilbert X, $T : C \to C$ o funcţie nonexpansivă şi $(\lambda_n)_{n\ge1}$ un şir în $[0, 1]$. Presupunem că (λ_n) satisface $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$. Pentru orice $x, u \in C$, definim $x_0 = x$, $\quad x_{n+1} = \lambda_{n+1}u + (1 - \lambda_{n+1})Tx_n$.*

Atunci (x_n) converge către $P_{Fix(T)}u$.

Se poate vedea uşor că (x_n) coincide cu media Cesàro atunci când T este liniară şi $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$. Iteraţia (x_n) este cunoscută ca *iteraţia Halpern*, ea fiind introdusă de Halpern [41] pentru cazul particular $u = 0$.

1.3.1 Rate uniforme de asimptotic regularitate

Primul pas în demonstraţia convergenţei tari sau slabe a unei iteraţii constă în a obţine aşa numita *regularitate asimptotică* şi acest lucru se poate face într-un cadru foarte general. Asimptotic regularitatea este un concept foarte important, introdus de Browder şi Petryshyn în anii 60' [12] pentru iteraţia Picard, dar care poate fi definit în general pentru orice iteraţie (x_n) asociată unei funcţii T pe un spaţiu metric (X, d): (x_n) este asimptotic regulară dacă $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ pentru orice $x \in X$. O rată de convergenţă a şirului $(d(x_n, Tx_n))$ către 0 va fi numită *rată de asimptotic regularitate*.

Pentru iteraţia Halpern am obţinut rate exponenţiale de asimptotic regularitate în cazul spaţiilor Banach [70] şi al spaţiilor W-hiperbolice [71]. Kohlenbach [54] a observat că demonstraţia din [70] poate fi simplificată, obţinând ca urmare o rată pătratică în spaţii Banach. Pentru spaţii CAT(0) am obţinut în [61] un rezultat cantitativ de asimptotic regularitate pentru (λ_n) general considerând în loc de $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n+1} = \infty$ condiţia echivalentă $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \lambda_{n+1}) = 0$. Ca un corolar imediat, se obţin din nou rate pătratice. Metoda folosită în [61] pentru spaţii CAT(0) nu se poate aplica în cazul spaţiilor CAT(κ) (cu $\kappa > 0$). Pentru aceste spaţii am calculat o rată exponenţială de asimptotic regularitate în [75]. În [74] am extins acest rezultat la familii finite de funcţii nonexpansive şi la spaţii (r, δ)-convexe, introduse de noi ca o generalizare a spaţiilor metrice cu o bicombing geodezică convexă.

1.3.2 Rate uniforme de metastabilitate

În [60, 61, 75] am demonstrat versiuni finitare, cu rate efective uniforme de metastabilitate pentru iteraţia Halpern, ale generalizărilor rezultatului lui Wittmann obţinute de Shioji şi Takahashi [90] pentru spaţii cu normă uniform Gâteaux diferenţiabilă, Saejung [89] pentru spaţii CAT(0) şi Piątek [84] pentru spaţii CAT(κ) (cu $\kappa > 0$). Aceste rezultate constituie o extensie semnificativă a contextului actual din proof mining, deoarece demonstraţiile din [89, 90] folosesc limite Banach, având ca inspiraţie articolul seminal al lui Lorentz [77] în care a fost introdusă aproape-convergenţa (almost convergence). Reich [86] a iniţiat folosirea aproape-convergenţei în teoria ergodică neliniară, în timp ce Bruck şi Reich [15] au aplicat pentru prima dată limitele Banach la studiul iteraţiei Halpern.

Existenţa limitelor Banach este demonstrată fie aplicând teorema Hahn-Banach spaţiului ℓ^∞, fie via ultralimite, în ambele cazuri fiind folosită axioma alegerii. În [60] am dezvoltat o metodă de a converti astfel de demonstraţii în unele elementare care nu se mai bazează pe limite Banach şi pot fi analizate cu maşinăria logică existentă. Modul în care limitele Banach sunt folosite în aceste demonstraţii pare a fi tipic pentru alte rezultate din teoria ergodică neliniară. Prin urmare, metoda noastră poate fi folosită pentru a obţine rezultate similare şi în acele cazuri.

