BB39

Inele cu proprietatea de aproximare

Mihai Cipu

CAPITOLUL 1

Inele henseliene

1. Definiţia inelelor henseliene

Pentru un element a al unui inel local (A, M, K) vom nota cu $\overline{a}$ imaginea sa în corpul rezidual. Dacă F este un polinom cu coeficienţi în A, vom nota cu $\overline{F}$ imaginea sa în inelul de polinoame cu coeficienţi în corpul rezidual al inelului, polinom obţinut prin reducerea coeficienţilor modulo idealul maximal.

Definiţie 1.1. Un inel local (A, M, K) se numeşte *henselian* dacă îndeplineşte condiţia:

(H) Dacă $F \in A[X]$ este un polinom unitar al cărui redus $\overline{F}$ este produsul a două polinoame unitare g şi h din $K[X]$ prime între ele, atunci există polinoame unitare G, $H \in A[X]$ astfel ca $\overline{G} = g$, $\overline{H} = h$ şi $F = GH$.

În notaţiile condiţiei (H), polinoamele G şi H sunt prime între ele şi unic determinate. Faptul că sunt coprime se obţine în modul următor. Din $A[X]/MA[X] \simeq K[X]$ şi g, h coprime rezultă $(G, H)A[X] + MA[X] = A[X]$. Deoarece $A[X]/(G, H)$ este A-modul finit (generat de clasele puterilor lui X de grad strict mai mic decât $\min(\deg g, \deg h)$), lema lui Nakayama implică $(G, H)A[X] = A[X]$. Săobservăm că nu a fost utilizată informaţia referitoare la produsul lui G şi H, nu s-a folosit decât că G, H sunt unitare şi au imaginile în $K[X]$ comaximale. Pentru a arăta unicitatea lor, presupunem că polinoamele unitare G', $H' \in A[X]$ au proprietăţile $F = G'H'$, $\overline{G'} = g$ şi $\overline{H'} = h$. Atunci G şi H' sunt coprime, deci există P, $Q \in A[X]$ astfel ca $1 = PG + QH'$. Rezultă $H = PGH + QHH' = (PG' + QH)H'$, încât H' divide H. Analog se obţine că H' divide H. Întrucât ambele sunt polinoame unitare de acelaşi grad (gradul lui h), conchidem că $H = H'$.

O altă observaţie legată de polinoamele cu proprietăţile specificate în condiţia (H): conform lemei chineze a resturilor, A-algebra liberă şi finită $B := A[X]/(F)$ este canonic izomorfă cu produsul A-algebrelor $A[X]/(G)$ şi $A[X]/(H)$, deoarece $(F) = (G) \cap (H)$ şi $(G) + (H) = A[X]$. De fapt, are loc şi reciproca:

Lema 1.2. *Fie (A, M, K) un inel local, $F \in A[X]$ unitar şi $B := A[X]/(F)$. Dacă B este produsul direct a două A-algebre C şi D, atunci* *există G, $H \in A[X]$ unitare, coprime, al căror produs este F şi astfel că $C \simeq A[X]/(G)$, $D \simeq A[X]/(H)$ ca A-algebre.*

Demonstraţie. Din $B = C \times D$ rezultă existenţa în B a idempotenţilor ortogonali e şi f de sumă 1, pentru care $C \simeq eB$, $D \simeq fB$ ca A-algebre. Evident, idealele eB şi fB dau o descompunere de forma $B = eB \oplus fB$. Notând cu x imaginea variabilei X în B, din faptul că orice element al lui eB este de forma $eP(x) = eP(ex)$ pentru un anumit polinom P din $A[X]$ se deduce că ex generează A-algebra eB.

Tensorizând cu corpul rezidual peste A, se obţine descompunerea $\overline{B} = \overline{e}\overline{B} \oplus \overline{f}\overline{B}$, în care sumanzii sunt K-spaţii vectoriale finit dimensionale (pentru că B este o A-algebră liberă şi finită) şi K-algebre monogene, generate de $\overline{ex}$ şi respectiv $\overline{f}\overline{x}$. Fie s şi t numere naturale astfel că $\overline{e}, \overline{ex}, \ldots, \overline{ex}^{s-1}$ (resp. $\overline{f}, \overline{f}\overline{x}, \ldots, \overline{f}\overline{x}^{t-1}$) constituie bază pentru K-spaţiul vectorial $\overline{e}\overline{B}$ (resp. $\overline{f}\overline{B}$). Conform lemei lui Nakayama, e, $ex, \ldots, ex^{s-1}$, $f, fx, \ldots, fx^{t-1}$ generează A-modulul liber B. Întrucât $s + t$ coincide cu gradul lui F, deci cu rangul lui B, aceşti generatori formează o bază. Tot din lema lui Nakayama se deduce că $e, ex, \ldots,$ ex^{s-1} (resp. $f, fx, \ldots, fx^{t-1}$) constituie o bază pentru A-modulul eB (resp. fB).

Se consideră polinoamele unitare G, $H \in A[X]$ de grad s, resp. t, astfel ca $eG(x) = 0$ şi $fH(x) = 0$. Din $G(x) = eG(x) + fG(x) = fG(x)$ şi $H(x) = eH(x)$ rezultă $G(x)H(x) = 0$, astfel că GH este multiplu de F. Cum F şi GH sunt polinoame unitare de acelaşi grad, ele coincid. Prin urmare, $C \simeq eB \simeq A[X]/(G)$, $D \simeq fB \simeq A[X]/(H)$. Raţionamentul utilizat mai sus demonstrează că polinoamele G şi H sunt coprime.

□

Rafinând descompunerea lui $\overline{F}$ în $K[X]$, se obţine $\overline{F} = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$, cu f_i polinoame ireductibile unitare distincte din $K[X]$ şi r, e_i ($i = 1, \ldots, r$) numere naturale nenule. Aşadar,

$$\overline{B} \simeq K[X]/(\overline{F}) \simeq \prod_{k=1}^{r} K[X]/(f_k^{e_k}),$$

unde fiecare K-algebră $K[X]/(f_k^{e_k})$ este locală, de ideal maximal generat de imaginea lui f_k.

Pentru A inel henselian vor exista ridicări unitare $F_1, \ldots, F_r$ pentru $f_1^{e_1}, \ldots, f_r^{e_r}$, astfel ca $F = F_1 \cdots F_r$. Deoarece polinoamele F_k generează în $A[X]$ ideale două câte două comaximale, are loc descompunerea

$$B \simeq \prod_{k=1}^{r} A[X]/(F_k),$$

cu fiecare A-algebră $B_k := A[X]/(F_k)$ locală (pentru că reducerea sa modulo M este locală). Vom arăta că această proprietate este caracteristică pentru inelele henseliene.

Fie B o algebră finită peste un inel local (A, M, K). Atunci B este inel semilocal (pentru că $\overline{B}$ este inel artinian, fiind algebră finită peste corpul rezidual K), ale cărui ideale maximale $N_1, \dots, N_r$ stau peste M. Morfismul canonic

$$B \longrightarrow \prod_{k=1}^{r} B_{N_k} \tag{1}$$

este injectiv. Se spune că B este *decompozabilă* dacă morfismul (1) este bijectiv. O condiţie echivalentă este ca în B să existe idempotenţi $e_1, \dots, e_r$ ortogonali şi de sumă 1, astfel ca pentru fiecare k, $1 \leq k \leq r$, imaginea lui e_k într-un localizat B_{N_j} este 1 sau 0, după cum $j = k$ sau $j \neq k$. Aceşti idempotenţi sunt unic determinaţi şi se numesc *idempotenţii elementari ai A-algebrei finite şi decompozabile B.*

Notăm că morfismul

$$\overline{B} \longrightarrow \prod_{k=1}^{r} \overline{B}_{N_k} \tag{2}$$

dedus din (1) prin tensorizare cu K peste A este totdeauna bijectiv. Afirmaţia rezultă din teorema de structură pentru inele artiniene.

Rezultatul următor furnizează caracterizări utile pentru algebrele finite şi decompozabile. Vom nota cu $\mathrm{Idem}(B)$ mulţimea idempotenţilor A-algebrei B. Întrucât o imagine omomorfă de idempotent rămâne idempotent în algebra cosursă, orice morfism de A-algebre $B \longrightarrow C$ induce o aplicaţie de mulţimi $\mathrm{Idem}(B) \longrightarrow \mathrm{Idem}(C)$.

LEMA 1.3. *Pentru (A, M, K) inel local şi B o A-algebră finită, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *B este decompozabilă.*
(*ii*) *B este un produs direct finit de inele locale.*
(*iii*) *Aplicaţia canonică* $\mathrm{Idem}(B) \longrightarrow \mathrm{Idem}(\overline{B})$ *este bijectivă.*
(*iv*) *Orice descompunere a lui $\overline{B}$ în produsul direct a două K-algebre se ridică la o descompunere a lui B în produsul a două A-algebre.*

DEMONSTRAŢIE. Echivalenţa primelor două condiţii rezultă din descrierea idealelor dintr-un produs direct $B = \prod_{k=1}^{r} B_k$: orice ideal prim (resp. maximal) din B este de forma $P_j \times \prod_{k \neq j} B_k$, cu P_j ideal prim (resp. maximal) al lui B_j.

Pentru a demonstra echivalenţa condiţiilor (*i*) şi (*iii*), vom folosi observaţia cu caracter general: aplicaţia $\mathrm{Idem}(B) \longrightarrow \mathrm{Idem}(\overline{B})$ este totdeauna injectivă. Într-adevăr, dacă e şi f sunt idempotenţi din Ba cu diferenţa d, un calcul direct arată că $d^3 = d$, astfel că $d(1 - d^2) = 0$. Am notat, însă, că extinsul lui M la algebra finită B este conţinut în radicalul Jacobson al lui B. Prin urmare, dacă d aparţine idealului MB, atunci $1 - d^2$ este element inversabil în B şi rezultă $d = 0$.

Deoarece morfismele (1) şi (2) pot fi inserate în diagrama comutativă cu morfismele verticale canonice,

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \prod_{k=1}^{r} B_{N_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{B} & \longrightarrow & \prod_{k=1}^{r} \overline{B}_{N_k} \end{array}$$

rezultă că B este decompozabilă dacă şi numai dacă idempotenţii elementari ai K-algebrei $\overline{B}$ se ridică în B. Demonstraţia echivalenţei condiţiilor (i) şi (iii) se încheie cu observaţia că orice idempotent din $\overline{B}$ este suma unor idempotenţi elementari.

□

Putem acum demonstra o primă serie de condiţii echivalente cu henselianitatea.

Propoziţie 1.4. *Pentru un inel local* (A, M, K)*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *A este inel henselian.*
(ii) *Orice A-algebră finită B este decompozabilă.*
(iii) *Orice A-algebră finită şi liberă B este decompozabilă.*
(iv) *Orice A-algebră finită de forma $B = A[X]/(F)$, $F \in A[X]$ unitar, este decompozabilă.*

Demonstraţie. Echivalenţa dintre henselianitatea inelului A şi condiţia (iv) rezultă folosind lema 1.2 şi observaţiile ce o preced. Singura implicaţie neevidentă este $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Să presupunem A inel henselian. Având în vedere condiţia (iii) din lema precedentă, este suficient să probăm că orice idempotent e din $\overline{B}$ se ridică la un idempotent din B. Fie b o ridicare arbitrară a lui e la B. Atunci A-algebra $C := A[b]$ este finită, iar imaginea $\overline{D}$ în $\overline{B}$ a K-algebrei finite $\overline{C}$ conţine pe e. Fiind inel artinian, $\overline{C}$ este decompozabilă, astfel că e se poate ridica la un idempotent f în $\overline{D}$. Pe de altă parte, C este decompozabilă fiind câtul unei A-algebre de forma $A[X]/(F)$, care este decompozabilă în virtutea faptului, deja stabilit, că $(i) \Longrightarrow (iv)$. Prin urmare, f se ridică la un idempotent în $C \subseteq B$.
DE VERIFICAT □

Folosind tranzitivitatea algebrelor finite, rezultă

Corolar 1.5. *Orice algebră finită peste un inel local henselian este un produs direct finit de inele locale henseliene.*

Am constatat relevanţa idempotenţilor unei algebre finite în studiul henselianităţii. Să examinăm obstrucţia existentă în general la ridicarea idempotenţilor.

Fie B o algebră liberă de rang finit peste un inel local A şi $b_1, \ldots, b_n$ o bază a A-modulului B. Pentru ca un element $e = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ al lui B să fie idempotent, este necesar şi suficient ca $a_1, \ldots, a_n$ să satisfacă un sistem de ecuaţii de forma $F_j(X_1, \ldots, X_n) = 0$, $1 \leq j \leq n$, unde F_j sunt polinoame de grad cel mult doi, unic determinate de tabla înmulţirii elementelor $b_1, \ldots, b_n$. Fie

$$:= A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_n). \tag{3}$$

Pentru orice A-algebră C, $B \otimes_A C$ este C-algebră liberă de bază $b_1 \otimes 1, \ldots, b_n \otimes 1$. Aşadar, $e = \sum_{k=1}^{n} b_k \otimes c_k$, $c_k \in C$, va fi idempotent în $B \otimes_A C$ dacă şi numai dacă $F_j(c_1, \ldots, c_n) = 0$, $1 \leq j \leq n$. În consecinţă, asocierea $X_k \mapsto c_k$, $1 \leq j \leq n$, defineşte unic morfism de A-algebre $u : EB \longrightarrow C$.

Reciproc, fiind dat $u \in \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(EB, C)$, se notează x_k imaginea variabilei X_k în A-algebra EB şi se găseşte $e := \sum_{k=1}^{n} b_k \otimes u(x_k)$ idempotent în $B \otimes_A C$. Se verifică uşor că astfel se obţine un izomorfism

$$\mathrm{Idem}(B \otimes_A C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(EB, C) \tag{4}$$

functorial în C. Altfel spus, functorul $C \mapsto \mathrm{Idem}(B \otimes_A C)$ de la categoria A-algebrelor în categoria mulţimilor este reprezentabil.

Proprietatea algebrei EB pusă în evidenţă de rezultatul următor joacă un rol proeminent în studiul inelelor henseliene.

LEMA 1.6. *A-algebra de prezentare finită EB este etală.*

DEMONSTRAŢIE. Fie C o A-algebră şi $J \leq C$ un ideal de pătrat nul. A spune că aplicaţia canonică

$$\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(EB, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(EB, C/J)$$

este bijectivă revine la a spune că aplicaţia

$$\mathrm{Idem}(B \otimes_A C) \longrightarrow \mathrm{Idem}(B \otimes_A (C/J))$$

este bijectivă, ceea ce rezultă din observaţia următoare. $\square$

LEMA 1.7. *Fie J un ideal de pătrat nul într-un inel C. Atunci aplicaţia canonică $\mathrm{Idem}(C) \longrightarrow \mathrm{Idem}(C/J)$ este bijectivă.*

DEMONSTRAŢIE. Am constatat că pentru orice e, $f \in \mathrm{Idem}(C)$, $d := e - f$ coincide cu cubul său. Dacă $d \in J$ şi $J^2 = 0$, atunci $d = 0$. În ipotezele lemei, aceasta înseamnă că aplicaţia din enunţ este injectivă. Pentru a proba surjectivitatea, se consideră $e \in \mathrm{Idem}(C/J)$ şi c o ridicare a sa în C. Vom determina $h \in J$ astfel ca $h + c$ să fie idempotent. Scriind condiţia, se obţine $h(1 - 2c) = c^2 - c \in J$. Demonstraţia se încheie observând că $1 - 2c$ este inversabil în C întrucât $(1 - 2c)(1 + 2c - 12c^2 + 8c^3) = 1 - 16(c^2 - c)^2 = 1$. $\square$

Un alt exemplu de algebră etală ce va interveni semnificativ în cele ce urmează este produs de următoarea construcţie. Pentru R un inel arbitrar şi $F \in R[X]$, se notează x imaginea variabilei X în R-algebra $R[X]/(F)$. Dacă $S \subseteq R[x]$ este un sistem multiplicativ închis ce conţine $F'(x)$ (unde F' notează derivata polinomului considerat), atunci $B := S^{-1}R[x]$ este R-algebră etală. Într-adevăr, pentru orice R-algebră C şi orice ideal $J \leq C$ cu $J^2 = 0$, se consideră diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A[x] \arrow[r, "i"] & B \arrow[d, "u"] \\ C \arrow[rr, "p"] & & C/J \end{tikzcd}$$

Existenţa unui morfism $v \in \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(B, C)$ ce ridică u, adică pentru care $u = pv$, este echivalentă cu existenţa unui element $c \in C$ cu proprietăţile $F(c) = 0$ şi $p(c) = u(i(x))$. Pornind de la o ridicare arbitrară d a lui $u(i(x))$ la C, vom determina $h \in J$ astfel încât $c := d + h$ să aibă ambele proprietăţi cerute. Dezvoltarea în serie Taylor are forma $F(d + h) = F(d) + hF'(d)$, pentru că ceilalţi termeni, în care intervin puteri superioare ale lui h, sunt nuli. Cum $p(F'(d)) = F'(u(i(x))) = u(i(F'(x)))$ este un element inversabil în C/J (în virtutea ipotezei $F'(x) \in S$), iar J este nilpotent, rezultă că $F'(d)$ este inversabil în C. Putem obţine $F(d + h) = 0$ alegând $h = -F(d)F'(d)^{-1}$ şi aceasta este singura opţiune, astfel că este asigurată existenţa şi unicitatea morfismului $v : B \longrightarrow C$ ce ridică u.

În contextul acestui exemplu, dacă F este un polinom unitar, iar $S = R[x] \setminus Q$, pentru Q un ideal maximal ce nu conţine $F'(x)$, atunci R-algebra $B = S^{-1}R[x] = \big(R[X]/(F)\big)_Q$ se numeşte *R-algebră locală standard.*

Importanţa acestor algebre este relevată de

TEOREMA 1.8. *(teorema de structură a algebrelor local etale) Fie (A, M, K) un inel local, B o A-algebră de prezentare finită şi $Q \in \operatorname{Spec} B$ un ideal prim ce stă peste M. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

- *(i) B este etală peste A în Q (adică există $f \in B \setminus Q$ astfel încât B_f este A-algebră etală).*
- *(ii) Există un polinom unitar $F \in A[X]$ şi un ideal maximal N în $C := A[X]/(F) =: A[x]$ cu proprietatea că $F'(x) \notin N$, iar B_Q şi C_N sunt A-algebre izomorfe.*
- *(iii) $D := B_Q$ este un localizat al unei A-algebre finite într-un ideal maximal, D este A-modul plat, iar D/MD este corp, extindere finită şi separabilă a lui K.*

O A-algebră cu proprietăţile enumerate în condiţia (iii) a acestei teoreme se numeşte *A-algebră local etală*. Dacă în plus morfismul canonic între corpurile reziduale $K = A/M \longrightarrow D/MD$ este izomorfism, D se numeşte *vecinătate local etală*. Există caracterizări asemănătoare pentru vecinătăţi local etale:

TEOREMA 1.9. *(teorema de structură a vecinătăţilor local etale) Fie (A, M, K) un inel local, B o A-algebră de prezentare finită şi $Q \in \operatorname{Spec} B$ un ideal prim ce stă peste M. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Există un polinom unitar $F \in A[X]$ şi un ideal maximal N în $C := A[X]/(F) =: A[x]$ cu proprietatea că $x \in N$, $F(0) \in M$, $F'(0) \notin M$, iar B_Q şi C_N sunt A-algebre izomorfe.*

(ii) *$D := B_Q$ este un localizat al unei A-algebre finite într-un ideal maximal, D este A-modul plat, iar morfismul canonic $K \longrightarrow D/MD$ este izomorfism.*

Dacă A este inel noetherian, aceste afirmaţii sunt echivalente cu

(iv) *D este un localizat al unei A-algebre finite într-un ideal maximal, iar morfismul canonic $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{D}$ între completatele în topologiile radiciale este izomorfism.*

DEMONSTRAŢIE. (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Deoarece B este o A-algebră plată, iar A şi B sunt inele locale, de fapt B este A-modul fidel plat, pentru că singurul ideal maximal din A nu „explodează” în B. Prin urmare, morfismul canonic $A \longrightarrow B$ este injectiv, iar $M^nB \cap A = M^n$ pentru orice $n \geq 1$. Condiţia ca A şi B să aibă corpurile reziduale izomorfe înseamnă că $A + MB = B$, de unde rezultă $A + M^nB = B$ pentru toţi $n \geq 1$. Aşadar,

$$B/M^nB = (A + M^nB)/M^nB \simeq A/(M^nB \cap A) = A/M^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

şi $\hat{A} \simeq \widehat{B}$. Completarea lui B s-a făcut în topologia radicială pentru că MB este unicul ideal maximal al lui B.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Din faptul că B este algebră finită peste inel noetherian rezultă că B este inel noetherian. Fiind vorba de topologii radiciale, $\widehat{B} \simeq \hat{A}$ este A-modul fidel plat. Cum $\widehat{B} \simeq \hat{A} \otimes_A B$ (căci B este A-modul finit generat), se obţine B-fidel plat ca A-modul.

Echivalenţa condiţiilor (i)–(iii) este demonstrată, de pildă, în [**26**]. □

Importanţa pe care o au vecinătăţile local etale în studiul inelelor henseliene este evidenţiată de următoarele rezultate.

PROPOZIŢIE 1.10. *Fie (A, M, K) un inel local şi B o A-algebră finită şi liberă, iar $\overline{B} := B/MB$. Pentru orice $e \in \operatorname{Idem}(\overline{B})$ există o vecinătate local etală C a lui A astfel încât e se ridică la un idempotent f din $B \otimes_A C$ (altfel spus, există $f \in \operatorname{Idem}(B \otimes_A C)$ a cărui imagine în $(B \otimes_A C)/M(B \otimes_A C) \simeq \overline{B}$ este e).*

Demonstraţie. A da un idempotent e în $\overline{B} = B \otimes_A K$ este echivalent cu a da un morfism de A-algebre $u : EB \longrightarrow K$. Fie $Q := \ker u$. Deoarece $EB/Q \simeq K$, $C := EB_Q$ este o vecinătate local etală a lui A. Idempotentul f căutat corespunde morfismului de localizare $EB \longrightarrow EB_Q$. $\square$

Propoziţie 1.11. *Pentru un inel local (A, M, K), următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *A este inel henselian.*
(ii) *Orice polinom unitar $F \in A[X]$ a cărui reducere $\overline{F}$ modulo M are o rădăcină simplă α în K (*i.e., $\overline{F}(\alpha) = 0$, $\overline{F}'(\alpha) \neq 0$*), are o rădăcină simplă $a \in A$ care ridică α (adică $\overline{a} = \alpha$).*
(iii) *Orice vecinătate local etală a lui A este izomorfă cu A.*

Demonstraţie. $(ii) \Longrightarrow (iii)$ Fie $F \in A[X]$ un polinom unitar cu $F(0) \in M$, $F'(0) \notin M$, $B := A[X]/(F)$, Q un ideal maximal în B ce conţine imaginea x a variabilei X în B şi $C := B_Q$. Din (ii) rezultă că F are o rădăcină simplă $a \in M$, încât $F = (X - a)G$, cu polinoamele $X - a$ şi G generând $A[X]$. Rezultă că B este A-izomorfă cu $A \times A[X]/(G)$, izomorfismul fiind dat prin asocierea $H(x) \mapsto \big(H(a), H \pmod{GA[X]}\big)$. Din $Q = MA[x] + xA[x]$ şi $G(x) \equiv G(a) \not\equiv 0 \bmod Q$ rezultă $G(x) \notin Q$. Localizând în Q se obţine un izomorfism $B_Q \simeq A$ întrucât imaginea lui $G(x)$ în $A \times A[X]/(G)$ este $(G(a), 0)$.