1.4 Comportarea asimptotică a iteraţiei Kransoselski-Mann

Fie X un spaţiu Banach, $C \subseteq X$ o submulţime convexă închisă şi $T : C \to C$ o funcţie nonexpansivă. Iteraţia *Krasnoselski-Mann* [62, 78, 38] pornind din $x \in C$ se defineşte prin $x_0 = x, \quad x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n$, unde (λ_n) este un şir din $[0, 1]$. Unul din cele mai importante rezultate despre comportarea asimptotică a iteraţiei Krasnoselski-Mann este următoarea teoremă a lui Borwein, Reich şi Shafrir [7].

Teoremă *Presupunem că* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$ *şi că* $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$. *Atunci pentru orice* $x \in C$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = r_C(T)$, *unde* $r_C(T) = \inf\{\|x - Tx\| \mid x \in C\}$.

O consecinţă imediată a teoremei Borwein-Reich-Shafrir este faptul că (x_n) este asimptotic regulară dacă C este mărginită, deoarece în acest caz $r_C(T) = 0$.

În [56] am obţinut o versiune cantitativă a generalizării teoremei Borwein-Reich-Shafrir la spaţii W-hiperbolice şi funcţii direcţional nonexpansive, extinzând astfel rezultatele lui Kohlenbach [50, 51] pentru spaţii normate şi funcţii nonexpansive. Principala aplicaţie a rezultatului nostru este obţinerea unei rate efective de asimptotic regularitate pentru C mărginită şi (λ_n) satisfăcând ipotezele de mai sus. Această rată este uniformă în funcţia T, punctul iniţial x şi mulţimea mărginită C (în sensul că depinde numai de o margine superioară a diametrului lui C). În particular, dacă (λ_n) este un şir în $[1/K, 1 - 1/K]$ pentru un $K \in \mathbb{N}, K \geq 2$, rata de asimptotic regularitate este exponenţială.

Uniformitate în $x \in C$ pentru spaţii Banach şi $\lambda_n = \lambda$ a fost pentru prima dată obţinută de Edelstein şi O'Brien [23]. Ulterior, Goebel şi Kirk [34] au obţinut uniformitate în x şi T pentru (λ_n) general. În 2000, Kirk [47] a reuşit să demonstreze uniformitate în x, T pentru spaţii Banach şi funcţii directional nonexpansive numai pentru $\lambda_n = \lambda$. Niciunul din aceste articole nu calculează rate de asimptotic regularitate, uniformităţile fiind obţinute folosind scufundări funcţional-teoretice. Kirk şi Martinez-Yanez [49, p.191] menţionează explicit non-efectivitatea acestor rezultate şi afirmă că *"it seems unlikely that such estimates would be easy to obtain in a general setting"*. Nici măcar existenţa inefectivă a unei rate uniforme în C nu era cunoscută pentru (λ_n) general şi în 1990, Goebel şi Kirk conjecturau [35, p. 101] acest lucru ca fiind *"unlikely to be true"*. Numai pentru spaţii Banach şi $\lambda_n = \lambda$, uniformitate cu privire la C a fost obţinută de Baillon şi Bruck [5], care în acest caz special au calculat o rata pătratică optimală. Demonstraţia lor este foarte complicată, asistată de calculator şi numai pentru cazul $\lambda_n = 1/2$ o demonstraţie matematică clasică a fost dată de Bruck [14]. Întrebările dacă metodele folosite de Baillon şi Bruck se pot extinde la şiruri generale (λ_n) sau la spaţii geodezice sunt lăsate ca probleme deschise în [5] şi nu au primit încă răspunsuri. Aşadar, singurele rate efective pentru şiruri non-constante (λ_n) sunt cele obţinute de noi în [56].

Aceste rezultate garantează doar o rată exponenţială de asimptotic regularitate în cazul spaţiilor $CAT(0)$. În [69] am arătat că putem obţine totuşi o rată pătratică pentru aceste spaţii, urmând însă o abordare complet diferită, inspirată de rezultatul de asimptotic regularitate obţinut de Groetsch [38] pentru spaţii

Banach uniform convexe. Metoda folosită de noi este de a calcula margini explicite în contextul general al spaţiilor UCW-hiperbolice, generalizând rezultate obţinute de Kohlenbach [51] şi Kirk şi Martinez-Yanez [49]. O consecinţă imediată a rezultatului principal din [69] este

Teoremă *Fie X un spaţiu $CAT(0)$, $C \subseteq X$ mărginită convexă cu diametru d_C, $T : C \to C$ nonexpansivă şi $b \geq d_C$. Presupunem că $\lambda_n = \lambda \in (0,1)$. Atunci (x_n) este asimptotic regulară şi pentru orice $x \in C$,*

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n \geq \Psi(\varepsilon, b, \lambda) \left(d(x_n, Tx_n) < \varepsilon \right), \qquad \text{unde } \Psi(\varepsilon, b, \lambda) = \left\lceil \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{4(b+1)^2}{\varepsilon^2} \right\rceil.$$

Versiunea noastră cantitativă a teoremei Borwein-Reich-Shafrir este instrumentul cheie în [57], unde am generalizat la (familii de) submulţimi convexe nemărginite C ale spaţiilor W-hiperbolice rezultate obţinute de Kirk şi Espínola [24, 48] despre puncte fixe aproximative ale funcţiilor nonexpansive în spaţii produs $(C \times M)_\infty$, unde M este un spaţiu metric şi C este o submulţime convexă închisă mărginită a unui spaţiu normat sau CAT(0). De asemenea, am definit noţiunile de *proprietate de punct fix aproximativ uniform* şi *proprietate de asimptotic regularitate uniformă*, cu ajutorul cărora am dat un răspuns parţial unei probleme deschise a lui Kirk [48, Problem 27].

Funcţiile asimptotic nonexpansive au fost introduse de Goebel şi Kirk [33]. În [59] am demonstrat o teoremă de punct fix pentru această clasă de funcţii în spaţii UCW-hiperbolice, generalizând teoremele corespunzătoate pentru spaţii Banach uniform convexe [33] şi spaţii CAT(0) [48]. De asemenea, am obţinut rate efective de metastabilitate pentru asimptotic regularitatea iteraţiei Krasnoselski-Mann, extinzând astfel rezultatele din [55].

1.4.1 Rate de asimptotic regularitate pentru iteraţii Ishikawa

Iteraţia *Ishikawa* [43] este definită astfel: $x_0 = x, \quad x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T\big((1-s_n)x_n + s_n Tx_n\big)$, unde $(\lambda_n), (s_n)$ sunt şiruri în $[0,1]$. Considerând $s_n = 0$, obţinem iteraţia Krasnoselski-Mann ca un caz special.

În [72, 73] am obţinut rate efective de asimptotic regularitate pentru iteraţiile Ishikawa ale funcţiilor nonexpansive pe submulţimi convexe închise în spaţii UCW-hiperbolice. Aceste rezultate efective sunt noi chiar şi pentru spaţii Banach uniform convexe. Ideea este de a combina metode folosite în [69] pentru iteraţia Krasnoselski-Mann cu cele folosite în [70] pentru iteraţia Halpern. În [73] am arătat că aceste rezultate sunt garantate de o combinaţie de metateoreme logice pentru sisteme clasice [52] şi semi-intuiţioniste [31].

1.4.2 Funcţii nonexpansive tari şi iteraţii Picard

Fie X un spaţiu Banach şi $C \subseteq X$ o mulţime închisă convexă. Funcţiile *nonexpansive tari* au fost definite de Bruck [13] ca fiind acele aplicaţii $T : C \to X$ cu proprietatea că $\|Tx - Ty\| \leq \|(1-t)(Tx-Ty) + t(x-y)\|$ pentru orice $x, y \in C$ şi $t \geq 0$. În cazul spaţiilor Hilbert, ele coincid cu funcţiile contractive tari, introduse de Browder [11]. Funcţiile nonexpansive tari joacă un rol foarte important în analiza neliniară şi teoria optimizării datorită corespondenţei cu operatorii maximal monotoni, demonstrată de Minty [79].