Implicaţia $(iii) \Longrightarrow (i)$ rezultă din propoziţiile 1.4 şi 1.10, iar $(i) \Longrightarrow (ii)$ este evidentă. $\square$

Teorema 1.12. *(criteriul iacobian de etalitate) Fie A un inel, $C = A[X_1, \dots, X_n]$, $I \leq C$, $B := C/I$, $Q \in \operatorname{Spec} B$, iar P imaginea reciprocă a idealului Q în C. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *B este o A-algebră etală în Q.*
(ii) *Există $f \in C \setminus P$, $F_1, \dots, F_n \in I$ ale căror imagini în C_f generează idealul I_f, astfel ca*

$$D := \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right) \notin P.$$

Dacă aceste condiţii sunt satisfăcute, iar $G_1, \dots, G_n \in I$, atunci imaginile în C_P ale polinoamelor G_k $(k = 1, \dots, n)$ generează idealul I_P dacă şi numai dacă

$$\det\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_j}\right) \notin P.$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar $(ii) \Longrightarrow (i)$, singura implicaţie ce o vom folosi în continuare. Demonstraţia reciprocei, mult mai dificilă, poate fi găsită în [**26**].

Se observă că putem să ne reducem la cazul $f = 1$ (adică pentru $F_1, \dots, F_n$ generatori ai idealului I).

Cazul $f = 1$. Notăm d imaginea iacobianului în B. Conform ipotezei, $d \notin Q$, deci este suficient să probăm că B_d este o A-algebră etală. Considerăm o diagramă comutativă de tipul

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "p"] & B_d \arrow[d, "u"] \\
E & & \, & E/J
\end{tikzcd}$$

în care E este o A-algebră arbitrară, iar $J \leq E$ este un ideal de pătrat nul. Existenţa unui morfism de A-algebre $v : B_d \longrightarrow E$ astfel ca $pv = u$ este echivalentă cu existenţa a n elemente $e_k \in E$ cu proprietăţile $F_j(e_1, \ldots, e_n) = 0$, $1 \leq j \leq n$, şi $D(e_1, \ldots, e_n)$ inversabil în E. Fie $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ imaginile nedeterminatelor $X_1, \ldots, X_n$ în E/J prin compunerea morfismelor $C \longrightarrow B \longrightarrow B_d \xrightarrow{u} E/J$ şi $x_1, \ldots, x_n \in E$ ridicări arbitrare ale lor. Vom determina $h_1, \ldots, h_n \in J$ astfel ca $e_j := x_j + h_j$, $1 \leq j \leq n$, să aibă proprietăţile dorite. Dezvoltarea în serie Taylor are forma

$$F_i(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) = F_i(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x_1, \ldots, x_n).$$

Impunând anularea membrului stâng se obţine pentru $h_1, \ldots, h_n$ un sistem liniar, al cărui determinant $D(x_1, \ldots, x_n)$ este inversabil în E pentru că imaginea sa în E/J este inversabilă.

DE TERMINAT CU EXPLICATII $\square$

Propoziţie 1.13. *Fie (A, M, K) un inel henselian, $F = (F_1, \ldots, F_r)$ polinoame în n nedeterminate $X = (X_1, \ldots, X_n)$, cu $r \leq n$. Fie J iacobianul acestui sistem. Dacă $\alpha \in K^n$ este o soluţie a sistemului $\overline{F}$ şi dacă rangul iacobianului J în α este maxim, atunci există o soluţie $a \in A^n$ pentru sistemul F care ridică soluţia α.*

Demonstraţie. După o eventuală renumerotare, se poate presupune nenul minorul $\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\alpha)\right)_{1 \leq i,j \leq r}$. Completând sistemul F cu polinoamele $X_{r+1} - a_{r+1}, \ldots, X_n - a_n$, unde a_j, $r < j \leq n$, sunt ridicări arbitrare ale lui α_j, $r < j \leq n$, putem presupune că $r = n$ şi că determinantul matricii iacobiene $\overline{J} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)$ este nenul în α.

Fie $B = A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_n)$. A spune că sistemul F are o soluţie în K revine la a spune că există un morfism de A-algebre $u : B \longrightarrow K$ astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \\
& & K
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă (morfismele nemarcate fiind cele canonice). Aplicând criteriul iacobian, se conchide că B este o vecinătate local etală în $Q := \ker u$. Inelul A fiind henselian, din propoziţia 1.11 rezultă că $B_Q \simeq A$ ca A-algebre. Morfismul compus $B \longrightarrow B_Q \simeq A$ furnizează soluţia a căutată. $\square$

TEOREMA 1.14. *(lema lui Hensel) Fie (A, M, K) un inel local henselian, $F \in A[X]$ al cărui redus modulo M se descompune în produsul a două polinoame g, $h \in K[X]$ coprime. Dacă g este unitar, există polinoame G, $H \in A[X]$, cu G unitar, care ridică g, respectiv h, şi al căror produs este F.*

DEMONSTRAŢIE. Fie s şi t gradul lui g şi h, iar $F = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$, cu $c_j \in A$ $(0 \leq j \leq n)$. Căutăm a_i, $b_j \in A$, $i = 0, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, t$, astfel ca $a_s = 1$, $G := X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \cdots + a_0$, $H := b_tX^t + b_{t-1}X^{t-1} + \cdots + b_0$ să aibă proprietăţile $F = GH$, $\overline{G} = g$, $\overline{H} = h$. Efectuând calculele, se obţine un sistem de $n + 1$ ecuaţii polinomiale în $n + 1$ necunoscute

$$U_s = 1,$$
$$\sum_{j+i=k} U_iV_j - c_k = 0,\ 0 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq t,\ 0 \leq k \leq n.$$

Prin ipoteză, acest sistem are o soluţie (α, β) în K^{n+1}. Un calcul direct furnizează iacobianul sistemului J: transpusa matricii Sylvester pentru rezultantul polinoamelor g, h. Cum acestea sunt coprime, rezultantul lor este nenul în K, astfel că $J(\alpha, \beta) \neq 0$. Se poate invoca rezultatul precedent pentru a obţine soluţia căutată în A. $\square$

În analiză este cunoscută metoda lui Newton de a obţine iterativ o soluţie a unei funcţii pornind de la o aproximaţie a acestei soluţii. Analogul algebric este următorul.

TEOREMA 1.15. *(lema lui Newton) Fie (A, M, K) un inel local henselian, $F = (F_1, \ldots, F_r)$ polinoame în n nedeterminate $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $(r \leq n)$ cu coeficienţi din A şi J matricea iacobiană asociată. Dacă există $a \in A^n$ astfel ca $F(a) \equiv 0 \pmod{e^2M}$, unde e este unul dintre $r \times r$-minorii matricii $J(a)$, atunci există $b \in A^n$ astfel ca $F(b) = 0$ şi $a \equiv b \pmod{eM}$.*

DEMONSTRAŢIE. Ca în demonstraţia anterioară ne reducem la cazul $r = n$ şi $e = \det J(a)$. Ipoteza permite să rescriem dezvoltarea în serie Taylor sub forma

$$F(a + eX) = F(a) + eJ(a)X + e^2G(X),$$

unde $G = (G_1, \ldots, G_n)$ sunt polinoame cu ordinul cel puţin doi. Dacă notăm cu J^* adjuncta matricii J, aceasta verifică identităţile $JJ^* = J^*J = eI$, unde I este matricea unitate de tip $n \times n$. Conform ipotezei, există $u_j \in M$ astfel ca $F(a) = e^2u$, cu $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Prin urmare,

$$F(a + eX) = e^2u + eJ(a)X + e^2G(X) = eJ(a)H(X),$$

unde $H(X) := J^*(a)u+X+J^*(a)G(X)$. Cum $\overline{H}(0) = 0$, $\det\left(\frac{\partial\overline{H}}{\partial X}(0)\right) = 1$, din propoziţia 1.13 rezultă că sistemul $H(X) = 0$ are o soluţie $h \in MA^n$. Atunci $b := a + eh$ este soluţia căutată. □

În cazul noetherian, Renée Elkik a obţinut o generalizare substanţială pentru Lema lui Newton, în care elimină restricţia ca numărul polinoamelor să nu depăşească numărul variabilelor.

Teorema 1.16. *(Elkik) Fie (A, M, K) un inel local, noetherian şi henselian, $f = (f_1, \dots, f_m)$ polinoame în variabilele $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ şi I idealul generat de acestea în $A[Y]$. Dacă g este un sistem de r polinoame din I, se notează cu Δ_g idealul generat de $r \times r$-minorii matricii iacobiene $\big(\partial g/\partial Y\big)$ asociată lui g. Fie $E_g := \Delta_g\big((g) : I\big)$, $H_f := \sqrt{I + \sum_g E_g}$, unde suma se face după toate sistemele de r polinoame din I, $r = 1, \dots, N$. Pentru orice ideal H al lui $A[Y]$ conţinut în H_f există o funcţie $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ cu proprietăţile:*

a) *$d(s, c) \geq \max\{\, s, c\,\}$ pentru orice s, $c \in \mathbb{N}$,*
b) *pentru orice $\overline{y} \in A^N$ astfel ca $f(\overline{y}) \equiv 0 \pmod{M^{d(s,c)}}$ şi $M^s \subseteq H(\overline{y})$ există o soluţie $y \in A^N$ a lui f astfel ca $y \equiv \overline{y} \pmod{M^c}$.*

În notaţiile din enunţul teoremei lui Elkik, mulţimea $\mathrm{V}(H_f)$ coincide cu mulţimea idealelor prime din $\operatorname{Spec} A[Y]$ ce conţin I şi în care morfismul $A \longrightarrow A[Y]/I$ nu este neted. În termeni geometrici, defineşte singularitatea schemei $\operatorname{Spec} A[Y]/I$ peste $\operatorname{Spec} A$. Demonstraţia se poate găsi în [**17**] sau [**26**].

2. Exemple de inele henseliene

Este evident din definiţie că orice corp este inel henselian. De fapt, orice inel cu un singur ideal prim este henselian. Mai general, un inel local este henselian dacă şi numai dacă redusul său $A_{\mathrm{red}} := A/\mathrm{nil}(A)$ este astfel. Necesitatea se poate stabili direct, iar suficienţa este consecinţa faptului că aplicaţia canonică $\operatorname{Idem} A \longrightarrow \operatorname{Idem} A/I$ este bijectivă pentru orice nilideal I al inelului A.

Exemple substanţiale de inele henseliene provin din geometria analitică sau diferenţială. Se cunoaşte următorul rezultat clasic din geometria analitică:

Teorema 2.1. *(teorema funcţiilor implicite, cazul analitic) Fie $f_i : \mathbb{C}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, funcţii de variabilele $z_1, \dots, z_m$, $w_1, \dots, w_n$, analitice într-o vecinătate a unui punct $(a, b) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Presupunem că $f_i(a, b) = 0$, $i = 1, \dots, n$, şi $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(a, b)\right)_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$. Atunci există şi sunt unice funcţii $g_i : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, analitice într-o vecinătate a lui a, astfel încât pentru orice $i = 1, \dots, n$, $g_i(a) = b_i$ şi*

$$f_i(z_1, \dots, z_m, g_1(z_1, \dots, z_m), \dots, g_n(z_1, \dots, z_m)) = 0$$

într-o vecinătate a lui $a \in \mathbb{C}^m$.

În notaţiile şi ipotezele acestui rezultat, notăm cu A inelul local al germenilor de funcţii analitice definite într-o vecinătate a originii din $\mathbb{C}^m$. Idealul maximal M din A este format din germenii de funcţii analitice care se anulează în origine. Funcţiile f_i din enunţul teoremei pot fi considerate ca elemente $F_i(w_1, \ldots, w_n)$ ale inelului $A\{w_1, \ldots, w_n\}$ de serii de puteri convergente într-o vecinătate a originii din $\mathbb{C}^n$. Teorema arată că dacă $F_i(0) \in M$ şi $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial w_j}(0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ este inversabil în A, atunci sistemul $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ admite o soluţie unică $g_1, \ldots, g_n$ din M.

O consecinţă directă a teoremei funcţiilor implicite este

Teorema 2.2. *(teorema de inversare locală) Fie K un corp valuat, complet, nediscret,*

$$E^n := \{\, (x,t) \in K^n \times K \ : \ P(x,t) := x^n + \sum_{i=1}^{n} x_i t^{n-i} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial t}(x,t) \neq 0 \,\}.$$

Atunci proiecţia canonică $\pi : E^n \longrightarrow K^n$, $(x,t) \mapsto x$, este local homeomorfism.

De aici rezultă o altă clasă de inele henseliene.

Propoziţie 2.3. *Fie K un corp valuat, complet, nediscret, X un spaţiu topologic, $\mathcal{O}_X$ fasciculul de funcţii continue definite pe deschişii din X cu valori în K. Pentru orice $x \in X$, inelul local $A := \mathcal{O}_{X,x}$ este henselian.*

Demonstraţie. Fie $F = Y^n + \sum_{i=1}^n f_i Y^{n-i} \in A[Y]$. Restrângând X la o vecinătate convenabilă a punctului x, se poate presupune că f_i sunt definite pe X. Se consideră funcţia $\phi : X \longrightarrow K^n$ definită prin $x \mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ şi o rădăcină simplă $\alpha \in K$ pentru $\overline{F} = Y^n + \sum_{i=1}^n f_i(x) t^{n-i} \in K[Y]$. În notaţiile teoremei de inversare locală, $\big(f_1(x), \ldots, f_n(x), \alpha\big) \in E^n$, astfel că există o vecinătate deschisă $V \subseteq K^n$ a lui $\phi(x)$ şi o funcţie continuă $u : V \longrightarrow K$ cu proprietăţile: $u(\phi(x)) = \alpha$ şi pentru orice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V$, $u(\beta)$ este o rădăcină simplă a polinomului $Y^n + \sum_{i=1}^n \beta_i Y^{n-i}$. Cu alte cuvinte, germenele funcţiei $u\phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow K$ din A este o rădăcină a polinomului F, rădăcină care evident ridică α. $\square$

Analog se arată că pentru $K = \mathbb{R}$ şi X o varietate diferenţiabilă de clasă $\mathcal{C}^r$, fibrele fasciculului structural (adică inelele locale de germeni de funcţii diferenţiabile de clasă $\mathcal{C}^r$) sunt inele henseliene.

Alte exemple de inele henseliene se obţin după ce se studiază stabilitatea henselianităţii la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

Propoziţie 2.4. *Fie $(A_i, u_{ij})_{i\in I}$ un sistem inductiv filtrat la dreapta de inele locale, cu morfismele de tranziţie locale, şi $A := \varinjlim A_i$.*

a) Inelul A este local, morfismele structurale $A_i \longrightarrow A$ sunt locale, iar corpul rezidual al lui A este limita inductivă a corpurilor reziduale ale inelelor A_i.

b) Dacă A_i este inel henselian pentru orice $i \in I$, atunci A este henselian.

DEMONSTRAŢIE. a) Reuniunea în A a imaginilor idealelor maximale M_i din A_i prin morfismele structurale $A_i \longrightarrow A$ este ideal, notat M. Orice element a din A care nu aparţine lui M provine dintr-un element al unui inel A_i (pentru un indice i suficient de mare) care nu este în idealul său maximal M_i, deci este inversabil în A_i. Prin urmare a este inversabil în A, încât M este unicul ideal maximal din A. În plus, morfismele structurale $A_i \longrightarrow A$ sunt locale, iar corpul rezidual K al inelului A este limita inductivă a corpurilor reziduale K_i ale inelelor A_i.

b) Fie F un polinom unitar cu coeficienţi în A şi al cărui redus modulo M are o rădăcină simplă $\alpha \in K$. Se consideră $i \in I$ suficient de mare astfel ca F să fie imaginea unui polinom F_i din $A_i[X]$, iar α să provină dintr-un element $\alpha_i \in K_i$ care este rădăcină simplă pentru redusul lui F_i modulo M_i. Inelul A_i fiind henselian, există o rădăcină $a_i \in A_i$ pentru F_i care ridică α_i. Imaginea lui a_i în A este o ridicare a lui α şi o rădăcină pentru F. $\square$

PROPOZIŢIE 2.5. *Fie A un inel local henselian şi B o A-algebră întreagă. Pentru orice $Q \in \operatorname{Spec} B$, inelul B/Q este un inel local henselian. Dacă în plus Q este ideal maximal, atunci B_Q este o A-algebră întreagă şi inel henselian. În particular, orice cât nenul al unui inel local henselian este henselian.*

DEMONSTRAŢIE. Să considerăm B ca limita inductivă filtrată la dreapta a A-subalgebrelor sale de tip finit: $B = \varinjlim B_i$. Notând $Q_i := Q \cap B_i \in \operatorname{Spec} B_i$, avem $B/Q = \varinjlim B_i/Q_i$, iar pentru Q maximal rezultă $Q_i \in \operatorname{Max} B_i$ şi $B_Q = \varinjlim (B_i)_{Q_i}$. Cum fiecare B_i/Q_i este o A-algebră finită şi integră, din propoziţia **??** rezultă că B_i/Q_i este inel local henselian. Conform propoziţiei precedente, B/Q este inel henselian. În cazul când Q este ideal maximal, deoarece B_i este o algebră finită peste un inel local henselian, conform corolarului 1.5 este decompozabil. Prin urmare $(B_i)_{Q_i}$ este inel henselian şi A-algebră finită, încât B_Q este o A-algebră întreagă şi inel henselian conform propoziţiei 2.4. $\square$

M. Nagata [**24**] arată că oricărui inel local i se poate asocia o ,,anvelopă henseliană". Preferăm să expunem construcţia imaginată de Grothendieck EGA IV, bazată pe algebre etale.

Pentru demonstraţia teoremei 2.11 sunt necesare ceva mai multe cunoştinţe despre vecinătăţile local etale ale inelelor locale.

Pentru un inel local (A, M, K), vom nota $Et(A)$ categoria ale cărei obiecte sunt A-algebrele local etale, morfismele acestei categorii fiind morfismele locale între obiectele respective. Conform teoremei de structură a algebrelor local etale, acestea se pot caracteriza în trei moduri:

(*i*) $B = C_Q$, unde C este o A-algebră de prezentare finită, etală în idealul prim Q ce stă peste idealul maximal din A;

(*ii*) $B = \big(A[X]/(F)\big)_Q$, cu $F \in A[X]$ unitar şi Q ideal maximal din $A[x] := A[X]/(F)$ ce nu conţine clasa lui F' modulo (F).

(*iii*) B este un localizat al unei A-algebre finite într-un ideal maximal, B este un A-modul plat, iar B/MB este un corp, extindere finită şi separabilă a lui K.

Iată câteva proprietăţi comune ale obiectelor şi morfismelor din categoria $Et(A)$.

Propoziţie 2.6. *a) Dacă $B \in Et(A)$ şi $C \in Et(B)$, atunci $C \in Et(A)$.*

b) Pentru orice B_1, $B_2 \in Et(A)$ există $B \in Et(A)$ şi morfisme locale $B_1 \longrightarrow B$, $B_2 \longrightarrow B$.

c) Orice morfism din $Et(A)$ este fidel plat.

Demonstraţie. *a*) Fie B' o A-algebră de prezentare finită, etală în idealul său prim Q ce stă peste M, astfel ca $B = B'_Q$, iar C' o B-algebră de prezentare finită, etală în idealul său prim P ce stă peste idealul maximal QB'_Q din B, astfel ca $C = C'_P$. Punând $S := B' \setminus Q$, se observă că C' este de forma $S^{-1}C''$, unde C'' este o B'-algebră de prezentare finită, deci şi A-algebră de prezentare finită. În plus C este de forma C''_I, pentru un ideal prim I din C'' ce stă peste M. Din tranzitivitatea etalităţii (ce decurge direct din definiţia sa) rezultă că C'' este A-algebră etală, astfel că C'' este etală peste A în I.

b) Pornim de la reprezentările $B_i = (C_i)_{Q_i}$, $i = 1$, 2, unde C_i sunt A-algebre de prezentare finită, iar $Q_i \in \operatorname{Spec} C_i$ stă peste M. Atunci $C := C_1 \otimes_A C_2$ este A-algebră de prezentare finită (stabilitatea acestei proprietăţi la schimbarea de bază şi tranzitivitatea ei!). Vom arăta că există un ideal prim P în C deasupra lui Q_1 şi a lui Q_2. Înlocuind A, resp. C_1 şi C_2, prin fibra sa în M, resp. Q_1 şi Q_2, ne putem reduce la cazul idealelor nule din corpuri. Cum produsul tensorial de spaţii vectoriale nenule este nenul, rezultă că inelul C este nenul, iar orice ideal prim al său stă peste idealele nule din C_1 şi C_2.

Pentru următorul pas este suficient să observăm că morfismele canonice $B_i \longrightarrow C_P$ induc un morfism $u : B_1 \otimes_A B_2 \longrightarrow C_P$ prin care se factorizează morfismul canonic de localizare $C \longrightarrow C_P$. Rezultă că $C_P \simeq (B_1 \otimes_A B_2)_{u^{-1}(P)}$ este o A-algebră local etală cu proprietăţile dorite.

c) Vom folosi observaţia că pentru B, $C \in Et(A)$ arbitrare, orice morfism de A-algebre $u : B \longrightarrow C$ este local. Într-adevăr, idealul maximal din B (şi C) este unicul său ideal prim care stă peste idealul maximal din A, astfel că

$$\mathrm{Hom}_{Et(A)}(B,C) = \mathrm{Hom}_{A-alg}(B,C) = \mathrm{Hom}_{C-alg}(B \otimes_A C, C).$$

În particular, morfismul structural $A \longrightarrow B$ fiind plat şi local, este fidel plat, deci injectiv. Proprietatea dorită este consecinţă a rezultatului următor, mai general decât afirmaţia strict necesară pentru a demonstra platitudinea oricărui morfism din $Et(A)$. $\square$

Propoziţie 2.7. *Fie B o A-algebră netă şi de tip finit. Orice B-modul E este sumand direct în B-modulul $B \otimes_A E$. În particular, dacă E este plat ca A-modul, el este plat şi ca B-modul.*

Demonstraţie. O algebră de tip finit este netă dacă şi numai dacă modulul de diferenţiale $\Omega_{B/A}$ este nul. Se ştie, de asemenea, că imaginile în $\Omega_{B/A}$ ale oricărui sistem de generatori ai A-algebrei B generează A-modulul diferenţialelor. Rezultă că în ipotezele de faţă $\Omega_{B/A} = I/I^2$, cu I ideal de tip finit. Dar un ideal finit generat, egal cu pătratul său, este generat de un element idempotent. Probăm că nucleul I al morfismului diagonal $m : B \otimes_A B \longrightarrow B$ ce duce $b_1 \otimes b_2$ în $b_1 b_2$ este generat de un element idempotent dacă şi numai dacă există $t \in B \otimes_A B$ ce anulează I şi pentru care $m(t) = 1$.

Este evident că dacă $I = (e)$, cu $e \in \mathrm{Idem}\,(B \otimes_A B)$, atunci $t := 1 - e$ convine. Reciproc, pentru orice t astfel ca $m(t) = 1$, elementul $e := 1 - t$ este din I, pentru că $m(e) = 1 - m(t) = 0$. Condiţia $tI = 0$ implică $te = 0$, astfel că $e = e^2$, şi $ex = (1-t)x = x$ pentru orice $x \in I$, adică I este ideal principal, generat de e. $\square$

Reamintim că o A-algebră local etală B cu proprietatea că morfismul de structură $A \longrightarrow B$ induce un izomorfism între corpurile reziduale K şi B/MB se numeşte *vecinătate local etală* a lui A. Notăm cu $Vet(A)$ subcategoria plină în $Et(A)$ formată din vecinătăţile local etale ale inelului A.

Corolar 2.8. *a) Dacă $B \in Vet(A)$ şi $C \in Vet(B)$, atunci $C \in Vet(A)$.*

b) Pentru orice B_1, $B_2 \in Vet(A)$ există $B \in Vet(A)$ şi morfisme locale $B_1 \longrightarrow B$, $B_2 \longrightarrow B$.

c) Orice morfism din $Vet(A)$ este fidel plat.

Demonstraţie. Mai trebuie doar să observăm că în notaţiile de la b) avem

$$\begin{aligned}(B_1 \otimes_A B_2)/\big(MB_1 \otimes_A B_2 + B_1 \otimes_A MB_2\big) &\simeq (B_1/MB_1) \otimes_K (B_2/MB_2)\\ &\simeq K \otimes_K K \simeq K.\end{aligned}$$

$\square$

Propoziţie 2.9. *Între două vecinătăţi local etale ale lui A există cel mult un morfism de A-algebre.*

Demonstraţie. Am observat deja că

$$\mathrm{Hom}_{Vet(A)}(B,C) = \mathrm{Hom}_{A-alg}(B,C) \simeq \mathrm{Hom}_{C-alg}(B \otimes_A C, C).$$

Dacă B, $C \in Vet(A)$ şi u, $v \in B \otimes_A C \longrightarrow C$ sunt două retracţii ale morfismului structural $C \longrightarrow B \otimes_A C$, atunci ele induc modulo M acelaşi morfism, anume inversul morfismului canonic $C/MC \longrightarrow (B \otimes_A C)/M(B \otimes_A C)$. Notând $f : C \longrightarrow C/MC$ surjecţia canonică, demonstraţia se încheie aplicând rezultatul următor. $\square$

Propoziţie 2.10. *Fie B o A-algebră netă şi de tip finit, C o A-algebră nenulă, $f \in Hom_{A-alg}(A,C)$, iar u, $v \in Hom_{A-alg}(B,A)$ (deci retracţii ale morfismului structural $A \longrightarrow B$). Dacă* $\mathrm{Idem}\, A = \{0,1\}$, *atunci $fu = fv$ implică $u = v$.*

Demonstraţie. Fie $m : B \otimes_A B \longrightarrow B$ morfismul diagonal (evident surjectiv) şi $w : B \otimes_A B \longrightarrow A$ morfismul de A-algebre definit prin $w(b \otimes b') := u(b)v(b')$, b, $b' \in B$. Prin ipoteză avem $fum = fvm = fw$. În demonstraţia propoziţiei **??** am arătat existenţa unui element $e \in \mathrm{Idem}(B \otimes_A B)$ ce generează $I := \ker m$. Imaginea sa $w(e) \in \mathrm{Idem}\, A$ este fie nulă, fie elementul unitate. Observăm că $w(e) = 1$ conduce la contradicţia $0 = fum(e) = fw(e) = 1$. Prin urmare, $w(e) = 0$, astfel că $w(I) = 0$, încât există un morfism $r : B \longrightarrow A$ pentru care $w = rm$. Se găseşte $r(b) = rm(1 \otimes b) = w(1 \otimes b) = v(b)$ şi $r(b) = u(b)$ pentru orice $b \in B$. $\square$

Putem enunţa acum teorema anunţată a lui Nagata, potrivit căreia oricărui inel local se poate asocia un „cel mai mic” inel henselian.

Teorema 2.11. *Pentru orice inel local A există un cuplu $\big(\widetilde{A}, i_A\big)$, format dintr-un inel local henselian $\widetilde{A}$ şi un morfism local $i_A : A \longrightarrow \widetilde{A}$, cu următoarea proprietate de universalitate: pentru orice inel local henselian B şi orice morfism local $u : A \longrightarrow B$, există un unic morfism local $v : \widetilde{A} \longrightarrow B$ astfel ca $u = vi_A$.*

Cuplul $\big(\widetilde{A}, i_A\big)$ se numeşte *henselizat* al inelului local A. Putem folosi articolul hotărât întrucât $\widetilde{A}$ este unic până la un izomorfism de A-algebre. Invocând proprietatea de universalitate pentru B corpul rezidual la inelului, se constată că A şi $\widetilde{A}$ au corpurile reziduale izomorfe.

În modul standard se asociază fiecărui morfism local u între inele locale A şi B un unic morfism local $\widetilde{u}$ între henselizatele lor. Asocierea $A \mapsto \widetilde{A}$, $u \mapsto \widetilde{u}$ este un functor covariant de la categoria inelelor locale cu morfisme locale în subcategoria plină formată din inelele locale henseliene, adjunct la stânga al functorului de incluziune.

Demonstraţie. (Demonstraţia teoremei 2.11) Ideea fundamentală este a proba existenţa unei mulţimi I şi a unei familii de vecinătăţi local etale $(A_i)_{i \in I}$ cu proprietatea că orice obiect din $Vet(A)$ este A-algebră izomorfă cu un membru al acestei familii. Mai exact, I constă din cuplurile (F, Q), unde F este un polinom unitar din $A[X]$ cu proprietatea că $F(0) \in M$, $F'(0) \notin M$, iar Q este un ideal maximal din $A[X]/(F)$ care conţine clasa nedeterminatei X mod $FA[X]$. Dacă $i = (F, Q)$, atunci $A_i := \big(A[X]/(F)\big)_Q \in Vet(A)$ conform teoremei de structură pentru vecinătăţile local etale. Din aceeaşi teoremă rezultă că orice $B \in Vet(A)$ este izomorf cu o A-algebră asociată în modul indicat unui indice $i = (F, Q)$.

Din propoziţia 2.9 se deduce că mulţimea I este ordonată parţial de relaţia

$$i \leq j \Longleftrightarrow \operatorname{Hom}_{A-alg}(A_i, A_j) \neq \emptyset,$$

iar corolarul 2.8 implică faptul că această ordine este filtrată la dreapta. Se defineşte $\widetilde{A} := \varinjlim A_i$. Morfismul $i_A : A \longrightarrow \widetilde{A}$ este obţinut ca limita inductivă a morfismelor structurale $A \longrightarrow A_i$. Conform propoziţiei 2.4, inelul $\widetilde{A}$ este local, de ideal maximal $\widetilde{M}$ şi corp rezidual izomorf cu K, iar i_A este morfism local.

Probăm henselianitatea lui $\widetilde{A}$. Fie $F \in \widetilde{A}[X]$ unitar ce are o rădăcină simplă în corpul rezidual K. Putem presupune, fără a pierde din generalitate, că această rădăcină este nulă, altfel spus, că $F(0) \in \widetilde{M}$, $F'(0) \notin \widetilde{M}$. Se alege un indice i şi un polinom unitar F_i din $A_i[X]$ din care provine F. Polinomul F_i satisface de asemenea condiţiile $F_i(0) \in M_i$, $F_i'(0) \notin M_i$, unde $M_i = MA_i$ este idealul maximal din A_i. În A_i-algebra $B := A_i[X]/(F_i)$ se notează cu x clasa nedeterminatei. Atunci idealul $Q := MB + xB$ este maximal în B, astfel că $B_Q \in Vet(A_i)$, iar prin tranzitivitate (corolarul 2.8) $B_Q \in Vet(A)$. Prin urmare, există $j \in I$, $i \leq j$, şi un izomorfism de A-algebre între B_Q şi A_j. Privit ca polinom cu coeficienţi în A_j, F_i are o rădăcină în M_j, anume imaginea lui x din B în $B_Q \simeq A_j$, astfel că F_i are o rădăcină în $\widetilde{M}$.

Rămâne să arătăm că perechea $(\widetilde{A}, i_A)$ construită mai sus are proprietatea de universalitate cerută în enunţul teoremei lui Nagata. Fie B un inel local henselian şi $u : A \longrightarrow B$ un morfism local. Vom demonstra că u se prelungeşte în mod unic la orice vecinătate local etală a lui A. Fie $i = (F, Q)$ şi $A_i = \big(A[X]/(F)\big)_Q$ ca mai sus. Deoarece B este henselian, F admite o unică rădăcină α în idealul maximal al lui B. Prin urmare, unicul morfism de A-algebre $A[X] \longrightarrow B$ definit de asocierea $X \mapsto \alpha$ se prelungeşte în mod unic la un morfism local $u_i : A_i \longrightarrow B$ astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "u"'] & & A_i \arrow[dl, "u_i"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

este comutativă. Se verifică apoi că morfismele $(u_i)_{i\in I}$ sunt compatibile cu morfismele de tranziţie $A_i \longrightarrow A_j$, $i \leq j$. Proprietatea de universalitate a limitei inductive asigură existenţa unui unic morfism local $v : \widetilde{A} \longrightarrow B$ astfel ca $u = vi_A$. □

Corolar 2.12. *Fie A un inel local şi $B \in Vet(A)$. Atunci există un izomorfism canonic de A-algebre între $\widetilde{A}$ şi $\widetilde{B}$.*

Propoziţie 2.13. *Fie $(A_i, u_{ij})_{i\in I}$ un sistem inductiv filtrat la dreapta de inele locale cu morfisme de tranziţie locale. Atunci $(\widetilde{A_i}, \widetilde{u}_{ij})_{i\in I}$ este un sistem inductiv de inele henseliene şi există un izomorfism canonic $(\varinjlim A_i)^{\sim} \simeq \varinjlim \widetilde{A_i}$.*

Demonstraţie. Consecinţă formală a propoziţiei 2.4, a teoremei 2.11 şi a proprietăţii de universalitate a limitei inductive. □

Propoziţie 2.14. *Fie (A, M, K) un inel local, B o A-algebră întreagă, N un ideal maximal din $C := B \otimes_A \widetilde{A}$ şi $Q := N \cap B$. Atunci inelul C_N este o $\widetilde{A}$-algebră întreagă şi un inel local henselian, izomorf cu henselizatul inelului B_Q.*

Demonstraţie. Primele două afirmaţii decurg din propoziţia 2.5, căci proprietatea de a fi algebră întreagă e stabilă la schimbarea de bază. Ultima parte a concluziei rezultă din proprietatea de universalitate a produsului tensorial şi din izomorfismul $C_N \simeq B_Q \otimes_A \widetilde{A}$ pe care îl vom justifica în continuare. Este suficient să probăm că inelul $B_Q \otimes_A \widetilde{A}$ este local, afirmaţie ce rezultă din şirul de izomorfisme

$$(B_Q \otimes_A \widetilde{A}) \otimes_A K \simeq B_Q \otimes_A (\widetilde{A} \otimes_A K) \simeq B_Q \otimes_A K \simeq B_Q/MB_Q$$

şi din faptul că ultimul inel este local întrucât B este A-algebră întreagă. □

Demonstraţia acestui rezultat serveşte pentru a justifica

Corolar 2.15. *Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism local şi întreg de inele locale. Atunci $B \otimes_A \widetilde{A}$ este inel local şi există un izomorfism canonic $\widetilde{B} \simeq B \otimes_A \widetilde{A}$. În particular, pentru orice ideal I al lui A, $\widetilde{A/I} \simeq \widetilde{A}/I\widetilde{A}$.*

Propoziţie 2.16. *Fie $(\widetilde{A}, \widetilde{M}, K)$ henselizatul unui inel local (A, M, K). Atunci:*

a) Morfismul canonic $i_A : A \longrightarrow \widetilde{A}$ este fidel plat şi pentru orice întreg $n \geq 1$ avem $M^n\widetilde{A} = \widetilde{M}^n$.

b) Pentru orice ideal prim P din A, fibra $\widetilde{A} \otimes_A k(P)$ este o $k(P)$-algebră întreagă, ale cărei localizate sunt extinderi algebrice şi separabile ale corpului $k(P)$.

Demonstraţie. *a)* În notaţiile demonstraţiei teoremei 2.11, morfismul i_A este limita inductivă a morfismelor locale şi plate $A \longrightarrow A_i$

(cf. teorema de caracterizare a vecinătăţilor local etale). Platitudinea este păstrată de limita inductivă, astfel că i_A, fiind plat şi local, este fidel plat. Aceeaşi teoremă de caracterizare a vecinătăţilor local etale implică $\widetilde{M} = M\widetilde{A}$, de unde se obţine prin inducţie $M^n\widetilde{A} = \widetilde{M^n}$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Deoarece $\widetilde{A} \otimes_A k(P) \simeq \varinjlim \big(A_i \otimes_A k(P)\big)$, afirmaţia rezultă din faptul că fiecare inel $A_i \otimes_A k(P)$ este o $k(P)$-algebră finită ale cărei localizate sunt corpuri, extinderi finite şi separabile ale corpului $k(P)$. $\square$

COROLAR 2.17. *Completatele unui inel local şi ale henselizatului său în topologiile radiciale sunt canonic izomorfe.*

3. Transfer de proprietăţi

Dat fiind modul de construcţie al henselizatului, pentru a studia problematica enunţată în titlul secţiunii vom avea nevoie de informaţii suplimentare despre vecinătăţile local etale ale unui inel local. Începem cu precizarea structurii obiectelor din $Et(A)$, atunci când A este inel normal.

PROPOZIŢIE 3.1. *Fie A un inel local şi normal, de corp de fracţii L. Atunci orice A-algebră local etală B este de forma $\big(A[X]/(F)\big)_Q$, unde F este un polinom unitar din $A[X]$, ireductibil în $L[X]$, iar Q este un ideal maximal din $A[x] := A[X]/(F)$ care nu conţine $F'(x)$.*

DEMONSTRAŢIE. Conform teoremei de structură, B este A-izomorfă cu o A-algebră de forma $\big(A[X]/(G)\big)_P$, unde $G \in A[X]$ este unitar, iar P este un ideal maximal din $A[y] := A[X]/(G)$ care nu conţine $G'(y)$. Descompunând G în factori ireductibili în $L[X]$, cel puţin unul dintre aceştia se va anula în y. Fie $G = FH$, cu F, $H \in L[X]$ unitare şi F ireductibil în $L[X]$ astfel încât $F(y) = 0$. Deoarece A este domeniu normal, F şi H au coeficienţii în A. Relaţia $G'(y) = F'(y)H(y)$ arată că $F'(y) \notin P$. Se consideră în $A[x] := A[X]/(F)$ idealul Q care stă deasupra imaginii reciproce a lui P în $A[X]$. Se constată că idealul Q este maximal, unic determinat şi nu conţine $F'(x)$. Rămâne să arătăm că algebra $A[x]_Q$ este A-izomorfă cu $B = A[y]_P$. Morfismul canonic $B \longrightarrow A[x]_Q$ este surjectiv şi local, are ca sursă o A-algebră local etală (deci netă) şi de tip finit, iar cosursa este un A-modul plat prin construcţie. Conform propoziţiei 2.7, $A[x]_Q$ este B-modul plat, deci morfismul local $B \longrightarrow A[x]_Q$ este fidel plat, în particular injectiv. $\square$

Algebrele local etale sunt strâns legate de algebre libere de forma $C := A[X]/(F)$, cu F un polinom unitar cu coeficienţi în A. Dacă F are gradul n, iar x este clasa variabilei în C, atunci $1, x, \ldots, x^{n-1}$ formează o bază a A-modulului liber C. Orice element $c \in C$ se scrie în mod unic sub forma $c = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)x^i$, unde $p_0, \ldots, p_{n-1}$ constituie baza canonică a dualului lui C, definită prin relaţiile $p_i(x^j) = 0$ sau 1, după cum i este diferit de j sau egal cu j $(0 \le i, j \le n-1)$. Se defineşte o aplicaţie $\mathrm{Tr}_{C/A} \in \mathrm{Hom}_A(C, A)$ prin

$$\mathrm{Tr}_{C/A}(c) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(cx^i),\ \ c \in C.$$

PROPOZIŢIE 3.2. *(lema lui Tate) Fie A un inel (nu neapărat local), $F \in A[X]$ unitar de grad n, $C := A[X]/(F) = A[x]$. Fie $c_i \in C$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, şi $c_{n-1} = 1$ astfel ca $F = (X - x)\sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$. Atunci, pentru orice $c \in C$,*

$$cF'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i)x^i.$$

Demonstraţie. Vom demonstra identităţile

$$p_i(c) = p_{n-1}(cc_i),\ 0 \le i \le n-1,\ c \in C. \tag{5}$$

Deoarece aplicaţiile p_i sunt A-liniare, este suficient să verificăm că pentru toţi întregii i, j cuprinşi între 0 şi $n-1$ avem $p_{n-1}(c_i x^j) = \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Fie $F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, cu $a_i \in A$, $0 \le i \le n$, şi $a_n = 1$. Dezvoltând produsul $(X-x)\sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$, se obţin egalităţile $a_0 + c_0 x = 0$, $a_{i+1} + c_{i+1}x = c_i$ $(0 \le i \le n-1)$, $c_{n-1} = 1$. Pentru $0 \le j \le n-2$ rezultă $c_i x^j = a_{i+1}x^j + c_{i+1}x^{j+1}$, astfel că $p_{n-1}(c_i x^j) = p_{n-1}(c_{i+1}x^{j+1})$, relaţie ce permite obţinerea relaţiilor (5) prin inducţie.

Concluzia dorită rezultă acum rapid din (5). Întâi se obţine pentru c element arbitrar al lui C

$$\mathrm{Tr}_{C/A}(c) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1}(cc_i x^i) = p_{n-1}\big(cF'(x)\big),$$

astfel că

$$cF'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i\big(cF'(x)\big)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1}\big(cc_iF'(x)\big)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i)x^i.$$

□

Propoziţie 3.3. *Orice algebră local etală B peste un inel local şi normal A este inel normal.*

Demonstraţie. Să notăm cu K corpul fracţiilor lui A. Conform Propoziţiei 3.1, există $F \in A[X]$ unitar şi ireductibil în $K[X]$ astfel ca $B = \big(A[X]/(F)\big)_Q$, pentru Q un ideal maximal în $C := A[X]/(F) = A[x]$ care conţine clasa lui X mod F. Rezultă că C este domeniu de integritate, de corp de fracţii $L = K[X]/(F)$. Aplicaţia $\mathrm{Tr}_{C/A}$ se extinde prin liniaritate la $\mathrm{Tr}_{L/K} \in \mathrm{Hom}_K(L, K)$.

Fie $t \in L$ întreg peste B. Există $c \in C \setminus Q$ astfel încât ct este întreg peste $A[x]$, deci peste A (prin tranzitivitate). În notaţiile din lema lui Tate, elementele $\mathrm{Tr}_{L/K}(ctc_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sunt întregi peste domeniul normal A conform [**36**, cap.I, 4.1], deci aparţin acestuia. Egalitatea din concluzia lemei lui Tate implică $ctF'(x) \in A[x]$, astfel că $t \in B$, pentru că ceilalţi doi factori sunt inversabili în B. A rezultat că B este întreg închis în corpul său de fracţii. □

Propoziţie 3.4. *Orice algebră local etală B peste un inel local şi redus A este inel redus.*

Demonstraţie. Fie $B = C_Q$, cu $C = A[X]/(F)$, $F \in A[X]$ unitar, $Q \in \mathrm{Max}\, C$ astfel că $F'(x) \notin Q$, unde x este clasa lui X mod F. Orice element nilpotent b din B provine dintr-un nilpotent $c \in C$. În notaţiile Propoziţiei 3.2, cc_i este element nilpotent în C pentru orice i, $0 \le i \le n-1$. Este suficient să probăm că $\mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i) = 0$, pentru că atunci din lema lui Tate rezultă $cF'(x) = 0$ şi, cum $F'(x)$ este inversabil în B, se obţine $b = 0$.

Pentru orice ideal prim P din A, imaginea lui cc_i în fibra $C \otimes_A k(P)$ este nilpotentă, deci are urma nulă în corpul $k(P)$. Aceasta înseamnă că $\mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i) \in P$ pentru toţi $P \in \operatorname{Spec} A$, astfel că $\mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i)$ este element nilpotent al inelului redus A. Rezultă $\mathrm{Tr}_{C/A}(cc_i) = 0$ pentru fiecare $i = 1, \ldots, n-1$. $\square$

TEOREMA 3.5. *Fie A un inel local şi $\widetilde{A}$ henselizatul său.*

a) A este inel noetherian dacă şi numai dacă $\widetilde{A}$ este noetherian. În acest caz, pentru orice ideal prim P din A, fibra $\widetilde{A} \otimes_A k(P)$ este un produs finit de corpuri, extinderi algebrice şi separabile ale corpului $k(P)$.

b) Dacă A este inel noetherian, atunci $\dim A = \dim \widetilde{A}$.

c) A este inel redus (resp. normal, regulat, sau de valuare discretă) atunci şi numai atunci când $\widetilde{A}$ este astfel.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Dacă $\widetilde{A}$ este noetherian, la fel este şi A pentru că noetherianitatea coboară prin morfisme fidel plate (contracţia extensiei oricărui ideal din A coincide cu idealul considerat). Reciproc, presupunem A inel noetherian. Am constatat (*cf.* corolar 2.17) că inelul şi henselizatul său au acelaşi completat în topologiile radiciale. În plus, $\widetilde{A}$ este limită inductivă de inele locale noetheriene, care sunt separate în topologia radicială, astfel că $\widetilde{A}$ este separat, încât morfismul de completare $\widetilde{A} \longrightarrow \widehat{A}$ este injectiv. Deoarece $\widehat{A}$ este inel noetherian, este suficient să arătăm că pentru orice ideal finit generat I din $\widetilde{A}$ avem $I\widehat{A} \cap \widetilde{A} = I$.

Cum evident I este conţinut în contracţia extensiei sale la $\widehat{A}$, probăm incluziunea contrară. Fie $a_1, \ldots, a_n$ un sistem de generatori ai idealului I şi $x \in I\widehat{A} \cap \widetilde{A}$. Se găseşte $B \in Vet(A)$ care conţine x şi toate elementele a_i. Notăm $J := (a_1, \ldots, a_n)B$. Întrucât B este un inel local, noetherian, al cărui completat în topologia radicială (de pe A sau B) este izomorf cu $\widehat{A}$ (*cf.* corolar 2.12), se deduce că $\widehat{A}$ este B-modul fidel plat, astfel că $J\widehat{A} \cap B = J$. Cum $J\widehat{A} \cap B = I\widehat{A} \cap B$ conţine x, rezultă că x aparţine lui J. Prin urmare, $x \in I$.

Ultima afirmaţie se obţine din propoziţia 2.16, folosind faptul că $\widetilde{A} \otimes_A k(P)$ este inel noetherian şi de dimensiune zero (fiind o algebră întreagă peste corpul $k(P)$), deci inel artinian.

b) Deoarece $\widetilde{A}$ este o A-algebră fidel plată, iar A şi henselizatul său sunt inele noetheriene, se poate aplica formula dimensiunilor $\dim \widetilde{A} = \dim A + \dim\big(\widetilde{A} \otimes_A K\big)$, unde K este corpul rezidual al lui A. Dar am observat că A şi $\widetilde{A}$ au acelaşi corp rezidual, încât $\widetilde{A} \otimes_A K \simeq K$ are dimensiunea Krull nulă.

c) Faptul că henselizatul unui inel local şi redus (sau normal) este redus (normal) rezultă din propoziţia 3.4 (resp. 3.3), întrucât o limită inductivă de inele locale şi reduse (normale) este un inel local şi redus (normal). Reciproc, dacă $\widetilde{A}$ este redus, la fel este şi subinelul său A, iar normalitatea coboară prin morfisme fidel plate (cf. [**36**, cap.IV, 5.8]).