În [1] am studiat aceste funcţii în diferite clase de spaţii geodezice, cum ar fi spaţiile UCW-hiperbolice, spaţiile Busemann şi spaţiile CAT(0). Am obţinut teoreme de punct fix şi rezultate despre comportarea asimptotică a iteraţiilor Picard ale acestor funcţii. Aplicând metode de proof mining am calculat o rată efectivă de asimptotic regularitate pentru iteraţia Picard în spaţii UCW-hiperbolice, care este pătratică în cazul spaţiilor CAT(0).

2 Alte direcţii de cercetare

2.1 Reprezentări prin fascicule ale BL-algebrelor

În 1998, Hájek [40] a introdus o logică cu mai multe valori numită *Basic Logic* (sau *BL*), cu ideea de a formaliza semantica indusă de o t-normă continuă pe $[0,1]$. Această logică se dovedeşte a fi un fragment comun pentru trei logici cu mai multe valori importante: logica Łukasiewicz, logica Gödel şi logica produs. Algebrele Lindenbaum-Tarski pentru logica BL sunt structuri algebrice ordonate numite *BL-algebre*. Reprezentările prin fascicule ale BL-algebrelor au fost subiectul tezei mele de doctorat [66].

Într-o serie de articole [80, 81, 82], Mulvey a extins conceptele de regularitate completă şi compacitate de la spaţii topologice la spaţii inelate, obţinând o extensie la *inele Gelfand* a dualităţii Gelfand. Inelele

Gelfand sunt caracterizate printr-o proprietate care poate fi formulată în termeni de algebră universală: orice ideal prim este conţinut într-un unic ideal maximal. BL-algebrele satisfac această proprietate, prin urmare problema obţinerii unor rezultate similare pentru aceste structuri este foarte naturală. În [22] am definit şi studiat fascicule compacte şi reprezentări compacte ale BL-algebrelor şi am demonstrat echivalenţa între categoria BL-algebrelor netriviale şi categoria fasciculelor de BL-algebre compacte locale, extinzând astfel rezultate obţinute pentru MV-algebre de Filipoiu şi Georgescu [25].

Reprezentarea prin *produse Booleeene (slabe)* este o reprezentare prin fascicule foarte importantă, introdusă de Burris şi Werner [16], având ca inspiraţie fasciculele Booleene studiate în teoria inelelor de Pierce [85] şi Dauns şi Hofmann [19]. În [21] am abordat următoarea problemă: fiind dată o clasă $\mathcal{K}$ de BL-algebre, să se caracterizeze produsele Booleeene (slabe) de membri ai lui $\mathcal{K}$. Am dat caracterizări pentru trei clase foarte importante de BL-algebre: BL-lanţuri, BL-algebre locale şi BL-algebre perfecte.

Am introdus în [67] BL-algebrele Baer ca fiind acele BL-algebre cu proprietatea că filtrele co-anulatoare sunt generate de elemente centrale; această definiţie este similară cu cea a inelelor Baer [45]. Folosind tehnici de teoria fasciculelor inspirate de construcţiile lui Keimel pentru inele şi semigrupuri [46], am arătat că orice BL-algebră A se poate scufunda într-o BL-algebră Baer, obţinută ca un produs Boolean de factori ai lui A.

2.2 Studiul structurilor reziduate

În [28] am studiat diverse clase de pseudo-BL algebre, generalizări necomutative ale BL-algebrelor definite în [20]. Am extins studiul nostru [29] la structuri reziduate necomutative mai generale, numite de noi *pseudo-hoops*, studiate şi de Bosbach în anii 60' [8, 9] sub numele de semigrupuri complementare. Pseudo BL-algebrele sunt clase particulare de pseudo-hoops.

Inspiraţi de teoria inelelor, am definit în [30] laticile reziduate maximale şi am demonstrat că orice latice reziduată maximală cu centru Boolean *lifting* este izomorfă cu un produs direct finit de latici reziduate locale. Această teoremă de structură corespunde teoremei pentru inele maximale demonstrată de Zelinsky [96, 10]. Rezultate similare au fost obţinute pentru latici distributive [27], MV-algebre [26] şi BL-algebre [66].