Afirmaţia referitoare la regularitate rezultă din faptul că A şi $\widetilde{A}$ sunt simultan inele noetheriene, coroborat cu [**36**, cap.VIII, 1.14 şi 1.16]. În fine, inel de valuare discretă înseamnă inel local, regulat, de dimensiune unu. $\square$

Corolar 3.6. *Orice inel local şi henselian (A, M, K) este o limită inductivă de inele locale, henseliene şi noetheriene.*

Demonstraţie. Fie $(A_i)_{i\in I}$ familia subinelelor lui A de tip finit peste $\mathbb{Z}$ şi $M_i := M \cap A_i$, $i \in I$. Cum această familie este filtrată la dreapta prin incluziune, pentru $A_i \subset A_j$ se obţine prin localizare un morfism local $(A_i)_{M_i} \longrightarrow (A_j)_{M_j}$. Propoziţia 2.13 implică

$$A = \widetilde{A} = \big(\varinjlim (A_i)_{M_i}\big)^{\sim} = \varinjlim \big((A_i)_{M_i}\big)^{\sim}.$$

$\square$

Ca o primă aplicaţie a henselizării, arătăm cum se obţin informaţii despre idealele maximale ale normalizatului unui inel local fără a determina efectiv acest normalizat.

Lema 3.7. *Fie A un inel local henselian şi B o A-algebră întreagă. Dacă B este inel normal, atunci asocierea $N \mapsto \ker(B \longrightarrow B_N)$ defineşte o corespondenţă bijectivă între idealele maximale şi cele minimale din B.*

Demonstraţie. B_N fiind inel local şi normal, este domeniu de integritate, încât N conţine un singur ideal prim minimal, anume nucleul morfismului de localizare. Aşadar, corespondenţa este bine definită. Pe de altă parte, Propoziţia 2.5 asigură că orice $Q \in \operatorname{Min} B$ este conţinut într-un singur ideal maximal al lui B. $\square$

Teorema 3.8. *Fie (A, M, K) un inel local şi integru, L corpul său de fracţii şi B închiderea întreagă a lui A în L. Atunci:*

a) Pentru orice $Q \in \operatorname{Max} B$, morfismul $\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B_Q}$ este întreg, iar nucleul său este un ideal prim minimal din $\widetilde{A}$.

b) Asocierea $Q \mapsto \ker\big(\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B_Q}\big)$ defineşte o corespondenţă bijectivă între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Min} \widetilde{A}$.

Demonstraţie. Observăm pentru început că morfismul canonic $B \longrightarrow B \otimes_A \widetilde{A}$ stabileşte o bijecţie între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Max}(B \otimes_A \widetilde{A})$. Într-adevăr, deoarece morfismul canonic $A \longrightarrow B$ este întreg şi induce prin schimbare de bază morfismul întreg $\widetilde{A} \longrightarrow B \otimes_A \widetilde{A}$, există bijecţii

$\operatorname{Max} B \simeq \operatorname{Spec}\big(B \otimes_A K\big)$, $\operatorname{Max}\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big) \simeq \operatorname{Spec}\Big(\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big) \otimes_{\widetilde{A}} K\Big)$.
Dar

$$\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big) \otimes_{\widetilde{A}} K \simeq B \otimes_A \big(\widetilde{A} \otimes_{\widetilde{A}} K\big) \simeq B \otimes_A K.$$

Fie $Q \in \operatorname{Max} B$ şi N unicul ideal maximal din $B \otimes_A \widetilde{A}$ care stă peste Q. Am stabilit în propoziţia 2.14 că $\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big)_N \simeq \widetilde{B_Q}$, ceea ce, împreună cu teorema 3.5, implică normalitatea inelului $\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big)_N$. Cum asocierea $Q \mapsto N$ induce o aplicaţie bijectivă între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Max}\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big)$, înseamnă că $B \otimes_A \widetilde{A}$ este inel normal. Atunci din lema precedentă rezultă că asocierea $Q \mapsto \ker\big(B \otimes_A \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B_Q}\big)$ defineşte o corespondenţă bijectivă între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Min}\big(B \otimes_A \widetilde{A}\big)$.

Pe de altă parte, deoarece L este corpul de fracţii al inelului B, există un izomorfism $L \otimes_A \widetilde{A} \simeq L \otimes_B (B \otimes_A \widetilde{A})$. Cum elementele nenule din B rămân nondivizori ai lui zero în $B \otimes_A \widetilde{A}$ (pentru că morfismul $B \longrightarrow B \otimes_A \widetilde{A}$ este fidel plat), din lema 3.9 de mai jos rezultă că asocierea $Q \mapsto Q \cap (B \otimes_A \widetilde{A})$ stabileşte o bijecţie între mulţimile $\operatorname{Min}\big(L \otimes_B (B \otimes_A \widetilde{A})\big)$ şi $\operatorname{Min}(B \otimes_A \widetilde{A})$. Analog se stabileşte o bijecţie între $\operatorname{Min}(L \otimes_A \widetilde{A})$ şi $\operatorname{Min} \widetilde{A}$. În consecinţă, asocierea $Q \mapsto Q \cap \widetilde{A}$ defineşte o corespondenţă bijectivă între $\operatorname{Min}(B \otimes_A \widetilde{A})$ şi $\operatorname{Min} \widetilde{A}$, iar aplicaţia

$$Q \mapsto \ker\big(\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B_Q}\big) = \widetilde{A} \cap \ker\big(B \otimes_A \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B_Q}\big)$$

stabileşte o bijecţie între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Min} \widetilde{A}$. □

Lema 3.9. *Fie A un inel (nu neapărat local) şi S un sistem multiplicativ închis format din nondivizori ai lui zero. Atunci asocierea $Q \mapsto Q \cap A$ stabileşte o bijecţie între* $\operatorname{Min}(S^{-1}A)$ *şi* $\operatorname{Min} A$.

Demonstraţie. Se ştie că asocierea considerată stabileşte o bijecţie între $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ şi idealele prime din A ce nu intersectează mulţimea S, bijecţie ce păstrează incluziunea. Prin urmare, urma unui ideal prim minimal din inelul de fracţii este un ideal prim minimal în A. Pentru a obţine concluzia dorită, este suficient să arătăm că orice ideal prim minimal din A este disjunct de S. Dacă $P \in \operatorname{Min} A$ şi $a \in P$, cum imaginea lui a în A_P este nilpotentă (căci $\operatorname{Spec} A_P = \{\, PA_P \,\}$), există $t \in A \setminus P$ şi un întreg $n \geq 1$ astfel încât $ta^n = 0$, ceea ce înseamnă că a este un divizor al lui zero. Prin urmare, a nu poate aparţine lui S. □

Propoziţie 3.10. *Fie A un inel local şi normal, K corpul său de fracţii, L o extindere finită a lui K şi B închiderea întreagă a lui A în L. Atunci B este inel semilocal.*

Demonstraţie. Considerăm următoarea diagramă comutativă de inele:

DE PUS

Argumentele folosite în demonstraţia teoremei 3.8 servesc pentru a deduce o corespondenţă bijectivă între $\operatorname{Max} B$ şi $\operatorname{Max}(B \otimes_A \widetilde{A})$. Tot ca acolo se arată că $B \otimes_A \widetilde{A}$ este inel normal. Din lema 3.7 rezultă că există o bijecţie între $\operatorname{Max}(B \otimes_A \widetilde{A})$ şi $\operatorname{Min}(B \otimes_A \widetilde{A})$, iar din lema precedentă se obţine o corespondenţă bijectivă între $\operatorname{Min}(B \otimes_A \widetilde{A})$ şi $\operatorname{Min}(L \otimes_A \widetilde{A})$.

Pe de altă parte, $K \otimes_A \widetilde{A}$ este corp, fiind limita inductivă a corpurilor de fracţii ale vecinătăţilor local etale ale lui A (*cf.* demonstraţia teoremei lui Nagata şi propoziţia 3.3). Cum $L \otimes_A \widetilde{A}$ este $K \otimes_A \widetilde{A}$-algebră finită, rezultă că $L \otimes_A \widetilde{A}$ este inel noetherian, care are doar un număr finit de ideale minimale. $\square$

4. Serii algebrice

O altă clasă de inele henseliene poate fi obţinută în modul următor, pornind de la un inel de polinoame $K[X_1, \dots, X_n]$ cu coeficienţi într-un corp K. Fie A inelul local $K[X_1, \dots, X_n]_{(X_1,\dots,X_n)}$, al cărui completat este inelul de serii formale $K[[X_1, \dots, X_n]]$. Se ştie că henselizatul $\widetilde{A}$ al lui A are acelaşi completat şi, deoarece el este noetherian, morfismele canonice $A \longrightarrow \widetilde{A} \longrightarrow K[[X_1, \dots, X_n]]$ sunt locale şi fidel plate, deci injective. Închiderea algebrică a inelului de polinoame în inelul de serii formale este un inel local, notat $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, al cărui ideal maximal este generat de variabile. Arătăm că acest inel este henselian.

Dacă P este un polinom unitar cu coeficienţii în $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, a cărui imagine $\overline{P} \in K[Y]$ are o rădăcină simplă în K, atunci P are o soluţie formală f în inelul henselian $K[[X_1, \dots, X_n]]$, soluţie ce ridică rădăcina simplă din K a lui $\overline{P}$. Prin urmare, f, fiind întreg peste $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, aparţine acestui inel.

Se verifică relativ uşor că henselizatul lui A este conţinut în inelul $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, numit *inelul de serii algebrice în nedeterminatele* X_1, …, X_n *cu coeficienţi în corpul* K. De fapt, vom arăta că are loc şi incluziunea inversă.

Această construcţie furnizează un exemplu de inel henselian necomplet, deoarece există din abundenţă serii formale transcendente peste inelul de polinoame. Într-adevăr, gradul de transcendenţă al corpului de serii formale peste corpul de fracţii raţionale (în aceleaşi nedeterminate) este infinit, cf. [**48**, p. 220]. Iată un exemplu concret, datorat lui Schmidt [**41**] şi care se găseşte de asemenea în [**10**, 7.25.1].

Fie K un corp, X o nedeterminată şi $f = c_0 + \sum_{n\geq 1} c_n X^{n!} \in K[[X]] \setminus K[X]$. Atunci f este transcendentă peste $K(X)$. Presupunând contrariul, rezultă că există un număr natural nenul r şi polinoame $a_j \in K[X]$, $j = 0, \dots, r$, cu $a_0 a_r \neq 0$, astfel ca $a_0 + a_1 f + \dots + a_r f^r = 0$. Pentru un indice n ce va precizat mai încolo, punem $g := c_0 + c_1 X + \dots + c_n X^{n!}$ şi $h := f - g$ şi, prin înlocuire în ecuaţia lui f, se obţine $b_0 + b_1 h + \dots + b_r h^r = 0$, cu $b_0 := a_0 + a_1 g + \dots + a_r g^r$. Alegând n suficient de mare printre indicii pentru care coeficienţii lui f sunt nenuli, avem că gradul lui b_0, egal cu gradul lui $a_r g^r$, este nenegativ, încât b_0 este nenul. Prin urmare $d := b_1 h + \dots + b_r h^r$ este o serie nenulă de ordin cel puţin $(n + 1)!$. Pe de altă parte, mărind eventual pe n (având grijă să menţinem $c_n \neq 0$), se poate realiza ca gradul lui a_r să fie mai mic strict decât $(n + 1)! - r \cdot n!$, astfel că egalitatea $b_0 = -d$ nu poate avea loc.

De fapt, construcţia seriilor algebrice poate fi de folos într-un context mai larg. Fie (A, M, K) un inel local henselian, $T = (T_1, \dots, T_n)$ variabile. Idealul generat de M şi de variabile în inelul de polinoame $A[T]$ este evident maximal. Henselizatul inelului local $A[T]_{(M,T)}$ se numeşte *inelul seriilor algebrice în variabilele* $T = (T_1, \dots, T_n)$ *cu* *coeficienţi în* A şi se notează $A\langle T\rangle$. Întrucât morfismul canonic $A[T] \longrightarrow A\langle T\rangle$ este injectiv, vom identifica polinoamele din $A[T]$ cu elemente din $A\langle T\rangle$.

Până la a putea justifica denumirea, mai este necesar un efort apreciabil. Este mult mai uşor de constatat că A-algebra seriilor algebrice corespunde unui obiect liber în categoria A-algebrelor locale henseliene.

LEMA 4.1. *Fie* $A \longrightarrow B$ *un morfism local de inele locale henseliene şi* $b_1, \dots, b_n$ *elemente din idealul maximal al lui* B. *Atunci există şi este unic un morfism local de* A*-algebre* $u : A\langle T\rangle \longrightarrow B$, $T = (T_1, \dots, T_n)$, *astfel ca* $u(T_i) = b_i$ *pentru* $i = 1, \dots, n$.

DEMONSTRAŢIE. Conform proprietăţii de universalitate a inelului de polinoame, corespondenţa indicată induce unic morfism de A-algebre $A[T] \longrightarrow B$, care se extinde în mod unic la un morfism local de A-algebre $A[T]_{(M,T)} \longrightarrow B$ datorită proprietăţii de universalitate a inelului de fracţii. Morfismul căutat rezultă cu proprietatea de universalitate a henselizatului. □

Folosind acest rezultat, să arătăm acum că putem identifica seriile algebrice cu serii formale.

LEMA 4.2. *În notaţiile şi ipotezele de mai sus:*

a) Inelul $A[[T]]$ *este local şi henselian.*

b) Unicul morfism de A*-algebre locale* $u : A\langle T\rangle \longrightarrow A[[T]]$ *indus de asocierea* $T_i \mapsto T_i$, $i = 1, \dots, n$, *este injectiv.*

DEMONSTRAŢIE. a) Este suficient să demonstrăm henselianitatea în cazul $n = 1$, pentru că apoi cazul general decurge printr-un raţionament inductiv.

Fie $F \in A[[T]][Y]$ un polinom unitar care are o rădăcină simplă în corpul rezidual K. Altfel spus, există $y = \sum_{i\geq 0} y_i T^i \in A[[T]]$ pentru care $F(y) \in (M,T)A[[T]]$ şi $F'(y) \notin (M,T)A[[T]]$. Putem presupune, fără a pierde din generalitate, că $y = y_0 \in A$. Vom construi inductiv un şir $(z_i)_{i\geq 0}$ de elemente din A astfel că $z_0 \equiv y_0 \pmod{M}$, iar $F\big(\sum_{i=0}^{r-1} z_i T^i\big) \equiv 0 \pmod{T^r}$ pentru orice număr natural $r \geq 1$. Fie $G \in A[Y]$ polinomul obţinut din F prin specializarea $T = 0$. Cum $G(y_0) \in M$, $G'(y_0) \notin M$ şi A este inel henselian, există $z_0 \in A$ astfel încât $G(z_0) = 0$ şi $z_0 \equiv y_0 \pmod{M}$. Să presupunem construite elementele $z_0, \dots, z_{r-1}$ cu proprietatea indicată. Atunci

$$H := F\big(\sum_{i=0}^{r-1} z_i T^i + Y T^r\big)/T^r$$

este un polinom în Y cu coeficienţi din $A[[T]]$. Dezvoltarea sa în serie Taylor are forma

$$H = F\big(\sum_{i=0}^{r-1} z_i T^i\big)/T^r + Y F'\big(\sum_{i=0}^{r-1} z_i T^i\big) + T^r(\text{termeni în } Y \text{ de grad} \geq 2).$$

Deoarece $F'(z_0) \equiv F'(y_0) \not\equiv 0 \pmod{(M,T)}$, înseamnă că

$$G'(z_0) = F'(z_0)|_{T=0}$$

este inversabil în A, încât elementul

$$z_r := -H|_{\substack{Y=0\\T=0}} \cdot G'(z_0)^{-1}$$

aparţine lui A. Evident ordinul (ca serie în T) pentru $H(z_r)$ este cel puţin 1, astfel că

$$F\big(\sum_{i=0}^{r-1} z_i T^i\big) = T^r H(z_r)$$

are ordinul cel puţin $r+1$. Seria formală $z := \sum_{i\geq 0} z_i T^i \in A[[T]]$ anulează F şi este congruentă cu y modulo (M,T).

b) Dacă inelul A este noetherian, la fel este şi $A\langle T\rangle$, astfel că morfismul canonic $v : A\langle T\rangle \longrightarrow \widehat{A\langle T\rangle} = \widehat{A}[[T]]$ este fidel plat şi deci injectiv. Cum v coincide cu compunerea morfismelor canonice $u : A\langle T\rangle \longrightarrow A[[T]]$ şi $A[[T]] \longrightarrow \widehat{A}[[T]]$, se obţine că u este injectiv.

În cazul general se exprimă A ca o limită inductivă de subinelele locale, henseliene şi noetheriene A_i (*cf.* corolar 3.6) şi se notează $u_i : A_i\langle T\rangle \longrightarrow A_i[[T]]$ morfismul injectiv dat de asocierea $T \mapsto T$ (*cf.* corolar 4.1). Atunci u se identifică cu limita injectivă a morfismelor compuse $A_i\langle T\rangle \longrightarrow A_i[[T]] \longrightarrow A[[T]]$. Cum limita injectivă este functor exact, rezultă că u este injectiv. □

Exemple 1. În general, morfismul canonic $A\langle T\rangle \longrightarrow \widehat{A}[[T]] = \widehat{A\langle T\rangle}$ nu este neapărat injectiv dacă A nu este noetherian. Situaţiile concrete descrise in continuare corespund cazului $n = 0$.

1) Fie A inelul germenilor de funcţii reale diferenţiabile de clasă $\mathcal{C}^\infty$ definite într-o vecinătate a originii din $\mathbb{R}$. Germenii funcţiilor diferenţiabile care se anulează în origine formează unicul ideal maximal din A, să spunem M. Am văzut că A este inel henselian. Observă, că idealul M este principal, generat de germenele a al funcţiei identitate $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Într-adevăr, dacă $V \subset \mathbb{R}$ este un deschis ce conţine 0 şi $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ este diferenţiabilă şi nulă în origine, atunci asocierea $x \mapsto f(x)/x$ defineşte o funcţie diferenţiabilă $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (conform teoremei lui l'Hospital, $g(0) = f'(0)$), al cărei germene înmulţit cu a produce germenele lui f.

Morfismul canonic $w : A \longrightarrow \widehat{A}$ nu este injectiv întrucât nucleul său conţine germenele nenul p al funcţiei diferenţiabile $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$. Germene nenul înseamnă h nu este identic nulă pe nici o vecinătate a originii, iar $p \in \cap_{n\in\mathbb{N}} a^n A$ deoarece pentru orice număr natural n, asocierea $x \mapsto \left(\mathrm{e}^{-1/x^2}\right)/x^n$ defineşte o funcţie diferenţiabilă $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^\infty$, având toate derivatele nule în origine.

2) Fie K un corp şi B inelul $k[X, Y, Y/X, Y/X^2, \ldots]$, unde X şi Y sunt variabile peste K. Se arată uşor că idealul generat de X în

B este maximal. Notând $C := B_{XB}$ şi $v : C \longrightarrow \widehat{C}$ morfismul de completare în topologia radicială, se constată că imaginea y a lui Y în C este un element nenul din $\ker v$ (căci $Y \in \cap_{n\geq 1} X^n B$). Notăm (A, r), unde $r : C \longrightarrow A$, henselizatul lui C. Cum r este morfism fidel plat, iar $v = wr$, se concluzionează că $r(y)$ este element nenul din nucleul morfismului canonic $w : A \longrightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$.

Iată un analog algebric al unui faimos rezultat clasic.

TEOREMA 4.3. *(teorema de pregătire Weierstrass pentru serii algebrice) Fie (A, M, K) un inel local henselian, T o variabilă peste A şi $f \in A\langle T\rangle$ astfel ca $f \equiv aT^n \pmod{(M, T^{n+1})A\langle T\rangle}$, cu $a \in A \setminus M$. Atunci $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ este un A-modul liber de rang n, având drept bază clasele lui $1, T, \ldots, T^{n-1}$ modulo $fA\langle T\rangle$.*

DEMONSTRAŢIE. Lema 4.2 permite să identificăm $A\langle T\rangle$ cu un subinel al lui $A[[T]]$, astfel că putem considera f ca fiind de forma

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T^i,\ c_n = a,\ c_i \in M \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Evident $h := \sum_{j=n}^{\infty} c_j T^{j-n}$ este o serie algebrică inversabilă în $A\langle T\rangle$. Fie C o vecinătate local etală a inelului $A[T]_{(M,T)}$ care conţine h şi inversul său, deci şi pe f (o astfel de alegere este posibilă conform demonstraţiei teoremei lui Nagata). Conform teoremei de structură, C este de forma $\left(A[T]_{(M,T)}[X]/(F)\right)_Q$, unde X este o variabilă peste $A[T]_{(M,T)}$, F este un polinom unitar din $A[T]_{(M,T)}[X]$, iar Q este un ideal maximal din $A[T]_{(M,T)}[X]/(F)$ care nu conţine clasa lui F' modulo F. Se găseşte $g \notin Q$ astfel încât h, h^{-1} şi f sunt conţinute în $B := \left(A[T]_{(M,T)}[X]/(F)\right)_g$. Fie $\overline{B} := B/fB$. Există următoarele izomorfisme canonice

$$\overline{B}/M\overline{B} \simeq B/(M, f) \simeq B/(hT^n, M)B \simeq B/(T^n, M)B.$$

Pe de altă parte, folosind faptul că henselizatul lui B este izomorf cu $A\langle T\rangle$, rezultă

$$B/(M,T)^n B \simeq \widetilde{B}/(M,T)^n \widetilde{B} \simeq A\langle T\rangle/(M,T)^n A\langle T\rangle,$$

astfel că

$$A\langle T\rangle/(M,T^n)A\langle T\rangle \simeq B/(M,T^n)B \simeq \overline{B}/M\overline{B}.$$

Prin urmare,

$$\overline{B}/M\overline{B} \simeq A[T]_{(M,T)}/(M,T^n) \simeq \left(K[T]/(T^n)\right)_{(M,T)} \simeq K[T]/(T^n).$$

Aceste izomorfisme arată că $\overline{B}/M\overline{B}$ este o K-algebră finită, căreia i se aplică lema 4.4, consecinţă a teoremei principale a lui Zariski. Există, aşadar, două A-algebre B_1 şi B_2, cu B_1 A-modul de tip finit, astfel ca $\overline{B} \simeq B_1 \times B_2$ şi $\overline{B}/M\overline{B} \simeq B_1/MB_1$. Fie $\overline{u} \in \mathrm{Idem}(\overline{B})$ pentru care $B_1 \simeq \overline{u}\overline{B}$ şi $u \in B$ o ridicare a sa. Probăm că u este congruent cu 1 modulo idealul lui B generat de M şi f.

Întrucât $\overline{u}$ este dus în 1 de proiecţia $\overline{B} \longrightarrow B_1$, izomorfismul $\overline{B}/M\overline{B} \simeq B_1/MB_1$ duce clasa lui $\overline{u}$ în clasa lui 1. Cu alte cuvinte, avem $\overline{u} \in 1 + M\overline{B}$, încât există $b \in B$ pentru care $t := u - fb \in 1 + MB$. Cum t este inversabil în $A\langle T\rangle$, eventual înlocuind B prin B_t, putem presupune că $\overline{u} = \overline{t}$ este inversabil în $\overline{B}$. Ne reducem astfel la cazul în care $\overline{B} \simeq B_1$ este o A-algebră finită. Pe de altă parte, $\overline{B}$ fiind o algebră finită peste inelul henselian A, este decompozabilă conform cu propoziţia 1.4. Rezultă că inelul $\overline{C} := C/fC$ este factor direct în $\overline{B}$, căci $\overline{C} = (\overline{B})_{Q\cap\overline{B}}$, şi deci este o A-algebră finită, locală şi henseliană. De aici se deduc izomorfismele

$$\overline{C} \simeq \widetilde{\overline{C}} \simeq \widetilde{C}/f\widetilde{C} \simeq A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle,$$

întrucât $\widetilde{C} \simeq A\langle T\rangle$ în virtutea corolarului 2.12.

Din cele demonstrate până aici rezultă, de asemenea, că $E := A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle$ este un A-modul finit generat. Arătăm acum că dacă A este inel noetherian, atunci E este un A-modul plat.

Observăm, mai întâi, că morfismul $A \longrightarrow E$ este local. Cum E este modul de tip finit, se deduce că ME este conţinut în radicalul Jacobson al inelului E. Dintr-o binecunoscută caracterizare a platitudinii (demonstrată, de pildă, în [**36**, cap.IV, 6.14]), platitudinea unui modul finit generat E peste un inel local şi noetherian A este echivalentă cu $\mathrm{Tor}_1^A(E,K) = 0$. Să arătăm, aşadar, anularea acestui modul. Din şirul exact $0 \longrightarrow A\langle T\rangle \xrightarrow{f} A\langle T\rangle \longrightarrow E \longrightarrow 0$ (omotetia de raport f este injectivă pentru că f este nondivizor al lui zero în $A\langle T\rangle$, având un coeficient inversabil în A) se obţine prin tensorizarea cu corpul rezidual un şir exact

$$\mathrm{Tor}_1^A(A\langle T\rangle, K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(E,K) \longrightarrow A\langle T\rangle/MA\langle T\rangle \xrightarrow{f} A\langle T\rangle/MA\langle T\rangle \longrightarrow E/ME \longrightarrow 0.$$

Întrucât morfismele $A \longrightarrow A[T]_{(M,T)} \longrightarrow A\langle T\rangle$ sunt plate, modulul cel mai din stânga din acest şir exact este nul. Cum henselizarea comută cu luarea câturilor (corolar 2.15), avem $A\langle T\rangle/MA\langle T\rangle \simeq K\langle T\rangle$. Dar omotetia lui $K\langle T\rangle$ indusă de f este injectivă, deoarece clasa lui f în $K\langle T\rangle$ este nondivizor al lui zero. Rezultă $\mathrm{Tor}_1^A(E,K) = \ker f = 0$.

Este un fapt general, demonstrat, de pildă, în [**36**, Cor. 2.17, cap. IV], că un modul plat şi de tip finit peste un inel local şi noetherian este liber, astfel că E este A-modul liber. Cu lema lui Nakayama se verifică uşor că o bază a sa este formată din clasele lui $1, T, \ldots, T^{n-1}$ modulo $fA\langle T\rangle$.

Când A nu este noetherian, îl exprimăm ca o limită inductivă de subinele locale, noetheriene şi henseliene $(A_i)_{i\in I}$. Conform propoziţiei 2.4, $A\langle T\rangle = \varinjlim A_i\langle T\rangle$, prin urmare există un indice $i \in I$ astfel ca f să provină din $A_i\langle T\rangle$. Conform celor stabilite în cazul noetherian, pentru orice $j \in I$, $j \geq i$, $A_j\langle T\rangle/fA_j\langle T\rangle$ este un A_j-modul liber, de bază clasele lui $1, T, \ldots, T^{n-1}$ modulo $fA_j\langle T\rangle$. Concluzia teoremei se deduce din izomorfismul $A\langle T\rangle/fA\langle T\rangle \simeq A \otimes_{A_i} \big(A_i\langle T\rangle/fA_i\langle T\rangle\big)$. □

LEMA 4.4. *Fie (A, M, K) un inel local henselian şi B o A-algebră de tip finit. Dacă B/MB este o K-algebră finită, atunci există o A-algebră finită C şi o A-algebră D astfel încât $B \simeq C \times D$ şi $B/MB \simeq C/MC$.*

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia poate fi găsită în [**26**, p. 113–114]. □

Având în vedere faptul că inelul de serii algebrice este obiect liber într-o anumită categorie de algebre, rezultatul următor nu este câtuşi de puţin surprinzător.

LEMA 4.5. *Fie A un inel local, $\widetilde{A}$ henselizatul său, $E \in \widetilde{A}$-mod şi $D : A \longrightarrow E$ o derivare. În aceste condiţii există o unică derivare $\widetilde{D} : \widetilde{A} \longrightarrow E$ care extinde D.*

DEMONSTRAŢIE. Va fi suficient să probăm că D se prelungeşte în mod unic la orice vecinătate local etală $B = \big(A[X]/(F)\big)_Q$ a lui A (cu F şi Q având proprietăţile din teorema de caracterizare a vecinătăţilor local etale). Notăm cu x imaginea variabilei X în B. Întrucât $F(x) = 0$, orice derivare $\widetilde{D} : \widetilde{A} \longrightarrow E$ ce prelungeşte D îndeplineşte cu necesitate condiţia $F^D(x) + \widetilde{D}(x)F'(x) = 0$, unde $F^D \in E[X]$ notează „polinomul" obţinut din F prin aplicarea derivării D tuturor coeficienţilor lui F, iar $E[X]$ este $\widetilde{A}$-modulul format din sume finite $\sum c_i X^i$, cu toţi c_i din E. Aşa cum rezultă dintr-un calcul direct, condiţia

$$\widetilde{D}(x) = -F^D(x) \cdot \big(F'(x)\big)^{-1}$$

asigură că asocierea

$$\text{clasa lui } G \mapsto G^D(x) + G(\widetilde{D}(x)),\ G \in A[X],$$

defineşte o derivare $B \longrightarrow E$ care prelungeşte D. □

Conform acestui rezultat, derivările $\partial/\partial T_i : A[T] \longrightarrow A[T]$, $i = 1, \ldots, n$, se prelungesc în mod unic la nişte derivări $A\langle T\rangle \longrightarrow A\langle T\rangle$. Pentru $t_1, \ldots, t_n$ elemente neinversabile dintr-un inel local şi henselian A, există şi este unic un morfism de A-algebre $A\langle T\rangle \longrightarrow A$ dat prin $T_i \mapsto t_i$. Pentru o serie algebrică f vom nota $f(t)$ imaginea lui f prin acest morfism. Cu aceste convenţii putem enunţa şi demonstra teorema funcţiilor implicite pentru inelul de serii algebrice.

TEOREMA 4.6. *Fie $f = (f_1, \ldots, f_n)$ serii algebrice în variabilele $T = (T_1, \ldots, T_n)$ cu coeficienţi într-un inel local henselian (A, M, K). Dacă $t = (t_1, \ldots, t_n)$ sunt elemente din M astfel ca $f(t) \in M$ şi $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\right) \notin M$, atunci f are o soluţie unică $z = (z_1, \ldots, z_n)$ cu $z_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$.*

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că morfismul canonic $A \longrightarrow A\langle T\rangle/(f)$ este izomorfism. Fie (a_{ij}) matricea inversă a matricii iacobiene $\big(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\big)$ şi $h : A\langle T\rangle \longrightarrow A\langle T\rangle$ unicul morfism de A-algebre dat prin $T_i \mapsto t_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_j$. Evident, h este un automorfism al lui $A\langle T\rangle$ care transformă f_j, privit ca serie formală, în

$$g_j = u_j + T_j + \text{ serie de ordin} \geq 2 \text{ în } T,$$

cu toţi u_j din M. Conform teoremei de pregătire Weierstrass, $A\langle T\rangle/(g_n)$ este un $A\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle$-modul liber de rang 1. Aşadar, morfismul canonic $v : A\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle \longrightarrow A\langle T\rangle/(g_n)$ este izomorfism şi induce un izomorfism

$$w : A\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle/\big(v^{-1}(g_1), \ldots, v^{-1}(g_{n-1})\big) \longrightarrow A\langle T\rangle/(g).$$

Cum $v^{-1}(g_{n-1})$ are forma

$$g_{n-1}\big(T_1, \ldots, T_{n-1}, v^{-1}(T_n)\big) = u_{n-1} + T_{n-1} + \text{ termeni din } (M, T)^2,$$

putem aplica din nou teorema 4.3, de această dată pentru morfismul canonic

$$A\langle T_1, \ldots, T_{n-2}\rangle \longrightarrow A\langle T_1, \ldots, T_{n-1}\rangle/\big(v^{-1}(g_{n-1})\big).$$

Iterând acest argument, se obţine $A \simeq A\langle T\rangle/(g) \simeq A\langle T\rangle/(f)$. □

TEOREMA 4.7. *(lema lui Newton, forma extinsă) Fie* $f = (f_1, \ldots, f_m)$ *serii algebrice în variabilele* $T = (T_1, \ldots, T_n)$ $(m \leq n)$ *cu coeficienţi într-un inel local henselian* (A, M, K), $t = (t_1, \ldots, t_n)$ *cu toţi* $t_i \in M$, *şi* I *idealul generat de* $m \times m$*-minorii matricii iacobiene* $\big(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(t)\big)$. *Dacă pentru un ideal* $J \subseteq M$ *avem* $f(t) \in I^2 J$, *atunci există în* A^n *o soluţie* $z = (z_1, \ldots, z_n)$ *a lui* f *cu* $z_i - t_i \in IJ$, $i = 1, \ldots, n$.

COROLAR 4.8. *În notaţiile de mai sus, dacă există numere naturale* s, c *astfel ca* $f(t) \in M^{2s+c}$ *şi* $M^s \subseteq I$, *atunci există o soluţie* $u \in A^n$ *a lui* f *cu* $u_i - t_i \in M^c$, $i = 1, \ldots, n$.

În multe cazuri particulare, frecvent întâlnite „în practică”, $A\langle T\rangle$ coincide cu închiderea *algebrică* a inelului $A[T]_{(M,T)}$ în $\widehat{A}[[T]]$, ceea ce justifică denumirea de serii algebrice folosită pentru elementele acestui inel. Rezultatul următor dă condiţii suficiente pentru ca henselizatul unui inel local noetherian să se identifice cu închiderea sa algebrică în completatul în topologia radicială.

TEOREMA 4.9. *Fie* (A, M, K) *un inel local, noetherian, redus, cu fibrele formale geometric reduse (adică pentru orice* $P \in \operatorname{Spec} A$ *şi pentru orice corp* L *extindere a lui* $k(P)$, *inelul* $\widehat{A} \otimes_A L$ *este redus). Dacă inelul* $\widehat{A} \otimes_A Q(A)$ *este normal, atunci* $\widetilde{A}$ *coincide cu închiderea algebrică a lui* A *în* $\widehat{A}$.

COROLAR 4.10. *Fie A un inel redus, localizare într-un ideal prim a unei algebre de tip finit peste un corp sau peste $\mathbb{Z}$. Atunci $\widetilde{A}$ coincide cu închiderea algebrică a lui A în completatul său. În particular, pentru orice număr prim p, elementele algebrice peste $\mathbb{Z}$ din inelul numerelor p-adice formează henselizatul lui $\mathbb{Z}_{(p)}$, iar inelul de serii algebrice în variabilele $T = (T_1, \dots, T_n)$ cu coeficienţi într-un corp K constituie henselizatul inelului $K[T]_{(T)}$.*

Un inel de tipul celor descrise în acest corolar este excelent, astfel că fibrele sale formale sunt geometric regulate, în particular, geometric normale. Pentru detalii, trimitem la [**10**, Teorema 9.13].

DEMONSTRAŢIE. (Demonstraţia teoremei 4.9.) Observăm, pentru început, că dacă teorema este valabilă pentru inele henseliene, atunci $\widetilde{A}$ este algebric închis în $\widehat{A}$. Cum elementele lui $\widetilde{A}$ sunt vizibil algebrice peste A, rezultă că $\widetilde{A}$ este închiderea algebrică a lui A în $\widehat{A}$.

Primul pas al demonstraţiei va consta în a proba că ipotezele asupra lui A sunt transferabile la henselizatul său. Am văzut în teorema 3.5 că ipotezele A redus, local, noetherian sunt moştenite de henselizat. Notând $B = \widetilde{A} \otimes_A Q(A)$, izomorfismele

$$\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} Q(\widetilde{A}) \simeq \widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} \big(B \otimes_B Q(\widetilde{A})\big) \simeq (\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} B) \otimes_B Q(\widetilde{A}) \simeq$$
$$\simeq \Big(\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} \big(\widetilde{A} \otimes_A Q(A)\big)\Big) \otimes_B Q(\widetilde{A}) \simeq \big(\widehat{A} \otimes_A Q(A)\big) \otimes_B Q(\widetilde{A})$$

arată că $\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} Q(\widetilde{A})$ este un inel de fracţii al inelului normal $\widehat{A} \otimes_A Q(A)$, deci este el însuşi inel normal.

Probăm acum că henselizatul unui inel local universal japonez este încă universal japonez. Pentru $Q \in \operatorname{Spec} \widetilde{A}$ şi un corp L, extindere a lui $k(Q)$, rezultă că $\widehat{A} \otimes_A L$ este inel redus (deoarece L este extindere a corpului $k(P)$, unde $P := Q \cap A$). Prin tensorizarea morfismului fidel plat $L \longrightarrow \widetilde{A} \otimes_A L$ cu $\widehat{A}$ peste $\widetilde{A}$ se obţine un morfism injectiv

$$\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} L \longrightarrow \widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} (\widetilde{A} \otimes_A L) \simeq \widehat{A} \otimes_A L,$$

ceea ce arată că inelul $\widehat{A} \otimes_{\widetilde{A}} L$ este redus, fiind izomorf cu un subinel al unui inel redus.

Pas 2. Reducere la cazul A domeniu

Arătăm că inelul total de fracţii al unui inel noetherian şi redus A este produs direct finit de corpuri, mai precis $Q(A) \simeq \prod_{P \in \operatorname{Min} A} k(P)$.

Fie S mulţimea nondivizorilor lui zero din A, altfel spus, complementara reuniunii idealelor prime minimale ale inelului (toate idealele prime asociate unui inel noetherian redus sunt minimale). Singurele ideale prime din $Q(A)$ sunt extinderile $M_1, \dots, M_n$ ale idealelor din $\operatorname{Min} A = \{ P_1, \dots, P_n \}$. Intersecţia lor este idealul nul (căci $Q(A)$ este inel redus), iar $Q(A)/M_i = Q(A)_{M_i} =: L_i$, $i = 1, \dots, n$. Morfismul canonic $f : A \longrightarrow \prod_{i=1}^n Q(A)/M_i$ este evident injectiv. Notând $N_i := \prod_{j \neq i} M_j$ $(1 \leq i \leq n)$, se observă că $\sum_{i=1}^n N_i$ nu este inclus în nici un ideal prim al inelului total de fracţii, astfel că $\sum_{i=1}^{n} N_i = Q(A)$. Prin urmare, există $x_i \in N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a căror sumă este 1. Cum $x_i - 1 \in M_i$ şi $x_i \in M_j$ pentru $1 \leq i \neq j \leq n$, surjectivitatea lui f este clară.

Prin tensorizarea morfismelor canonice injective

$$A \longrightarrow \prod_{P \in \operatorname{Min} A} A/P \longrightarrow Q(A)$$

se obţin morfisme injective

$$\widehat{A} \longrightarrow \prod_{P \in \operatorname{Min} A} \widehat{A}/P\widehat{A} \longrightarrow \widehat{A} \otimes_A Q(A).$$

Observăm că A/P moşteneşte toate proprietăţile lui A (o imagine homomorfă de inel local universal japonez este încă universal japonez, *cf.* [**10**, Teorema 7.19], iar inelul $\widehat{A/P} \otimes_{A/P} k(P) \simeq \widehat{A} \otimes_A k(P)$ este normal fiind factor direct în $\widehat{A} \otimes_A Q(A)$). Dacă pentru orice $P \in \operatorname{Min} A$, domeniul A/P este algebric închis în completarea sa, rezultă că inelul $\prod_{P \in \operatorname{Min} A} A/P$ este algebric închis în $\prod_{P \in \operatorname{Min} A}) \widehat{A/P}$, iar un element x din completatul $\widehat{A}$ care este algebric peste A va aparţine, în consecinţă, lui $Q(A)$. Rămâne să observăm că $\widehat{A} \cap Q(A) = A$. Într-adevăr, fie a, $b \in A$, cu b nondivizor al lui zero, astfel ca a/b să aparţină completatului $\widehat{A}$. Atunci $a \in b\widehat{A} \cap A = bA$, întrucât $\widehat{A}$ este A-algebră fidel plată, şi prin urmare $a/b \in A$.

Pas 3. Cazul A domeniu henselian.

Vom arăta că orice $x \in \widehat{A}$ algebric peste A aparţine lui A. Deoarece $x = y + z$, cu $y \in A$ şi $z \in M\widehat{A}$ (din izomorfismul corpurilor reziduale al lui A şi al completatului său), va fi suficient să presupunem x neinversabil în $\widehat{A}$. Multiplicând eventual x cu un element nenul u din A, putem presupune că x este rădăcină pentru un polinom unitar f din $A[X]$ care este ireductibil în $Q(A)$ (dacă $ux \in A$, atunci $x \in \widehat{A} \cap Q(A) = A$ conform celor deja stabilite).

Mai mult, $fQ(A)[X] \cap A[X] = fA[X]$, prin urmare $A[x] \simeq A[X]/(f)$ este un inel integru. Arătăm că polinomul f este separabil. Orice polinom ireductibil este separabil în caracteristică nulă, astfel că avem de justificat afirmaţia doar în cazul în care caracteristica corpului rezidual este $p > 0$. Presupunem că f nu este separabil. Atunci inelul $A[x] \otimes_A Q(A)^{1/p}$ nu este redus şi cu atât mai mult inelul $\widehat{A} \otimes_A Q(A)^{1/p}$ nu este redus, în contradicţie cu ipoteza că fibra formală în (0) a lui A este geometric redusă.

Notăm $\overline{A[x]}$ normalizatul domeniului $A[x]$. Fiind integru, acesta este un inel local şi henselian conform propoziţiei 2.5. În plus, este o A-algebră finită întrucât A este inel universal japonez (se aplică [**10**, Propoziţia 7.3]), astfel că $C := \widehat{A} \otimes_A \overline{A[x]}$ este completatul său în topologia radicială. Reţinem că C este un inel local. După ce arătăm că

C este inel normal, va rezulta că el este integru şi prin urmare la fel este subinelul său $\widehat{A}\otimes_A A[x]$ (se tensorizează cu $\widehat{A}$ peste A morfismul canonic injectiv $A[x] \longrightarrow \overline{A[x]}$). Se deduce astfel că f rămâne ireductibil când este considerat ca polinom cu coeficienţi în $\widehat{A}$. Dar f are o rădăcină în completatul lui A, astfel că el trebuie să fie polinom liniar. De aici rezultă imediat că $x \in Q(A) \cap \widehat{A} = A$.

Pentru a arăta că inelul C este normal, vom folosi [**10**, Teorema 8.22]. Pentru comoditate, enunţăm acest rezultat în propoziţia 4.11. În cazul nostru, $A[x]$ are fibrele formale geometric reduse fiind o extindere finită a unui inel universal japonez (se aplică din nou [**10**, 7.3]). Mai trebuie justificată normalitatea inelului $\widehat{A} \otimes_A Q(A[x])$.

Normalizatul $\overline{A}$ al lui A este o A-algebră finită (din teorema lui Nagata [**10**, 7.3]) şi locală (conform corolarului 1.5), al cărui completat este $\widehat{A} \otimes_A \overline{A}$. Ipoteza $\widehat{A} \otimes_A Q(A)$ inel normal permite aplicarea propoziţiei 4.11, din care rezultă că $\widehat{A} \otimes_A \overline{A}$ este normal. Pe de altă parte, cum f este unitar şi ireductibil peste $Q(A)$, se arată că $fQ(A)[X] \cap \overline{A}[X] = f\overline{A}[X]$, astfel că $\overline{A}[x] \simeq \overline{A}[X]/(f)$ şi prin urmare

$$\widehat{A} \otimes_A \overline{A}[x] \simeq (\widehat{A} \otimes_A \overline{A})[X]/(f).$$

Din corolarul 3.3 rezultă că A-algebra etală $B := \left(\widehat{A} \otimes_A \overline{A}[x]\right)_{f'(x)}$ este inel normal. La fel este şi inelul său total de fracţii $\widehat{A} \otimes_A Q(\overline{A}[x])$ $= \widehat{A} \otimes_A A[x]$. $\square$

PROPOZIŢIE 4.11. *Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism injectiv şi plat de inele noetheriene, iar $\overline{A}$ normalizatul inelului A. Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:*

a) A este inel redus,
b) pentru orice ideal prim din A cu profunzimea 1, fibra $k(P) \longrightarrow B \otimes_A k(P)$ a lui u în P este geometric redusă,
c) inelul $B \otimes_A Q(A)$ este normal.

Atunci normalizatul lui B coincide cu $B \otimes_A \overline{A}$.

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia se găseşte în [**10**, 8.22]. $\square$

CAPITOLUL 2

Inele cu proprietatea de aproximare

Multă vreme, şi chiar şi acum, pentru multă lume, algebra este „ştiinţa de a rezolva ecuaţii".

Ecuaţiile servesc la definirea unor clase de elemente (inversabile, nilpotente, idempotente, întregi, algebrice, divizori ai lui zero), inele (reduse, întreg închise, henseliene, corpuri, corpuri algebrice, corpuri real închise), morfisme (întregi, plate, pure, algebrice, separabile).

Un modul E peste un inel arbitrar A este plat dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b_i \in A$, $y_i \in E$ $(1 \leq i \leq n)$ astfel încât $b_1y_1 + \cdots + b_ny_n = 0$, există $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ şi $a_{ij} \in A$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ astfel ca pentru orice $1 \leq j \leq n$ să avem $\sum_{i=1}^{n} b_i a_{ij} = 0$ şi pentru toţi $1 \leq i \leq m$, $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$.

Un submodul E al unui modul F se numeşte pur dacă pentru orice $e_1, \ldots, e_n \in E$ şi $a_{ij} \in A$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$, dacă sistemul de ecuaţii liniare $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = e_i$, $1 \leq i \leq m$, are o soluţie în F atunci are soluţie în E.

1. Inele cu proprietatea de aproximare

Definiţie 1.1. Un morfism de A-algebre $u : B \longrightarrow C$ se numeşte *algebric pur* dacă fiecare sistem finit de ecuaţii polinomiale

$$P_i(X_1, \ldots, X_n) = b_i, \quad \text{cu } P_i \in A[X_1, \ldots, X_n],\ b_i \in B, 1 \leq i \leq r,$$

are soluţii în B exact atunci când sistemul $P_i(X_1, \ldots, X_n) = u(b_i)$, $1 \leq i \leq r$, are soluţii în C.

Exemple. 1. Morfismul structural al unei A-algebre de prezentare finită este algebric pur dacă şi numai dacă admite o retractă în categoria A-algebrelor.

2. Orice algebră peste un corp algebric închis este algebric pură.

3. Compunerea a două morfisme algebric pure este morfism algebric pur.

4. Definiţia poate fi reformulată sub forma: pentru orice B-algebră D de prezentare finită şi orice morfism de A-algebre $w : D \longrightarrow C$, există un morfism de A-algebre $v : D \longrightarrow B$ astfel încât $w = uv$.

Definiţie 1.2. Un inel local şi noetherian (A, M, K) are *proprietatea de aproximare* (este *AP-inel*) dacă morfismul de completare în topologia radicială $A \longrightarrow \widehat{A}$ este algebric pur.

Iată o primă consecinţă a acestei definiţii.

LEMA 1.3. *Un AP-inel este henselian.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $F \in A[X]$ este un polinom într-o variabilă astfel ca $F(0) \in M$, $F'(0) \notin M$, atunci F are o unică soluţie în idealul maximal al inelului henselian $\widehat{A}$. Această soluţie trebuie să se afle în M, întrucât A are proprietatea de aproximare. $\square$

Definiţia spune că pentru orice sistem finit de ecuaţii polinomiale, mulţimea soluţiilor într-un AP-inel şi mulţimea soluţiilor în completat sunt simultan vide. Rezultatele următoare arată că proprietatea de aproximare stabileşte o legătură mult mai puternică între cele două mulţimi.