2.3 Logici modale trivalente

În [65] am studiat logica propoziţională modală trivalentă definită de Ostermann [83]. Am definit modele canonice şi filtrări pentru această logică, cu ajutorul cărora am obţinut proprietatea modelului finit pentru cea mai mică logica trivalentă normală.

2.4 Software engineering automat

Aceste cercetări au fost iniţiate în anii 2002 şi 2003, la NASA Ames Research Center. Subiectul lucrărilor [76, 88] a fost *certificarea* programelor pentru problema estimării stării în sisteme dinamice, o problemă importantă în industria spaţială. Metoda uzuală de a rezolva această problemă foloseşte filtrele Kalman [44] şi variante ale acestora. Am implementat un certificator de optimalitate pentru filtre Kalman, folosind Maude [18] şi demonstratorul de teoreme ITP [42]. Intrarea certificatorului este un program care (susţine că) implementează un filtru Kalman împreună cu o specificaţie şi un certificat sub formă de aserţiuni şi scripturi cu demonstraţii. La ieşire, certificatorul ne spune dacă codul implementează corect problema specificată. Am testat certificatorul nostru pe filtrul Kalman simplu, cel extins şi pe filtrul de informatţie (information filter). Am făcut de asemenea primii paşi în a combina tehnologia noastră de certificare cu *AutoFilter*, sistem dezvoltat de cercetătorii de la NASA Ames.

În [87] am dezvoltat o metodologie de *testare a teoriilor* în care un demonstrator automat este folosit pentru a verifica teste pozitive (ar trebui demonstrate) şi negative (nu ar trebui demonstrate). Am aplicat aceste tehnici la teorii din sistemul de sinteză a programelor *AutoBayes*, dezvoltat la NASA Ames, şi am detectat multe inconsistenţe ascunse, majoritatea dintre ele fiind chiar bug-uri ale lui AutoBayes.

References

[1] D. Ariza-Ruiz, L. Leuştean, G. Lopez-Acedo, Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces, arXiv:1203.1432v2 [math.FA], 2012; accepted for publication in Trans. Amer. Math. Soc..

[2] J. Avigad, P. Gerhardy, H. Towsner, Local stability of ergodic averages, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 261-288.

[3] J. Avigad, J. Rute, Oscillation and the mean ergodic theorem for uniformly convex Banach spaces, arXiv:1203.4124v4 [math.DS], 2013, accepted for publication in Ergodic Theory and Dynamical Systems.

[4] J. Avigad, H. Towsner, Metastability in the Furstenberg-Zimmer tower with Henry Towsner, Fundamenta Mathematicae 210 (2010), 243-268.

[5] J. Baillon, R.E. Bruck, The rate of asymptotic regularity is $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, in: A.G. Kartsatos (ed.), Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 178, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996, 51–81.

[6] G. Birkhoff, The mean ergodic theorem, Duke Math. J. 5 (1939), 19–20.

[7] J. Borwein, S. Reich, I. Shafrir, Krasnoselski-Mann iterations in normed spaces, Canad. Math. Bull 35 (1992), 21–28.

[8] B. Bosbach, Komplementäre Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, Fundamenta Math. 64 (1969), 257-287.

[9] B. Bosbach, Komplementäre Halbgruppen. Kongruenzen and Quotienten, Fundamenta Math. 69 (1970), 1-14.

[10] W. Brandal, Commutative rings whose finitely generated modules decompose, Lecture Notes in Mathematics 723 (1979), Springer, Berlin.

[11] F.E. Browder, Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces, Math. Zeitschrift 100 (1967), 201-225.

[12] F.E. Browder, W.V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 571–575.

[13] R. E. Bruck, Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces, Pacific J. Math. 47 (1973), 341-355.