LEMA 1.4. *Un inel noetherian şi local (A, M, K) este AP-inel dacă şi numai dacă orice sistem finit F de ecuaţii polinomiale peste A în $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ are mulţimea soluţiilor în A densă (în topologia radicială) în mulţimea soluţiilor în $\widehat{A}$. Altfel spus, pentru orice soluţie $\widehat{y}$ a lui F în $\widehat{A}$ şi orice număr întreg $c \geq 1$, există o soluţie y a lui F în A astfel încât $y \equiv \widehat{y} \pmod{M^c \widehat{A}}$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\widehat{y}$ şi c ca în enunţ. Deoarece $A/M^c \simeq \widehat{A}/M^c\widehat{A}$, se găseşte un sistem $\tilde{y}$ de n elemente din A, fiecare congruent modulo $M^c\widehat{A}$ cu elementul de acelaşi indice din $\widehat{y}$. Există, aşadar, elemente $a_i \in M^c$ şi $\widehat{z_i} \in \widehat{A}^n$, $1 \leq i \leq s$, astfel încât $\tilde{y} - \widehat{y} = \sum_{i=1}^{s} a_i \widehat{z_i}$. Interpretăm această egalitate în termeni de ecuaţii: $(\widehat{y}, \widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_s})$ este o soluţie în $\widehat{A}$ pentru sistemul de ecuaţii polinomiale $F = 0$, $G := \tilde{y} - Y - \sum_{i=1}^{s} a_i Z_i = 0$. Cum A este AP-inel, acest sistem are o soluţie $(y, z_1, \ldots, z_s)$ în A. Egalitatea $G(y, z_1, \ldots, z_s) = 0$ exprimă congruenţa lui y şi $\tilde{y}$ modulo M^c. Prin tranzitivitate rezultă $y \equiv \widehat{y} \pmod{M^c\widehat{A}}$. $\square$

PROPOZIŢIE 1.5. *Fie (A, M, K) un AP-inel, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ variabile peste A, F un sistem de polinoame din $A[Y]$ şi $c \in \mathbb{N}$. Dacă sistemul $F = 0$ are un număr finit de soluţii $y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}$ în M^c (eventual nici una, când $s = 0$), nu există alte soluţii în $M^c\widehat{A}$.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem, prin absurd, că $\widehat{y}$ este o soluţie pentru F în $M^c\widehat{A}$ diferită de $y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}$. Cum topologia M-adică a lui $\widehat{A}$ este separată, există $t > c$ astfel ca $\widehat{y} \not\equiv y^{(i)} \pmod{M^t\widehat{A}}$, $i = 1, \ldots, s$. Pe de altă parte, rezultatul precedent asigură existenţa unei soluţii a lui F în A congruentă cu $\widehat{y}$ modulo $M^t\widehat{A}$. Se deduce existenţa unei soluţii suplimentare în M^c pentru F. $\square$

Aşa simplă cum e, propoziţia are consecinţe spectaculoase.

COROLAR 1.6. *Fie A un AP-inel şi $\widehat{A}$ completatul său în topologia radicială.*

a) A este redus dacă şi numai dacă $\widehat{A}$ este redus.

b) Dacă A este domeniu, atunci A este algebric închis în $\widehat{A}$.

Demonstraţie. a) Orice inel local şi noetherian cu completatul redus este redus, pentru că morfismul de completare este injectiv. Reciproc, dacă A este redus, pentru orice $n \geq 1$, polinomul $F := X^n$ are unică soluţie în M. Conform rezultatului precedent, F nu are soluţii nenule în $\widehat{A}$.

b) Un polinom F într-o variabilă cu coeficienţi într-un domeniu de integritate A are un număr finit de soluţii în A (gradul polinomului este un majorant pentru acest număr). Cum A are proprietatea de aproximare, F nu poate avea rădăcini în $\widehat{A}$ care să nu fie în A, astfel că A conţine toate rădăcinile lui F în $\widehat{A}$. □

Proprietatea de aproximare „urcă" prin morfisme finite.

Propoziţie 1.7. *Dacă (A, M, K) este un AP-inel şi B este o A-algebră locală şi finită, atunci B are proprietatea de aproximare.*

Demonstraţie. Fie $w_1, \ldots, w_s$ un sistem de generatori pentru A-modulul B, $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A^s, B)$ dat prin $\phi(a_1, \ldots, a_s) := \sum_{i=1}^{s} a_i w_i$ şi $v_1, \ldots, v_p$ un sistem de generatori pentru nucleul morfismului ϕ. Fie $F = (F_1, \ldots, F_r)$ polinoame în $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ cu coeficienţi în B şi $\widehat{y} \in \widehat{B}^n$. Deoarece $\widehat{B} \simeq \widehat{A} \otimes_A B$, orice componentă $\widehat{y}_j$ se exprimă sub forma $\widehat{y}_j = \sum_{i=1}^{s} \widehat{y}_{ji} w_i$, pentru $\widehat{y}_{ji} \in \widehat{A}$ convenabili ($1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq s$), astfel că $F_t(\widehat{y})$ ($1 \leq t \leq r$) are forma $\sum_{k=1}^{s} F_{tk}\big((\widehat{y}_{ji})\big) w_k$, unde $F_{tk} \in A[Y_{ji}]$ ($1 \leq i, k \leq s, 1 \leq j, t \leq n$).

Evident $\widehat{y}$ este soluţie a lui F în $\widehat{B}$ dacă şi numai dacă există $\widehat{z}_{tq} \in \widehat{A}$ ($1 \leq t \leq r, 1 \leq q \leq p$) astfel încât

$$F_{tk}((\widehat{y}_{ji})) = \sum_{q=1}^{p} \widehat{z}_{tq} v_{qk} \ (1 \leq k \leq s, 1 \leq t \leq r).$$

Aici se foloseşte faptul că $v_1, \ldots, v_p$ generează, de asemenea, nucleul morfismului extins $\widehat{A} \otimes_A \phi$.

Dacă $\widehat{y}$ este o soluţie a lui F în $\widehat{B}$, atunci $(\widehat{y}_{ji})$, $(\widehat{z}_{tq})$ constituie o soluţie în $\widehat{A}$ a sistemului

$$F_{tk}((Y_{ji})) = \sum_{q=1}^{p} Z_{tq} v_{qk} \ (1 \leq k \leq s, 1 \leq t \leq r)$$

definit de polinoame în Y_{ji}, Z_{tq} cu coeficienţi în A. Fie (y_{ji}), (z_{tq}) o soluţie în A a acestui sistem. Atunci (y_j), dat prin $y_j = \sum_{i=1}^{s} y_{ji} w_i$, constituie o soluţie a lui F în B. □

În propoziţia II.2.5 s-a arătat că orice algebră întreagă şi locală peste un inel henselian este încă inel henselian. Proprietatea de aproximare nu se transmite prin morfisme întregi şi locale, aşa cum se constată examinând următorul (caz particular al unui) exemplu al lui Nagata [**24**, Ex. 6.3].

Fie $K \subset L$ o extindere de corpuri de caracteristică $p > 0$ astfel ca $[L : K] = \infty$ şi $L^p \subseteq K$. Se consideră o variabilă X şi subinelul $A := K[[X]][L]$ al inelului de serii formale $L[[X]]$. Vom arăta:

a) A este un inel de valuare discretă şi completatul său este $\widehat{A} = L[[X]] \neq A$.
b) A este inel henselian, dar nu universal japonez.
c) Pentru $f \in \widehat{A} \setminus A$, polinomul $F := Y^p - f^p \in A[Y]$ are cel puţin soluţia f în $\widehat{A}$, dar nu are nici o soluţie în A.

Evident A este domeniu (fiind conţinut în inelul integru $L[[X]]$), X generează idealul maximal din A şi topologia (X)-adică a lui A, fiind indusă de cea a lui $L[[X]]$, este separată. Rezultă că fiecare element al lui A este de forma $X^n g$, cu n un număr natural, unic determinat, şi cu g inversabil în A. Această reprezentare permite să se verifice cu uşurinţă că fiecare ideal al inelului A este principal, generat de o putere a variabilei, iar orice două elemente am considera, unul dintre ele divide pe celălalt. Aşadar, A este un inel de valuare discretă.

O descriere alternativă a lui A este dată de relaţia

$$A = \{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in L[[X]] \; : \; [K\big((a_n)_n\big) \; : \; K] < \infty \} = \varinjlim K[[X]][K_1],$$

unde limita inductivă se face după toate extinderile finite K_1 ale lui K conţinute în L.

Într-adevăr, orice $f \in A$ admite o reprezentare $f = \sum_{i=1}^{t} u_i x_i$, cu $u_i \in K[[X]]$ şi $x_i \in L$, astfel că $f \in K(x_1, \ldots, x_n)[[X]]$. Extinderea de tip finit $K \subseteq K(x_1, \ldots, x_n)$ fiind algebrică, ea este de fapt finită. Reciproc, dacă corpul K_1 este o subextensie finită pentru $K \subset L$ şi $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in K_1[[X]]$, se consideră o bază $x_1, \ldots, x_t$ a K-spaţiului vectorial K_1 şi se exprimă fiecare coeficient al lui f în funcţie de $x_1, \ldots, x_t$:

$$a_n = \sum_{j=1}^{t} c_{nj} x_j, \forall n \geq 0 \Longrightarrow f = \sum_{j=1}^{t} \big(\sum_{n \geq 0} c_{nj} X^n \big) x_j \in K[[X]][L].$$

Clar $A/X^n A \simeq L[[X]]/X^n L[[X]]$, astfel că $L[[X]]$ este completatul lui A în topologia radicială şi nu coincide cu A pentru că $\sum_{n \geq 0} x_n X^n \in L[[X]] \setminus A$, unde $(x_n)_n$ este o familie infinită de elemente din L liniar independente peste K. Acest element are proprietatea $f^p \in K[[X]] \subset A$, ceea ce arată că extinderea $Q(A) \subset Q(\widehat{A})$ nu este separabilă. Dar teorema Zariski-Nagata [**10**, 7.13] afirmă că un inel noetherian semilocal este universal japonez atunci şi numai atunci când fibrele sale formale sunt geometric reduse, în particular $Q\big((A/P)\widehat{\ }\big)$ este produs de corpuri, extinderi separabile ale lui $Q(A/P)$, pentru orice ideal prim P din A.

A este domeniu de integritate şi extindere întreagă a inelului henselian $K[[X]]$, deci el însuşi este inel henselian.

Pentru a justifica cele afirmate la punctul c), se consideră $y \in \widehat{A} \setminus A$ arbitrar. Din ipoteza $L^p \subseteq K$ şi din cele demonstrate la a) rezultă $y^p \in A$, astfel că polinomul $Y^p - y^p$ are coeficienţii din A. Dacă acest polinom ar avea o soluţie a în inelul A, s-ar obţine $(a-y)^p = 0$. Întrucât A este domeniu de integritate, rezultă $a - y = 0$, de unde contradicţia $y = a \in A$.

Un argument indirect pentru partea c) foloseşte condiţia necesară pusă în evidenţă în rezultatul următor.

Propoziţie 1.8. *Fie (A, M, K) un AP-inel noetherian. Atunci:*

a) A este domeniu dacă şi numai dacă $\widehat{A}$ este domeniu.

b) Extinsul oricărui ideal prim din A rămâne prim în completat.

c) Pentru orice corp L care este A-algebră finită, inelul $L \otimes_A \widehat{A}$ este integru. În particular, A este universal japonez.

Demonstraţie. a) Implicaţia netrivială se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunând că A este integru, iar $\widehat{A}$ nu este integru, înseamnă că există $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{A}$ nenule al căror produs este nul. Fie $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $\widehat{x}, \widehat{y} \notin M^c\widehat{A}$. Conform lemei 1.4, ecuaţia $XY = 0$ are o soluţie $(x, y) \in A^2$ cu $x \equiv \widehat{x} \pmod{M^c\widehat{A}}$ şi $y \equiv \widehat{y} \pmod{M^c\widehat{A}}$. Rezultă $x, y \notin M^c$, deci sunt cu necesitate nenule, astfel că A nu este integru.

b) Pentru orice ideal prim P al lui A, domeniul A/P are proprietatea de aproximare conform propoziţiei precedente, astfel că $(A/P)^\wedge \simeq \widehat{A}/P\widehat{A}$ este domeniu conform celor demonstrate la punctul a).

c) Notând P nucleul morfismului de structură al A-algebrei L, avem $P \in \operatorname{Spec} A$, iar domeniul A/P este AP-inel conţinut de L, astfel că putem presupune $A \subset L$. Alegem o bază $b_1, \ldots, b_n$ a lui L peste corpul de fracţii $Q(A)$ formată din elemente întregi peste A. Atunci $B := A[b_1, \ldots, b_n]$ este o A-algebră finită peste inelul henselian A. Fiind integru, B este inel local şi henselian. Din propoziţia 1.7 rezultă că B are proprietatea de aproximare. Sunt îndeplinite, astfel, ipotezele cerute la punctul a), din care decurge că $\widehat{B} \simeq B \otimes_A \widehat{A}$ este domeniu.

Ţinând cont că L este corpul de fracţii al lui B, obţinem că inelul

$$L \otimes_A \widehat{A} = Q(B) \otimes_A \widehat{A} \simeq Q(B) \otimes_B (B \otimes_A \widehat{A}) \simeq Q(B) \otimes_B \widehat{B}$$

este un inel de fracţii al unui domeniu de integritate.

Ultima afirmaţie este consecinţă a teoremei Zariski-Nagata menţionate anterior. □

Proprietatea demonstrată la punctul b) implică o strânsă legătură între descompunerile primare şi lanţurile de ideale prime dintr-un AP-inel şi cele din completatul său.

Propoziţie 1.9. *Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism plat şi injectiv de inele noetheriene astfel încât $PB \in \operatorname{Spec} B$ pentru orice ideal prim P din A.*

a) Dacă Q este un ideal P-primar în A, atunci QB este un ideal PB-primar.

b) Dacă $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ este o descompunere primară (redusă) a unui ideal I din A şi $P_i = \mathrm{Rad}_A(Q_i)$, $i = 1, \ldots, n$, atunci $IB = Q_1B \cap \ldots \cap Q_nB$ este o descompunere primară (redusă) a idealului IB în B şi $P_iB = \mathrm{Rad}_B(Q_iB)$, $i = 1, \ldots, n$, iar $\mathrm{Rad}_A(I)B = \mathrm{Rad}_B(IB)$.

c) Un lanţ de ideale prime din A este saturat atunci şi numai atunci când lanţul extinselor este saturat.

d) $\mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}\, PB$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, A$. În particular, A_P este inel regulat dacă şi numai dacă B_{PB} este inel regulat.

e) Dacă B este catenar, la fel este şi A.

Demonstraţie. Observăm pentru început că morfismul u este fidel plat, întrucât nici un ideal maximal din A nu ,,explodează" în B.

a) Din $\mathrm{Ass}_A(A/Q) = \{ P \}$ şi egalitatea (valabilă pentru că B este un A-modul plat şi demonstrată în [**7**, IV, 26] sau [**10**, 7.7])

$$\mathrm{Ass}_B(B/QB) = \bigcup \{ \mathrm{Ass}_B(B/PB) \,:\, P \in \mathrm{Ass}_A(A/Q) \}$$

rezultă, conform ipotezei PB ideal prim în B, că $\mathrm{Ass}_B(B/QB) = \{ PB \}$.

b) Rezultă din *a*) şi din faptul că intersecţiile finite comută cu extinderea prin morfisme plate.

c) Fie $P \subset Q$ un lanţ saturat de ideale prime din A. Din platitudine rezultă $PB \neq QB$. Înlocuind A cu A/P şi B prin B/PB, ne putem reduce la cazul $P = 0$. Alegem $x \in Q$ nenul astfel încât $Q \in \mathrm{Min}(A/xA)$. Probăm că $QB \in \mathrm{Min}(B/xB)$.

Presupunând că există $Q' \in \mathrm{Spec}\, B$ pentru care $xB \subseteq Q' \subset QB$, se obţine prin contracţie $xA \subseteq Q' \cap A \subseteq Q$. Din alegerea lui Q minimal peste xA rezultă fie $Q' \cap A = Q$ (ceea ce implică $Q' = QB$, în contradicţie cu presupunerea $Q' \subset QB$), fie xA ideal prim (astfel că se contrazice saturarea lanţului $0 \subset Q$). Se conchide că într-adevăr QB este ideal prim minimal peste xB. Deoarece x este nondivizor al lui zero în A (şi prin urmare, datorită platitudinii, şi în B), din teorema idealului principal se obţine $\mathrm{ht}\, QB = 1 = \mathrm{ht}\, Q$.

Am arătat că $PB \subseteq QB$ este lanţ saturat. Reciproca este consecinţă imediată a fidel platitudinii morfismului u.

d) Formula dimensiunii, care se poate aplica pentru că u este morfism plat, dă

$$\mathrm{ht}\, PB = \dim B_{PB} = \dim A_P + \dim k(PB) = \dim A_P = \mathrm{ht}\, P.$$

e) Consecinţă imediată a definiţiei catenarităţii şi a punctului *c*). $\square$

Corolar 1.10. *Un AP-inel este universal catenar.*

Demonstraţie. Conform teoremei de structură pentru inelele locale, noetheriene şi complete în topologia radicială, $\widehat{A}$ este imagine homomorfă a unui inel de serii formale cu coeficienţi într-un inel de valuare discretă sau corp. Un astfel de inel este catenar, deci conform punctului e) din propoziţie, orice AP-inel este catenar. Dar Seydi [**42**] arată că un inel local, henselian, catenar şi noetherian este universal catenar. □

În condiţiile propoziţiei precedente nu rezultă că pentru orice lanţ saturat $P' \subset Q'$ de ideale prime din B, lanţul $P' \cap A \subset Q' \cap A$ este saturat. Următoarea construcţie (datorată lui D. Voiculescu şi D. Popescu) furnizează un contraexemplu.

Fie K un corp, X şi Y două variabile peste K, $C := K[X,Y]$, A inelul seriilor algebrice în X şi Y cu coeficienţi în K şi $B := \widehat{A} = K[[X,Y]]$. M. Artin [**3**] a demonstrat că A este un AP-inel excelent, astfel că morfismul de completare $A \longrightarrow \widehat{A}$ îndeplineşte ipotezele cerute în propoziţia 1.9. Fie $v \in XK[[X]]$ transcendent peste $K(X)$ şi $P := (Y - v)B$. Arătăm că urma lui P pe C şi pe A este idealul nul.

Într-adevăr, dacă $0 \neq f \in P \cap A$, atunci există $a_0, \ldots, a_n \in C$ cu $a_0 a_n \neq 0$ şi $a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n = 0$, astfel că $a_0 \in C \cap P$. Înseamnă că există $b \in B$ pentru care $a_0 = (Y - v)b$. Înlocuind în această egalitate Y cu v se găseşte că v ar fi algebric peste $K[X]$, contrar alegerii sale.

Aşadar, lanţul saturat $0 \subset P$ din B (saturat întrucât idealul P este principal) se contractă la $0 = 0$ în A, iar lanţul saturat $P \subset (X,Y)B$ se contractă la lanţul nesaturat $0 \subset (X,Y)A$.

Exemple concrete de inele cu proprietatea de aproximare au fost puse în evidenţă de M. Artin [**3**], [**4**]:

TEOREMA 1.11. *a) Orice inel de serii convergente cu coeficienţi într-un corp valuat netrivial, de caracteristică nulă, este AP-inel.*

b) Henselizatul oricărui inel local, esenţial de tip finit peste un corp, este AP-inel.

c) Inelele de serii algebrice cu coeficienţi într-un corp sau inel de valuare discretă, excelent şi henselian, sunt inele cu proprietatea de aproximare.

DEFINIŢIE 1.12. Un inel local şi noetherian (A, M, K) are *proprietatea de aproximare forte (SAP)* dacă pentru orice sistem finit de ecuaţii polinomiale F în $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ cu coeficienţi în A există o funcţie $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cu următoarea proprietate:

Dacă $\tilde{y} \in A^n$ satisface $F(\tilde{y}) \equiv 0 \pmod{M^{\mu(c)}}$, $c \in \mathbb{N}$, atunci există o soluţie $y \in A^n$ pentru F cu $y \equiv \tilde{y} \pmod{M^c}$.

Aşa cum sugerează denumirea, proprietatea de aproximare forte implică proprietatea de aproximare. Într-adevăr, pentru $F \in A[Y]^s$ un sistem arbitrar de polinoame în $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ şi $\widehat{y} \in \widehat{A}^n$ o soluţie a sa, fie $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funcţia SAP asociată sistemului $F = 0$. Pentru orice orice $y \in A^n$ congruent cu $\widehat{y}$ modulo $M^{\mu(1)}$ avem $F(y) \equiv F(\widehat{y}) \equiv 0$

(mod $M^{\mu(1)}\widehat{A}$) şi, conform definiţiei SAP, există în A o soluţie pentru F congruentă cu y modulo M.

M. Greenberg a arătat [**19**] că inelele de valuare discretă, excelente şi henseliene au proprietatea de aproximare forte. De asemenea, M. Artin [**3**] a demonstrat că henselizatul unui inel local, esenţial de tip finit peste un corp, are SAP.

Să notăm că dacă se arată că orice inel local, noetherian şi complet are SAP, rezultă că SAP şi AP sunt echivalente pentru orice inel local şi noetherian. Într-adevăr, dat fiind un sistem F de polinoame cu coeficienţi în AP-inelul A, se consideră μ, funcţia SAP asociată sistemului F considerat ca având coeficienţi în $\widehat{A}$. Vom proba că μ funcţionează şi pentru inelul de bază A. Fie $\widehat{y} \in A^n$ o soluţie aproximativă a lui F, în sensul că $F(\widehat{y}) \in M^{\mu(c)}$ pentru un anumit număr natural c. Privind situaţia în $\widehat{A}$, rezultă că F are o soluţie $\widehat{y} \in \widehat{A}^n$ congruentă cu $\tilde{y}$ modulo $M^c\widehat{A}$. Întrucât A este inel cu proprietatea de aproximare, Lema 1.4 asigură existenţa unei soluţii $y \in A^n$ pentru F cu $y \equiv \widehat{y} \pmod{M^c\widehat{A}}$. Evident y şi $\tilde{y}$ sunt congruente modulo M^c.

Teorema 1.13. *(Pfister-Popescu) Orice inel local, noetherian, excelent şi henselian are proprietatea de aproximare forte. În consecinţă, un inel local şi noetherian are AP dacă şi numai dacă are SAP.*

Înainte de a demonstra în secţiunea următoare acest rezultat fundamental, îl vom folosi pentru a stabili alte proprietăţi ale AP-inelelor.

Propoziţie 1.14. *Fie (A, M, K) un domeniu local, noetherian, excelent, henselian şi $(x_n)_n$ un şir de elemente ale sale ce converge în topologia M-adică la un element $x \in A$ ireductibil. Atunci există un rang începând de la care toţi termenii şirului sunt elemente ireductibile.*

Demonstraţie. Teorema Pfister-Popescu asigură că un inel satisfăcând ipotezele acestei propoziţii are proprietatea de aproximare forte. Fie μ funcţia SAP asociată polinomului $F := YZ - x \in A[Y, Z]$ şi $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \equiv x \pmod{M^{\mu(1)}}$ pentru toţi indicii $n \geq t$. Dacă există un termen reductibil x_n de rang $n \geq t$, înseamnă că există $\tilde{y}, \tilde{z} \in M$ astfel ca $\tilde{y}\tilde{z} = x_n \equiv x \pmod{M^{\mu(1)}}$, adică $F(\tilde{y}, \tilde{z}) \equiv 0 \pmod{M^{\mu(1)}}$. Din proprietatea specifică funcţiei SAP se deduce existenţa unor elemente y, $z \in A$ pentru care $F(y, z) = 0$ şi $y - \tilde{y} \in M$, $z - \tilde{z} \in M$. Aceste relaţii conduc la concluzia că elementul x este reductibil, ceea ce contrazice ipoteza. $\square$

Lema 1.15. *Fie (A, M, K) un AP-inel local şi noetherian, F un sistem finit de polinoame în $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ cu coeficienţi în A şi $g_1, \ldots, g_r$ sisteme finite de polinoame în Y şi $Z = (Z_1, \ldots, Z_s)$ cu coeficienţi în A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *există o soluţie $\widehat{y}$ a lui F în $\widehat{A}$ astfel încât nici un sistem $g_i(\widehat{y}, Z) = 0$, $1 \leq i \leq r$, nu are soluţii în $\widehat{A}$,* (*ii*) *există o soluţie y a lui F în A astfel încât nici un sistem $g_i(y,Z)=0$, $1\le i\le r$, nu are soluţii în A,*

DEMONSTRAŢIE. $(i)\implies(ii)$ Fie $\widehat{y}$ o soluţie pentru F în $\widehat{A}$ cu proprietatea indicată şi μ_i funcţia SAP asociată sistemului $g_i(\widehat{y},Z)$ ($1\le i\le r$) (existenţa este asigurată din nou de teorema 1.13). Notând $c:=\max\{\,\mu_i(1)\;:\;1\le i\le r\,\}$, se observă că sistemul polinomial $g_i(\widehat{y},Z)=0$ nu are soluţii în $\widehat{A}/M^c\widehat{A}\simeq A/M^c$. Pe de altă parte, din lema 1.4 rezultă că există o soluţie y a lui F în A congruentă cu $\widehat{y}$ modulo $M^c\widehat{A}$. Se deduce că $g_i(y,Z)$ nu are soluţii în A/M^c, şi cu atât mai mult nu are soluţii în A.

$(ii)\implies(i)$ De data aceasta se presupune că există y în A pentru care $F(y)=0$ şi nici un sistem $g_i(y,Z)=0$ ($1\le i\le r$) nu are soluţii în A. Se consideră funcţia SAP μ_i asociată inelului A cu proprietatea de aproximare forte şi sistemului $g_i(y,Z)$. Notând $t:=\max\{\,\mu_i(1)\;:\;1\le i\le r\,\}$, se deduce că $g_i(y,Z)$ ($1\le i\le r$) nu are soluţii în $A/M^t\simeq\widehat{A}/M^t\widehat{A}$, deci nici în $\widehat{A}$. □

TEOREMA 1.16. *Fie (A,M,K) un inel noetherian şi local cu proprietatea de aproximare. Atunci A este factorial simultan cu completatul său.*

DEMONSTRAŢIE. Avem de arătat că dacă A este AP-inel factorial, atunci $\widehat{A}$ este de asemenea factorial. Din propoziţia 1.8 se obţine că $\widehat{A}$ este domeniu. Vom proba că orice element ireductibil din completat este prim. În acest scop, se foloseşte rezultatul următor. □

LEMA 1.17. *Fie (A,M,K) un domeniu noetherian şi local, $a_1,\dots,a_q$ un sistem de generatori ai idealului maximal, $F:=X_1X_2-X_3X_4$, $g_1:=X_1Z_1-X_3$, $g_2:=X_1Z_2-X_4$ şi $g_3:=\sum_{i,j=1}^{q}a_ia_jT_iV_j-X_1\in A[X,Z,T,V]$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *A **nu** este factorial,*

(*ii*) *există o soluţie $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ a lui F în A astfel încât fiecare dintre polinoamele $g_1(x,Z)$, $g_2(x,Z)$, $g_3(x,T,V)$ nu are soluţii în A.*

DEMONSTRAŢIE. Un domeniu noetherian **nu** este factorial atunci şi numai atunci când există un element ireductibil $x_1\in A$ care nu este prim. În termeni de ecuaţii, există x_2, x_3, $x_4\in A$ astfel încât $x_1x_2=x_3x_4$ şi $x_3\notin x_1A$, $x_4\notin x_1A$. Altfel spus, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ este o soluţie a lui F cu proprietatea că fiecare dintre polinoamele $g_1(x,Z)$, $g_2(x,Z)$ nu are soluţii în A. Condiţia x_1 ireductibil, adică x_1 nu este produsul a două elemente din M, se exprimă echivalent $g_3(x,T,V)$ nu are soluţii în A.

Raţionamentul expus în paragraful precedent arată că din (i) rezultă (ii). Reciproc, fie $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ elemente din A pentru care $F(x)=0$ şi nici unul dintre polinoamele $g_1(x,Z)$, $g_2(x,Z)$, $g_3(x,T,V)$

nu are soluţii în A. Se deduce că x_1 este nenul (în caz contrar, luând $T_i = 0$, $V_j = 0$ pentru toţi indicii i şi j se obţine soluţie pentru $g_3(x, T, V)$) şi neinversabil (altfel se găseşte soluţie pentru $g_1(x, Z)$). Ca mai sus se concluzionează că x_1 este element ireductibil al lui A care nu este prim. $\square$

Următorul rezultat se referă la proprietăţi ale fibrelor formale şi a fost demonstrat în [**13**]. Reamintim că se spune că fibrele formale ale unui inel local şi noetherian A sunt *geometric normale* dacă pentru orice corp L care este o A-algebră finită, inelul $L \otimes_A \widehat{A}$ este domeniu normal.

Teorema 1.18. *Fie (A, M, K) un AP-inel noetherian. Atunci:*

a) A este domeniu normal dacă şi numai dacă $\widehat{A}$ este domeniu normal.

b) Fibrele formale ale lui A sunt geometric normale.

Demonstraţie. *a)* Se observă că un domeniu local **nu** este normal dacă şi numai dacă există un număr natural nenul n, elemente $x_1, x_2, u_1, \dots, u_n$ în A cu $x_2 \neq 0$, $x_1 \notin x_2 A$ şi $x_1^n + \sum_{i=1}^{n} u_i x_1^{n-i} x_2^i = 0$. Echivalenţa dorită rezultă aplicând lema 1.15 pentru polinoamele

$$F := X_1^n + \sum_{i=1}^{n} u_i X_1^{n-i} X_2^i, \quad g_1 := X_2, \quad g_2 := X_1 - X_2 Z.$$

b) Fie $P \in \mathrm{Spec} A$, iar L un corp, extindere finită a corpului $k(P)$. Închiderea întreagă B a lui A în L este A-algebră finită pentru că A este inel universal japonez în virtutea propoziţiei 1.8. Atunci B, ca orice algebră finită peste un inel henselian, este produs direct finit de inele locale henseliene. Fiind domeniu, B este inel local. Conform propoziţiei 1.7, B are proprietatea de aproximare, astfel că are completatul $\widehat{B} \simeq B \otimes_A \widehat{A}$ domeniu normal. Dar fibra $L \otimes_A \widehat{A} \simeq Q(B) \otimes_A \widehat{A}$ este un inel de fracţii al lui $\widehat{B}$, deci este domeniu normal. $\square$

C. Rotthaus [**40**] arată că fibrele formale ale unui AP-inel semilocal noetherian sunt geometric regulate. Coroborat cu teorema Pfister-Popescu, acest rezultat arată că un inel local, noetherian şi henselian este excelent dacă şi numai dacă are proprietatea de aproximare.

2. Proprietatea de aproximare forte

Primele exemple de inele cu proprietatea de aproximare sunt datorate lui M. Artin [**3**], [**4**]. Demonstraţiile sale folosesc teorema de pregătire Weierstrass şi lema lui Newton. Punerea în operă a acestei idei de demonstraţie necesită o virtuozitate desăvârşită, fiind necesare veritabile jonglerii cu serii convergente, algebrice sau formale în mai multe variabile. Dar nu aceste dificultăţi de ordin tehnic constituie principala deficienţă a strategiei imaginate de Artin, ci faptul că necesită ingrediente specifice algebrelor analitice, inexistente în caz general. Demonstraţiile date de Greenberg [**19**] proprietăţii de aproximare forte sunt chiar mai complicate decât cele ale lui Artin, invocând construcţii greu de urmărit şi verificat în toate detaliile. J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz şi L. van den Dries [**6**] aduc în această problemă metode provenite din teoria modelelor. Efectul este un spectaculos câştig de claritate, structura demonstraţiilor, simplificată cu câteva ordine de mărime, permite abordarea unor situaţii mai generale şi discernerea ipotezelor strict necesare pentru stabilirea proprietăţii de aproximare de cele datorate metodei de demonstraţie.

D. Popescu [**30**] a reuşit să găsească forţa să urmărească până la capăt abordarea corectă. Contribuţia sa esenţială este o caracterizare originală a morfismelor regulate de inele noetheriene ca o limită inductivă filtrată de algebre netede şi de tip finit peste inelul sursă. Un astfel de rezultat a fost conjecturat de M. Raynaud [**38**] încă din 1970, dar a fost, se pare, ignorat pe nedrept de cei ce lucrau asupra proprietăţii de aproximare. Acest rezultat conduce la o demonstraţie simplă a conjecturii lui Artin, potrivit căreia un inel local, noetherian, excelent şi henselian are proprietatea de aproximare. Dar utilitatea sa nu este nici pe departe epuizată. Astfel, se poate arăta [**34**] că un inel local regulat (resp. Gorenstein sau Cohen-Macaulay) conţinând un corp este limită inductivă filtrată de inele locale regulate (resp. Gorenstein sau Cohen-Macaulay) esenţial de tip finit peste inelul numerelor întregi. În consecinţă, este confirmată, în cazul caracteristicii egale, conjectura Bass-Quillen, care afirmă că un modul proiectiv şi de tip finit P peste un inel de polinoame $R[T]$, cu R inel local regulat şi $T = (T_1, \ldots, T_n)$, $n \geq 1$, este extins din R, *i.e.*

$$P \simeq R[T] \otimes_R P/(T)P.$$

Acest rezultat are drept consecinţă imediată faptul că un modul proiectiv şi de tip finit peste $R[T]$ este cu necesitate liber.

În această secţiune vom prezenta construcţia ultraproduselor în raport cu un ultrafiltru neprincipal pe $\mathbb{N}$, ce permite o demonstraţie simplă pentru echivalenţa proprietăţii de aproximare cu proprietatea de aproximare forte. În cazuri particulare, acest fapt a primit demonstraţii în [**35**] şi [**47**]. Enunţul general apare în [**28**], dar demonstraţia lor pentru cazul neseparabil era greşită. Corecţii şi simplificări au fost găsite de Denef [**15**] şi Popescu [**29**].

2.1. Preliminarii. Reamintim noţiunea de extindere separabilă de corpuri. Începem cu definiţia clasică.

Definiţie 2.1. Fie $K \subset L$ o extindere algebrică de corpuri. Un element $x \in L$ se numeşte *separabil peste* K dacă polinomul minimal al lui x peste K nu are rădăcini multiple (în corpul său de descompunere) şi *neseparabil* în caz contrar. Extinderea L/K se numeşte *separabilă* dacă orice element al lui L este separabil peste K.

Pentru $x \in L$ neseparabil, condiţia ca polinomul său minimal f peste K să aibă rădăcini multiple este echivalentă cu faptul că cel mai mare divizor comun al lui f şi al derivatei sale f' să nu fie polinom constant. Cum derivarea scade gradele, iar f este ireductibil peste K, rezultă că derivata polinomului minimal al unui element neseparabil este polinomul nul. În cazul caracteristicii nule, din $\operatorname{grad} f' = \operatorname{grad} f - 1$ se deduce că nu există elemente neseparabile. În cazul corpurilor de caracteristică pozitivă, să zicem p, $f' = 0$ este echivalentă cu $f \in K[X^p]$.

Definiţia dată extinderilor algebrice separabile nu poate fi extinsă pentru extinderi nealgebrice. Observaţia consemnată în lema următoare permite dezvoltări ulterioare în cadrul nonalgebric.

Lema 2.2. *O extindere algebrică $K \subset L$ de corpuri de caracteristică $p > 0$ este separabilă atunci şi numai atunci când pentru orice extindere finită K' a lui K conţinută în $K^{1/p}$, inelul $K' \otimes_K L$ este redus.*

Demonstraţie. Raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că polinomul minimal $f = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ peste K al unui element $x \in L$ are rădăcini multiple. Atunci $f \in K[X^p]$, astfel că $f = g^p$, pentru un anumit $g \in K'[X]$, unde $K' := K(a_0^{1/p}, \dots, a_d^{1/p})$. Rezultă că inelul $K' \otimes_K L$ conţine inelul neredus $K' \otimes_K K(x) \simeq K'[X]/(g^p)$.

Reciproc, presupunem că L este o extindere separabilă a lui K. Observăm că este suficient să demonstrăm afirmaţia pentru L o extindere finită a lui K (căci produsul tensorial şi limita inductivă comută, iar o limită inductivă de inele reduse este inel redus). Conform teoremei elementului primitiv, există $x \in L$ astfel încât $L = K(x) \simeq K[X]/(f)$, unde f este polinomul minimal al lui x peste K. Pentru orice extindere K' a lui K, inelul $K' \otimes_K L \simeq K'[X]/(f)$ este redus, pentru că f nu are rădăcini multiple. $\square$

Definiţie 2.3. O extindere de corpuri $K \subset L$ de exponent caracteristic p se numeşte *separabilă* dacă satisface una dintre condiţiile echivalente:

(*i*) inelul $K' \otimes_K L$ este redus pentru orice extindere finită K' a lui K conţinută în $K^{1/p}$,
(*ii*) inelul $K^{1/p} \otimes_K L$ este redus,
(*iii*) morfismul de inele $g : K^{1/p} \otimes_K L \longrightarrow L^{1/p}$ definit prin asocierea $x \otimes y \mapsto xy$ este injectiv,
(*iv*) corpurile L şi $K^{1/p}$ sunt liniar disjuncte peste K (în sensul că orice familie K-liniar independentă de elemente din L este liniar independentă peste $K^{1/p}$).

Dintr-o perspectivă modernă, separabilitatea înseamnă netezimea extinderilor de corpuri. Mai precis, se poate demonstra că o extindere de tip finit de corpuri este etală dacă şi numai dacă este finită şi separabilă. Mai general, are loc următorul rezultat, ce joacă un rol important într-o demonstraţie a teoremei de structură Cohen pentru inele locale, noetheriene şi complete:

TEOREMA 2.4. *O extindere de corpuri este separabilă atunci şi numai atunci când este netedă.*

2.2. Ultraproduse de inele.

DEFINIŢIE 2.5. Un *filtru* pe $\mathbb{N}$ este o mulţime nevidă D de părţi ale mulţimii numerelor naturale care are proprietăţile:

a) D nu conţine mulţimea vidă,
b) dacă $s, t \in D$, atunci $s \cap t \in D$,
c) din $s \in D$, $t \subseteq \mathbb{N}$ şi $s \subset t$ rezultă $t \in D$.

Un filtru D pe $\mathbb{N}$ este numit *principal* dacă există $r \subseteq \mathbb{N}$ astfel ca $D = \{ s \in \mathbb{N} : r \subseteq s \}$, în caz contrar este numit *filtru neprincipal.* Un *ultrafiltru* pe $\mathbb{N}$ este un filtru D care este maximal în mulţimea ordonată prin incluziune a filtrelor pe $\mathbb{N}$.

Se stabilesc uşor următoarele fapte:

LEMA 2.6. *a) Pentru D filtru pe $\mathbb{N}$, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *D este ultrafiltru,*
(*ii*) *pentru fiecare $r \subseteq \mathbb{N}$, fie $r \in D$, fie $\mathbb{N} \setminus r \in D$,*
(*iii*) *din $s, t \subseteq \mathbb{N}$ şi $s \cup t \in D$ rezultă $s \in D$ sau $t \in D$.*

b) Un ultrafiltru D pe $\mathbb{N}$ este neprincipal atunci şi numai atunci când include filtrul mulţimilor cofinite $\{ s \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus s \text{ este finită } \}$.

c) Există ultrafiltre neprincipale pe $\mathbb{N}$.

DEFINIŢIE 2.7. Fie $(A_n)_n$ o familie numărabilă de inele şi D un ultrafiltru pe $\mathbb{N}$. Pe produsul cartezian $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ se consideră relaţia definită prin

$$(a_n)_n \equiv (b_n)_n \Leftrightarrow \{ n : a_n = b_n \} \in D.$$

Se constată că se obţine o relaţie de echivalenţă compatibilă cu operaţiile pe componente. Notând cu $[a]$ clasa de echivalenţă a unui element a din

$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$, o verificare de rutină ne convinge că mulţimea cât înzestrată cu operaţiile

$$[(a_n)_n] + [(b_n)_n] := [(a_n + b_n)_n], \quad [(a_n)_n][(b_n)_n] := [(a_n b_n)_n],$$

pentru $(a_n)_n, (b_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$, devine un inel (comutativ, unitar), numit *ultraprodusul familiei de inele* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *în raport cu ultrafiltrul* D. Dacă $A_n = A$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu A^* inelul obţinut şi îl numim *ultraputerea inelului* A *în raport cu ultrafiltrul* D. Asociind fiecărui element $a \in A$ clasa şirului constant $(a, a, a, \ldots)$, se obţine un morfism de inele $\phi_A : A \longrightarrow A^*$. Asemănător se defineşte ultraprodusul de A-module, care dobândeşte în mod natural o structură de A^*-modul.

Iată câteva proprietăţi algebrice ale inelelor obţinute cu ajutorul acestei construcţii.

PROPOZIŢIE 2.8. *Fie* A *un inel,* D *un ultrafiltru neprincipal pe* $\mathbb{N}$ *şi* A^* *ultraputerea lui* A *în raport cu* D*. Atunci:*

a) *Dacă* I *este un ideal în* A *şi* I^* *este ultraputerea lui* I *în raport cu* D*, atunci* I^* *este ideal în* A^* *şi* $(A/I)^* \simeq A^*/I^*$.
b) *Dacă* A *este domeniu (resp. corp), atunci* A^* *este domeniu (resp. corp).*
c) *Dacă* $P \leq A$ *este un ideal prim (maximal), atunci* P^* *este un ideal prim (maximal) în* A^*.
d) *Dacă* A *este domeniu, atunci* $Q(A)^* \simeq Q(A^*)$.
e) *Pentru orice număr natural nenul* n *avem* $(A^*)^n \simeq (A^n)^*$.
f) *Dacă* A *este corp, atunci* A^* *este o extindere separabilă a lui* A.
g) *Dacă* $I \leq A$ *este un ideal finit generat, atunci* $I^* = \phi_A(I)A^*$.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Prima afirmaţie necesită o verificare simplă. Morfismul canonic $A \longrightarrow A/I$ induce un morfism surjectiv $A^* \longrightarrow (A/I)^*$, al cărui nucleu constă din elementele $x = [(x_n)_n] \in A^*$ pentru care mulţimea $\{ n \in \mathbb{N} : x_n \in I \}$ aparţine ultrafiltrului D. După definiţie, nucleul coincide cu I^*.

b) Fie x_n, $y_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ astfel ca $[(x_n)_n][(y_n)_n] = 0$ în A^*. Notăm $r = \{ n \in \mathbb{N} : x_n y_n = 0 \}$, $s = \{ n : x_n = 0 \}$, $t = \{ n : y_n = 0 \}$. Atunci $r \in D$, iar pentru A domeniu avem în plus $r = s \cup t$. Cum D este ultrafiltru, rezultă $s \in D$ sau $t \in D$, adică $[(x_n)_n] = 0$ sau $[(y_n)_n] = 0$. Dacă A este chiar corp, iar clasa şirului $(x_n)_n$ este nenulă în A^*, atunci $c := \{ n : x_n \neq 0 \} \in D$, iar şirul $y_n := x_n^{-1}$ pentru $n \in c$ şi $y_n := 1$ pentru $n \notin c$ defineşte inversul elementului $[(x_n)_n]$ în A^*.

c) Rezultă din cele demonstrate mai sus.

d) Incluziunea $A \subseteq Q(A)$ induce un morfism injectiv $A^* \subseteq Q(A)^*$. Orice $z \in Q(A)^*$ este indus de un şir $(u_n/v_n)_n$, cu u_n, $v_n \in A$ şi $v_n \neq 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$. Este clar că $z := [(u_n)_n]/[(v_n)_n]$, astfel că are loc egalitatea $Q(A)^* = Q(A^*)$.

e) Fie $e_1, \dots, e_n$ baza canonică a lui A^n. Vom proba că $\phi_A(e_1), \dots,$ $\phi_A(e_n)$ este o bază a A^*-modulului $(A^n)^*$. Pentru $u = [(u_j)_j] \in (A^n)^*$ avem pentru orice $k \in \mathbb{N}$ $u_k = \sum_{j=1}^n u_{kj} e_j$ pentru anumiţi $u_{kj} \in A$, încât $u = \sum_{j=1}^n [(u_{kj})_k] \phi_A(e_j)$. Dacă $v_j = [(v_{kj})_k] \in A^*$, $j = 1, \dots, n$, sunt astfel încât $\sum_{j=1}^n v_j \phi_A(e_j) = 0$, atunci

$$s := \{\, k \,:\, \sum_{j=1}^n v_{kj} e_j = 0 \,\} \in D.$$

Pentru $j = 1, \dots, n$ rezultă $v_{kj} = 0$ pentru orice $k \in s$, ceea ce înseamnă că v_j este nul.

f) Ştim deja că A^* este corp. Fie K un corp, extindere finită a lui A. Atunci K este izomorf cu A^n pentru un anumit n şi, conform celor demonstrate deja, există izomorfisme de A^*-spaţii vectoriale

$$K^* \simeq (A^n)^* \simeq (A^*)^n \simeq A^* \otimes_A K.$$

În particular, $\dim_{A^*} K^* = \dim_{A^*} A^* \otimes_A K$, ceea ce implică bijectivitatea morfismului canonic surjectiv de inele $A^* \otimes_A K \longrightarrow K^*$.

g) Un morfism surjectiv $A^n \longrightarrow I$ induce un morfism surjectiv $(A^*)^n \simeq (A^n)^* \longrightarrow I^*$ conform punctului *e*). $\square$

PROPOZIŢIE 2.9. *Ultraputerea defineşte functor exact* $\mathrm{Mod}\, A \longrightarrow \mathrm{Mod}\, A^*$, *care coincide cu functorul de extindere a scalarilor* $A^* \otimes_A -$ *pe subcategoria plină a modulelor de tip finit în cazul în care* A *este inel noetherian. În particular,* ϕ_A *este morfism plat dacă* A *este inel noetherian.*

PROPOZIŢIE 2.10. *Fie* A *un inel,* D *un ultrafiltru neprincipal pe* $\mathbb{N}$ *şi* A^* *ultraputerea lui* A *în raport cu* D. *Atunci:*

a) *Radicalul Jacobson* $J(A)$ *al inelului* A *este dus de* ϕ_A *în* $J(A^*)$.

b) *Dacă* $\mathrm{Max}\, A = \{\, M_1, M_2, \dots, M_n \,\}$, *atunci*

$$\mathrm{Max}\, A^* = \{\, M_1^*, M_2^*, \dots, M_n^* \,\}.$$

c) *Dacă* A *este un inel local şi artinian, atunci* A^* *este inel local şi artinian. În aceste condiţii, pentru orice* A*-modul* E *de tip finit are loc egalitatea* $l_A(E) = l_{A^*}(E^*)$.

d) *Dacă* A *este un inel local şi henselian, la fel este şi* A^*.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Pentru $u \in J(A)$ şi $x = [(x_n)_n] \in A^*$ arbitrare, elementul $1 + \phi_A(u)x = [(1 + ux_n)_n]$ este inversabil în A^* pentru că $1 + ux_n$ este inversabil în inelul A pentru orice număr natural n.

b) Din propoziţia 2.8*a*) rezultă $A^*/J(A)^* \simeq \big(A/J(A)\big)^*$, iar conform punctului *e*) al aceleiaşi propoziţii

$$\big(A/J(A)\big)^* = \left(\prod_{j=1}^n A/M_j\right)^* \simeq \prod_{j=1}^n A^*/M_j^* \simeq \prod_{j=1}^n \big(A/M_j\big)^*$$

este produs direct finit de corpuri. Din prima parte a acestei propoziţii se deduce că nu există în A^* ideale maximale diferite de M_1^*, M_2^*, $\ldots$, M_n^*.

c) Fie (A, M, K) inel artinian local şi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $M^n = 0$. În conformitate cu punctul *g*) din Propoziţia 2.8, singurul ideal maximal din A^*, anume M^*, este extinsul idealului finit generat M. Prin urmare, idealul $\big(M^*\big)^n = 0$ este conţinut în orice ideal prim al inelului A^*. Aşadar $\operatorname{Spec} A^*$ are un singur element, astfel că A^* este inel local, noetherian, cu idealul maximal nilpotent.