[14] R.E. Bruck, A simple proof that the rate of asymptotic regularity of $(I+T)/2$ is $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, in: T. Domínguez Benavides (ed.), Recent advances on metric fixed point theory. Proceedings of the International Workshop held at the University of Seville, Seville, September 25–29, 1995, Ciencias 48, Universidad de Sevilla, Seville, 1996, 11–18.

[15] R.E. Bruck, S. Reich, Accretive operators, Banach limits, and dual ergodic theorems, Bull. Acad. Polon. Sci. 29 (1981), 585–589.

[16] S. Burris, H. Werner, Sheaf constructions and their elementary properties, Trans. Am. Math. Soc. 248 (1979), 269-309.

[17] H. Busemann, Spaces with nonpositive curvature, Acta Math. 80 (1948), 259-310.

[18] M. Clavel, F. Durán, S. Eker, P. Lincoln, N. Marti-Oliet, J. Meseguer, C. Talcott, Maude Manual (Version 2.5), June 2010, `http://maude.cs.uiuc.edu`.

[19] J. Dauns, K. H. Hofmann, The representation of biregular rings by sheaves, Math. Z. 91 (1966), 103-123.

[20] A. Di Nola, G. Georgescu, A. Iorgulescu, Pseudo-BL algebras: Part I, Multiple-Valued logic 8 (2002), 673-714.

[21] A. Di Nola, G. Georgescu, L. Leuştean, Boolean products of BL-algebras, J. Math. Anal. Appl. 251 (2000), 106-131.

[22] A. Di Nola, L. Leuştean, Compact representations of BL-algebras, Archive for Mathematical Logic 42 (2003), 737-761.

[23] M. Edelstein, R.C. O'Brien, Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations, J. London Math. Soc. 17 (1978), 547–554.

[24] R. Espínola, W. A. Kirk, Fixed points and approximate fixed points in product spaces, Taiwanese J. Math. 5 (2001), 405–416.

[25] A. Filipoiu, G. Georgescu, Compact and Pierce representations of MV-algebras, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 40 (1995), 599-618.

[26] A. Filipoiu, G. Georgescu, A. Lettieri, Maximal MV-algebras, Mathware Soft Comput. 4 (1997), 53-62.

[27] G. Georgescu, Finite products of local maximal lattices, Math. Japonica 37 (1991), 913-917.

[28] G. Georgescu, L. Leuştean, Some classes of pseudo-BL algebras, J. Aust. Math. Soc. 73 (2002), 127-153.

[29] G. Georgescu, L. Leuştean, V. Preoteasa, Pseudo-hoops, J. Multiple-Valued Logic and Soft Computing 11 (2005), 153-184.

[30] G. Georgescu, C. Mureşan, L. Leuştean, Maximal residuated lattices with lifting Boolean center, Algebra Universalis 63 (2010), 83-99.

[31] P. Gerhardy, U. Kohlenbach, Strongly uniform bounds from semi- constructive proofs, Ann. Pure Applied Logic 141 (2006), 89-107.

[32] P. Gerhardy, U. Kohlenbach, General logical metatheorems for functional analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 2615–2660.

[33] K. Goebel, W.A. Kirk, A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 171–174.

[34] K. Goebel, W.A. Kirk, Iteration processes for nonexpansive mappings, in: S.P. Singh, S. Thomeier, B. Watson (eds.), Topological methods in nonlinear functional analysis. Proceedings of the special session on fixed point theory and applications held during the 86th summer meeting of the American Mathematical Society at the University of Toronto, Toronto, Ont., August 21-26, 1982, Contemp. Math. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, 115–123.

[35] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge studies in advanced mathematics 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[36] K. Goebel, S. Reich, Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1984.

[37] B. Green, T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, Ann. of Math. (2) 167 (2008), 481–547.

[38] C.W. Groetsch, A note on segmenting Mann iterates, J. Math. Anal. Appl. 40 (1972), 369–372.

[39] M. Gromov, Hyperbolic groups, in: S.M. Gersten, (ed.), Essays in group theory: papers from a seminar held in Berkeley in June 1985, MSRI Publ. 8, Springer-Verlag, New York, 1987, 75–263.

[40] P. Hájek, Metamathematics of Fuzzy Logic, Trends in Logic 4 (1998), Kluwer.

[41] B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 957–961.

[42] J. Hendrix. Decision Procedures for Equationally Based Reasoning, PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2008, `http://maude.cs.uiuc.edu/tools/itp/`.

[43] S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 147–150.

[44] R.E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering 82 (1960), 35-45.

[45] I. Kaplansky, Rings of operators, Mathematics Lecture Notes Series, W.A. Benjamin, 1968.

[46] K. Keimel, Baer extensions of rings and Stone extensions of semigroups, Semigroup Forum 2 (1971), 55-63.

[47] W. A. Kirk, Nonexpansive mappings and asymptotic regularity, Nonlinear Anal. 40 (2000), 323–332.

[48] W.A. Kirk, Geodesic geometry and fixed point theory II, in: J. Garcia Falset, E. Llorens Fuster, B. Sims (eds.), International Conference on Fixed Point Theory and Applications. Proceedings of the conference held in Valencia, July 13–19, 2003, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, 113-142.

[49] W. A. Kirk, C. Martinez-Yanez, Approximate fixed points for nonexpansive mappings in uniformly convex spaces, Annales Polonici Mathematici 51 (1990), 189-193.

[50] U. Kohlenbach, A quantitative version of a theorem due to Borwein-Reich-Shafrir, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 22 (2001), 641–656.

[51] U. Kohlenbach, Uniform asymptotic regularity for Mann iterates, J. Math. Anal. Appl. 279 (2003), 531–544.

[52] U. Kohlenbach, Some logical metatheorems with applications in functional analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 89–128.

[53] U. Kohlenbach, A logical uniform boundedness principle for abstract metric and hyperbolic spaces, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 165 (2006), 81–93.

[54] U. Kohlenbach, On quantitative versions of theorems due to F.E. Browder and R. Wittmann, Adv. Math. 226 (2011), 2764-2795.

[55] U. Kohlenbach, B. Lambov, Bounds on iterations of asymptotically quasi-nonexpansive mappings, in: J. Garcia Falset, E. Llorens Fuster, B. Sims (eds.), International Conference on Fixed Point Theory and Applications. Proceedings of the conference held in Valencia, July 13–19, 2003, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, 143–172.

[56] U. Kohlenbach, L. Leuştean, Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces, Abstract and Applied Analysis 2003 (2003), 449–477.

[57] U. Kohlenbach, L. Leuştean, The approximate fixed point property in product spaces, Nonlinear Anal. 66 (2007), 806-818.

[58] U. Kohlenbach, L. Leuştean, A quantitative Mean Ergodic Theorem for uniformly convex Banach spaces, Ergodic Theory and Dynamical Systems 29 (2009), 1907-1915: Erratum : 29 (2009), 1995.

[59] U. Kohlenbach, L. Leuştean, Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces, J. European Math. Soc. 12 (2010), 71-92.

[60] U. Kohlenbach, L. Leuştean, On the computational content of convergence proofs via Banach limits, Philosophical Transactions of the Royal Society A 370 (2012), No. 1971, 3449-3463.

[61] U. Kohlenbach, L. Leuştean, Effective metastability of Halpern iterates in CAT(0) spaces, Advances in Math. 231 (2012), 2526-2556.

[62] M. A. Krasnoselski, Two remarks on the method of successive approximation, Usp. Math. Nauk (N.S.) 10 (1955), 123–127 (in Russian).

[63] G. Kreisel, On the interpretation of non-finitist proofs. I, J. Symbolic Logic 16 (1951), 241–267.

[64] G. Kreisel, On the interpretation of non-finitist proofs. II. Interpretation of number theory. Applications, J. Symbolic Logic 17 (1952), 43–58.

[65] L. Leuştean, Canonical models and filtrations in three-valued propositional modal logic, Multiple-Valued Logic 8 (2002), 577-590.

[66] L. Leuştean, Representations of many-valued algebras, PhD Thesis, University of Bucharest, 2004.

[67] L. Leuştean, Baer extensions of BL-algebras, J. Multiple-Valued Logic and Soft Computing 12 (2006), 321-336.

[68] L. Leuştean, Proof mining in $\mathbb{R}$-trees and hyperbolic spaces, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 165 (2006), 95-106.

[69] L. Leuştean, A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT(0)-spaces, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 386-399.

[70] L. Leuştean, Rates of asymptotic regularity for Halpern iterations of nonexpansive mappings, in: C.S. Calude, G. Stefanescu, M. Zimand (eds.), Combinatorics and related areas. A collection of papers in honor of the 65th birthday of Ioan Tomescu, Journal of Universal Computer Science 13 (2007), 1680-1691.

[71] L. Leuştean, Proof mining in metric fixed point theory and ergodic theory, Habilitation thesis, Technische Universität Darmstadt, 2009.

[72] L. Leuştean, Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces, in: A. Leizarowitz, B. S. Mordukhovich, I. Shafrir, A. Zaslavski (eds.), Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Cont. Math. 513, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 193-209.

[73] L. Leuştean, An application of proof mining to nonlinear iterations, arXiv:1211.2991v2 [math.LO], 2012.

[74] L. Leuştean, A. Nicolae, Effective results on compositions of nonexpansive mappings, arXiv:1306.5307 [math.FA], 2013; accepted for publication in Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[75] L. Leuştean, A. Nicolae, Effective results on nonlinear ergodic averages in CAT(k) spaces, arXiv:1305.5916 [math.FA], 2013.

[76] L. Leuştean, G. Roşu, Certifying Kalman Filters, RIACS Technical Report TR.03.02, Research Institute for Advanced Computer Science (RIACS), NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA, USA, January 2003, 53p.

[77] G.G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent series, Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[78] W. R. Mann, Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 506–510.

[79] G.J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J. 29 (1962), 341-346.

[80] C. J. Mulvey, Compact ringed spaces, J. Algebra 52 (1978), 411-436.

[81] C. J. Mulvey, Representations of rings and modules, in M. P. Fourman, C. Mulvey, D. Scott: Applications of sheaves, Lecture Notes in Mathematics 753 (1979), Springer, 542-585.

[82] C. J. Mulvey, A generalization of Gelfand duality, J. Algebra 56 (1979), 499-505.

[83] P. Ostermann, Many-valued propositional calculi, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Math. 34 (1988), 345–354.

[84] B. Piątek, Halpern iteration in CAT(κ) spaces, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27 (2011), 635-646.

[85] R. S. Pierce, Modules over commutative regular rings, Memoirs Am. Math. Soc. 70 (1967).

[86] S. Reich, Almost convergence and nonlinear ergodic theorems, J. Approx. Theor. 24 (1978), 269-272.

[87] J. Richardson, L. Leuştean, Detecting errors in domain theories, draft, 2003.

[88] G. Roşu, R. Prasad Venkatesan, J. Whittle, L. Leuştean, Certifying optimality of state estimation programs, in W. A. Hunt Jr., F. Somenzi (Editors): Computer Aided Verification, 15th International Conference, CAV 2003, Boulder, CO, USA, July 8-12, 2003, Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2725 (2003), Springer, 301-314.

[89] S. Saejung, Halpern iterations in CAT(0) spaces, Fixed Point Theory and Applications 2010 (2010), Article ID 471781, 13pp.

[90] N. Shioji, W. Takahashi, Strong convergence of approximate sequences for nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 3641–3645.

[91] T. Tao, Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle, 2007, `terrytao.wordpress.com/2007/05/23/soft-analysis-hard-analysis-and-the-finite-convergence-principle/`.

[92] T. Tao, Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations, Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), 657-688.

[93] J. Tits, A theorem of Lie-Kolchin for trees, in: H. Bass, P. Cassidy, J. Kovacic (eds.), Contributions to algebra. A collection of papers dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press, New York-London, 1977, 377–388.

[94] M. Walsh, Norm convergence of nilpotent ergodic averages, Annals of Math. 175 (2012), 1667–1688.

[95] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. 58 (1992), 486–491.

[96] D. Zelinski, Linearly compact modules and rings, Amer. J. Math. 75 (1953), 79–90.