Pentru a demonstra a doua parte, se consideră un şir de compoziţie $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_t = E$ pentru un A-modul de tip finit E. Atunci $0 = E_0^* \subset E_1^* \subset \ldots \subset E_t^* = E^*$ este un lanţ ascendent de submodule ale lui E^* cu $E_{j+1}^*/E_j^* \simeq \big(E_{j+1}/E_j\big)^* \simeq K^*$ pentru toţi $j \leq t-1$. Se conchide că s-a obţinut de fapt un şir de compoziţie pentru E^*. Conform teoremei Jordan-Hölder, toate şirurile de compoziţie au aceeaşi lungime. Acum este clar că A-modulul E are aceeaşi lungime ca şi A^*-modulul E^*.

d) Se consideră un polinom

$$f = \sum_{j=0}^{d} [(a_{nj})_n] X^j$$

în variabila X cu coeficienţi în A^* astfel ca $f(0) \in M^*$ şi $f'(0) \notin M^*$. Pentru fiecare număr natural n se defineşte

$$f_n := \sum_{j=0}^{d} a_{nj} X^j \in A[X].$$

Din alegerea lui f rezultă că

$$t := \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, f_n(0) \in M, f_n'(0) \notin M \,\} \in D.$$

Pentru fiecare $n \in t$ există z_n rădăcină a polinomului f_n conţinută în idealul maximal al inelului henselian A. Definind $z_n = 0$ pentru indicii n din afara mulţimii t, se constată că $[(z_n)_n]$ este o rădăcină a lui f aparţinând idealului maximal al inelului A^*. $\square$

Exerciţii. 1. Ce se petrece dacă D este ultrafiltru principal pe $\mathbb{N}$?

2. Căutaţi proprietăţi analoage pentru ultraprodusul unei familii numărabile de inele.

Ultraputerea are anumite proprietăţi de saturare care îi asigură utilitatea în algebră (în teoria modelelor se vorbeşte despre compacitate).

Lema 2.11. *Fie* (A, M, K) *un inel local noetherian şi* $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un sistem numărabil de polinoame într-o variabilă cu coeficienţi în* A.

Pentru D un ultrafiltru neprincipal pe $\mathbb{N}$, se notează A^* ultraputerea lui A în raport cu D,

$$M^*_\infty := \cap_{n\in\mathbb{N}} M^n A^* \quad \text{şi} \quad A_1 := A^*/M^*_\infty.$$

Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *sistemul f are o soluţie în A_1,*
(ii) *pentru orice $t \in \mathbb{N}$, sistemul finit $f^{(t)} := (f_1, f_2, \ldots, f_t)$ are soluţie în $A^*/M^t A^*$.*

Demonstraţie. Avem de arătat doar $(ii) \Longrightarrow (i)$. Pentru fiecare număr natural t se consideră un element $\widetilde{y}^{(t)} = [(\widetilde{y}_n^{(t)})_n]$ din A^* astfel ca $f^{(t)}(\widetilde{y}^{(t)}) \equiv 0 \pmod{M^t A^*}$. Atunci

$$s_t := \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, f^{(t)}(\widetilde{y}_n^{(t)}) \equiv 0 \pmod{M^t} \,\} \in D.$$

Întrucât D este ultrafiltru neprincipal, el conţine mulţimea

$$s'_t := \bigcap_{k=1}^{t} s_k \setminus \{\, 0, 1, 2, \ldots, t \,\}.$$

Evident $s'_1 \supset s'_2 \supset \ldots$ şi nu există element comun tuturor mulţimilor s'_r, $r \in \mathbb{N}$. Rezultă că se poate defini

$$y_n := \begin{cases} \widetilde{y}_n^{(t_n)} & \text{dacă } n \in s'_1 \text{ şi } t_n = \max\{\, t \in \mathbb{N} \,:\, n \in s'_t \,\}, \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Se verifică apoi că $y := [(y_n)_n]$ satisface $f(y) \equiv 0 \pmod{M^*_\infty}$. □

Teorema 2.12. *Fie (A, M, K) un inel local şi noetherian, D un ultrafiltru neprincipal pe $\mathbb{N}$, A^* ultraputerea lui A în raport cu D, $M^*_\infty := \cap_{n\in\mathbb{N}} M^n A^*$ şi ψ_A compunerea morfismelor canonice $A \longrightarrow A^* \longrightarrow A_1 := A^*/M^*_\infty$. Atunci A_1 este inel local, noetherian, complet, de ideal maximal MA_1, are aceeaşi dimensiune ca şi inelul A, iar ψ_A este morfism local şi plat.*

Demonstraţie. Fie $B := \varprojlim A^*/M^n A^*$ completatul lui A^* în topologia M-adică şi $\rho : A^* \longrightarrow B$ morfismul canonic. Arătăm că ρ este surjectiv.

Orice element al inelului B provine dintr-un fir $(z_n)_n$, unde $z_n \in A^*$ satisfac pentru toţi indicii n

$$z_{n+1} \equiv z_n \pmod{M^n A^*}.$$

Conform lemei 2.11, sistemul de congruenţe

$$Z - z_n \equiv 0 \pmod{M^n A^*}, \; n \in \mathbb{N},$$

are o soluţie $z \in A^*$ deoarece are o soluţie în $A^*/M^t A^*$ pentru orice $t \in \mathbb{N}$. Evident ρ duce această soluţie z în familia $(z_n)_n$, astfel că este morfism surjectiv.

Cum $\ker\rho = M^*_\infty$, rezultă că A_1 este inel local şi complet. Pentru a demonstra noetherianitatea sa, vom folosi faptul că idealul său maximal MA_1 este finit generat. Prin urmare, graduatul lui A_1 în raport cu MA_1 este inel noetherian. Acum se invoca rezultatul demonstrat în DE REFERIT că noetherianitatea graduatului implică noetherianitatea inelului în cazul unei filtrări descendente separate.

Pentru fiecare număr natural nenul s, inelul A/M^s este local şi artinian, astfel că, datorită propoziţiei 2.10c), inelul $A_1/M^sA_1 \simeq A^*/M^sA^* \simeq \big(A/M^s\big)^*$ este artinian şi

$$l_A(A/M^s) = l_{A^*}(A^*/M^sA^*) = l_{A_1}(A_1/M^sA_1).$$

Din aceste egalităţi se obţine că funcţiile Hilbert asociate inelelor A şi A_1 coincid. În consecinţă, gradele polinoamelor Hilbert corespunzătoare coincid, astfel că $\dim A = \dim A_1$.

Platitudinea morfismului ψ_A rezultă din criteriul local de platitudine (cf. [**23**, 29.4] sau [**36**, cap. IV, th. 6.12]) şi din faptul că idealul maximal al lui A generează idealul maximal al inelului A_1. Într-adevăr, A este inel noetherian prin ipoteză, A_1 este inel noetherian conform celor demonstrate anterior, iar MA_1 este conţinut în radicalul Jacobson al inelului A_1 datorită propoziţiei 2.10a). Întrucât, pentru orice ideal I din A, topologia M-adică pe A-modulul $I \otimes_A A_1$ coincide cu topologia MA_1-adică, se obţine că A_1 este ideal-separat în topologia M-adică.

□

Definiţie 2.13. Se spune că un inel noetherian A este *Reg-1* dacă mulţimea

$$\{P \in \operatorname{Spec} A \,:\, A_P \text{ este inel regulat }\}$$

este deschisă în topologia Zariski de pe $\operatorname{Spec} A$. Inelul noetherian A este numit *Reg-2* dacă orice A-algebră de tip finit este inel Reg-1.

Un morfism plat de inele noetheriene $u : A \longrightarrow B$ se numeşte *regulat* dacă toate fibrele sale sunt geometric regulate. Aceasta înseamnă că pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ şi pentru orice corp L, extindere finită a corpului rezidual $k(P)$, inelul $L \otimes_A B$ este regulat.

Un rezultat al lui Nagata stabileşte că orice inel noetherian, semilocal şi complet este Reg-2. Demonstraţia acestei teoreme, ca şi a celorlalte rezultate menţionate în continuare, se găseşte în [**10**, sec. 6].

Un morfism de inele noetheriene $u : A \longrightarrow B$ este regulat dacă şi numai dacă pentru orice ideal prim Q din B şi $P := u^{-1}(Q)$, morfismul indus $A_P \longrightarrow B_Q$ este formal neted în topologia radicială. Prin urmare, orice morfism neted de inele noetheriene este regulat.

Definiţie 2.14. Un inel noetherian A se numeşte *reg-inel* dacă pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$, morfismul de completare $A_P \longrightarrow \widehat{A_P}$ este regulat. Se foloseşte frecvent exprimarea alternativă *fibrele formale ale lui A sunt geometric regulate.*

Este clar că orice imagine homomorphă şi orice inel de fracţii al unui reg-inel este reg-inel. O clasă largă de inele cu această proprietate a fost pusă în evidenţă de Grothendieck, care a demonstrat că orice inel local, noetherian şi complet este reg-inel.

DEFINIŢIE 2.15. Un inel noetherian se numeşte *cvasiexcelent* dacă este reg-inel şi Reg-2. Se spune despre un inel cvasiexcelent că este *excelent* dacă în plus este universal catenar.

Din cele menţionate anterior rezultă că reg-inelele semilocale sunt cvasiexcelente. Dintre exemplele de inele excelente menţionăm: corpurile, inelele noetheriene care sunt semilocale şi complete, inelele Dedekind de caracteristică nulă, algebrele de tip finit peste un inel excelent. Excelenţa este stabilă la luarea fracţiilor. Un rezultat fundamental a fost stabilit independent de M. André [**1**], N. Radu [**9**] şi H. Seydi [**43**]:

TEOREMA 2.16. *(localizarea netezimii formale) Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism local între inele locale şi noetheriene. Dacă u este formal neted şi A este reg-inel, atunci u este morfism regulat.*

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia se găseşte în [**10**, 11.3]. $\square$

Această teoremă are următoarea consecinţă pentru inelele cu proprietatea de aproximare.

COROLAR 2.17. *Păstrăm notaţiile şi ipotezele teoremei 2.12. Dacă în plus A este inel cvasiexcelent, atunci ψ_A este morfism regulat.*

Acum putem exprima mai uşor proprietatea de aproximare forte.

LEMA 2.18. *Fie (A, M, K) un inel noetherian, D un ultrafiltru neprincipal pe $\mathbb{N}$, A^* ultraputerea lui A în raport cu D, $M^*_\infty := \cap_{t\in\mathbb{N}} M^t A^*$ şi ψ_A compunerea morfismelor canonice $A \longrightarrow A^* \longrightarrow A_1 := A^*/M^*_\infty$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A are proprietatea de aproximare forte,*
(*ii*) *pentru orice sistem finit de polinoame f cu coeficienţi în A, pentru orice număr natural nenul c şi pentru orice soluţie $\widetilde{y}$ a lui f în A_1 există o soluţie y a lui f în A^* astfel încât $y \equiv \widetilde{y} \pmod{M^c A^*}$.*

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Fie f, $\widetilde{y} = [(\widetilde{y}_n)_n]$ şi c ca în enunţul condiţiei (ii) şi $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funcţia SAP asociată sistemului f. Aceasta înseamnă că $f(\widetilde{y}) \equiv 0 \pmod{M^{\mu(c)} A^*}$, astfel că

$$s := \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, f(\widetilde{y}_n) \equiv 0 \pmod{M^{\mu(c)}} \,\} \in D.$$

Conform definiţie funcţiei SAP, pentru fiecare $n \in s$ există o soluţie y_n a lui f în A astfel încât $\widetilde{y}_n \equiv y_n \pmod{M^c}$. Pentru indicii n din complementara mulţimii s punem $y_n := 0$. Se obţine astfel o soluţie $y := [(y_n)_n]$ a lui f în A^* cu proprietatea $y \equiv \widetilde{y} \pmod{M^c A^*}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Implicaţia reciprocă se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem că există un sistem finit de polinoame f în variabilele Y şi cu coeficienţi în A pentru care nu există funcţie SAP. Aceasta înseamnă că există un întreg strict pozitiv c astfel ca

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \widetilde{y}_n \in A \ \text{ astfel ca } \ f(\widetilde{y}_n) \equiv 0 \pmod{M^n},$$

dar nu există nici o soluţie z_n a lui f în A cu proprietatea $z_n \equiv \widetilde{y}_n \pmod{M^c}$. Atunci $\widetilde{y} := [(\widetilde{y}_n)_n]$ este o soluţie a lui f în A^*/M^rA^* pentru toţi $r \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(\widetilde{y}) \equiv 0 \pmod{M^*_\infty}$. Conform condiţiei (ii), există o soluţie $y = [(y_n)_n]$ a lui f în A^* pentru care $y \equiv \widetilde{y} \pmod{M^cA^*}$. Atunci mulţimea

$$s := \{\, n \in \mathbb{N} : \ f(y_n) = 0, y \equiv \widetilde{y}_n \pmod{M^cA^*} \,\}$$

aparţine ultrafiltrului D, fiind intersecţie a două elemente din D. În particular, mulţimea s este nevidă. Dar pentru $n \in s$ se contrazice condiţia (*). $\square$

Acum putem demonstra uşor şi elegant echivalenţa proprietăţilor AP şi SAP. În demonstraţie se foloseşte o remarcabilă teoremă datorată lui D. Popescu [**30, 31, 32**].

Teorema Popescu (desingularizare Néron generală). *Fie A şi A' inele noetheriene, $u : A \longrightarrow A'$ un morfism regulat, B o A-algebră de tip finit şi $v : B \longrightarrow A'$ un morfism de A-algebre. Atunci v factorizează printr-o A-algebră C de forma $C = \big(A[Y]/(f)\big)_g$, cu $f = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ polinoame în variabilele $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, $r \leq n$ şi g aparţinând idealului Δ_f generat de $r \times r$-minorii matricii iacobiene $(\partial f_i/\partial Y_j)$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d] & A' \\ B \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "q"'] & C \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

În cazul inelelor de valuare discretă, acest rezultat a fost demonstrat de A. Néron [**25**]. O variantă ce confirmă o altă conjectură a lui M. Artin se găseşte demonstrată în [**14**].

Teorema 2.19. *Un inel local, noetherian, excelent şi henselian are proprietatea de aproximare forte. În particular, un inel local şi noetherian este AP-inel dacă şi numai dacă are SAP.*

Demonstraţie. Fie (A, M, K) un inel îndeplinind ipotezele teoremei, D un ultrafiltru neprincipal pe $\mathbb{N}$, A^* ultraputerea lui A în raport cu D şi ψ_A morfismul compus $A \longrightarrow A^* \longrightarrow A_1 := A^*/M^*_\infty$, cu

$M^*_\infty := \cap_{n\in\mathbb{N}} M^n A^*$. Având în vedere lema precedentă, este suficient să arătăm că pentru orice sistem finit de polinoame h în variabilele $Z := (Z_1, Z_2, \ldots, Z_s)$ şi cu coeficienţi din A, pentru orice $c \in \mathbb{N}$ şi pentru orice soluţie $\widetilde{z}$ a lui h în A_1 există o soluţie z a lui h în A^* astfel încât $z \equiv \widetilde{z} \pmod{M^c A^*}$.

Fie v morfismul de A-algebre $B := A[Z]/(h) \longrightarrow A_1$ definit prin asocierea clasa $Z \mapsto \widetilde{z} \pmod{M^*_\infty}$. Întrucât ψ_A este morfism regulat conform corolarului 2.17, din teorema Popescu rezultă că morfismul v factorizează printr-o A-algebră $C := \big(A[Y]/(f)\big)_g$, unde $f = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ sunt polinoame în variabilele $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ cu coeficienţi în inelul A, $r \leq n$, iar g este un element din idealul Δ_f generat de $r \times r$-minorii matricii iacobiene $(\partial f_i / \partial Y_j)$. Altfel spus, triunghiurile din diagrama următoare sunt comutative.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d] & A_1 \\
B \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "q"'] & C \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd}$$

Fie $q : B \longrightarrow C$ şi $w : C \longrightarrow A$ morfisme de A-algebre astfel încât $v = wq$. Atunci $\hat{y} := w(Y \mod (f))$ este o soluţie a lui f în A_1 pentru care $g(\hat{y}) = w(Y \mod (f)) \notin MA_1$. Prin urmare $\Delta_f(\hat{y}) \not\subset MA_1$, astfel că pentru o ridicare arbitrară $\widetilde{y}$ a lui $\hat{y}$ la A^* avem

$$f(\widetilde{y}) \equiv 0 \pmod{M^c A^*},\ \Delta_f(\widetilde{y}) \not\subset MA^*.$$

Cum A^* este inel henselian conform propoziţiei 2.10d), din teorema funcţiilor implicite decurge existenţa unei soluţii y a lui f în A^* ce satisface $y \equiv \widetilde{y} \pmod{M^c A^*}$. În plus $g(y) \equiv g(\widetilde{y}) \not\equiv 0 \pmod{MA^*}$, astfel că există un morfism de A-algebre $u : C \longrightarrow A^*$ indus de asocierea $Y \mapsto y$. Este clar că $z := uq(Z)$ este o soluţie a lui h în A^* pentru care

$$z \equiv wq(\hat{Z}) = v(\hat{Z}) \equiv \widetilde{z} \pmod{M^c A^*}.$$

. $\square$

Consecinţele teoremei Popescu sunt profunde şi numeroase. Începem prin a stabili conjectura lui M. Artin referitoare la proprietatea de aproximare.

Teorema 2.20. *Un inel local, noetherian, excelent şi henselian are proprietatea de aproximare.*

Demonstraţie. Fie h un sistem finit de polinoame în variabilele $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_s)$ cu coeficienţi într-un inel local (A, M, K) cu toate proprietăţile cerute în enunţ. Fie $\hat{z}$ o soluţie a lui h în completatul $\hat{A}$

al inelului A. Morfismul de A-algebre $v : B := A[Z]/(h) \longrightarrow \hat{A}$ indus de asocierea $Z \mapsto \hat{z}$ factorizează printr-o A-algebră C ca în teorema Popescu. Fie $w : C \longrightarrow \hat{A}$ şi $q : B :\longrightarrow C$ morfisme de A-algebre astfel ca $v = wq$. Se observă că $\hat{y} := w(\hat{Y})$ este o soluţie a lui f cu proprietatea $g(\hat{y}) = w(\hat{g}) \notin M\hat{A}$. Prin urmare $\Delta_f(\hat{y}) \not\subset M\hat{A}$. Conform teoremei funcţiilor implicite pentru inele henseliene, există o soluţie y a lui f în A pentru care $y \equiv \hat{y} \pmod{M\hat{A}}$. Aşadar, $g(y) \equiv g(\hat{y}) \not\equiv 0 \pmod{M\hat{A}}$ şi se obţine un morfism de A-algebre $u : C \longrightarrow A$ ce duce Y în y. Atunci $z := uq(\hat{Z})$ este o soluţie a lui h în A. □

Teorema precedentă a fost demonstrată în cazul inelelor de serii formale de M. Artin. Demonstraţia sa se baza pe teorema de pregătire Weierstrass. Această idee nu funcţionează, de pildă, pentru inelul excelent henselian $\mathbb{C}\{X\}[[Z]]$, cu $X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$, $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_t)$.

Corolar 2.21. *Dacă $u : A \longrightarrow B$ este un morfism regulat de inele noetheriene, atunci modulul A-diferenţialelor lui B este B-modul plat.*

Demonstraţie. Fie $\Omega_{B/A}$ modulul A-diferenţialelor lui B. Din teorema Popescu rezultă că B este limită inductivă filtrată de A-algebre netede de tip finit C_i, $i \in I$. Atunci

$$\Omega_{B/A} = \varinjlim_{i \in I} \Omega_{C_i/A}.$$

DE CONTINUAT □

Bibliografie

[1] M. André, Localisation de la lissité formelle, *Man. Math.*, **13**(1974), 297–307.
[2] M. André, Cinq exposés sur la désingularisation, manuscris, 1991.
[3] M. Artin, On the solution of analytic equations, *Invent. Math.*, **5**(1968), 277–291.
[4] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **36**(1969), 23–58.
[5] L. A. Avramov, H. B. Foxby, B. Herzog, The structure of a local homomorphism, *J. Algebra*, **164**(1994), 124–145.
[6] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in local rings, I, *Invent. Math.*, **51**(1979), 189–203.
[7] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, ch. III, IX, Hermann, Paris, 1983.
[8] N. Bourbaki, *Topologie générale*, ch. II, III, Hermann, Paris, 1960, 1965.
[9] Al. Brezuleanu, N. Radu, Excellent rings and good separation of the module of differentials, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **23**(1978), 1455–1470.
[10] Al. Brezuleanu, N. Radu, *Algebre locale*, Ed. cademiei Române, Bucureşti, 1998.
[11] Al. Brezuleanu, N. Radu, *Lecţii de algebră* vol. III, Ed. Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 1982.
[12] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
[13] M. Cipu, D. Popescu, Some extensions of Néron's desingularization and approximation, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **26**(1981), 1299–1304.
[14] M. Cipu, D. Popescu, A desingularization theorem of Néron's type, *Ann. Univ. Ferrara*, **30**(1984), 63–76.
[15] J. Denef, L. Lipshitz, Ultraproducts and approximation in local rings, II, *Math. Ann.*, **253**(1980), 1–28.
[16] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1995.
[17] R. Elkik, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.,* 4^e *série*, **6**(1973), 533–604.
[18] S. Greco, P. Salmon, *Topics in* $\mathfrak{m}$*-adic topologies*, Ergebnisse der Mathematik und Ihre Grenzgebiete, 58, Springer, Berlin, 1971.
[19] M. J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, *Publ. Math. I.H.E.S*, **31**(1967), 59–64.
[20] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de géometrie algébrique*, I–IV, *Publ. Math. I.H.E.S*, **4**(1960), **20**(1964), **24**(1965), **32**(1967).
[21] T. Larfeldt, C. Lech, Analytic ramifications and flat couples of local rings, *Acta Math.*, **146**(1981), 201–208.
[22] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, New York, 1970.
[23] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
[24] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, New York, 1962.

[25] A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Math. I.H.E.S*, **21**(1964).

[26] V. Nica, D. Popescu, *Inele henseliene şi proprietatea de aproximare*, Ed. Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 1979.

[27] T. Ogoma, General Néron desingularization based on the ideas of Popescu, *J. Algebra*, **167**(1994), 57–84.

[28] G. Pfister, D. Popescu, Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe, *Invent. Math.*, **30**(1975), 145–174.

[29] D. Popescu, Algebraically pure morphisms, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **24**(1979), 947–977.

[30] D. Popescu, General Néron desingularization, I, *Nagoya Math. J.*, **100**(1986), 97–126.

[31] D. Popescu, General Néron desingularization, II, *Nagoya Math. J.*, **104**(1987), 85–115.

[32] D. Popescu, Letter to the Editor. General Néron desingularization, I, *Nagoya Math. J.*, **118**(1990), 45–53.

[33] D. Popescu, Polynomial rings and their projective modules, *Nagoya Math. J.*, **113**(1989), 121–128.

[34] D. Popescu, On a question of Quillen, *Bull. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, **45(93)**(2002), 209–212.

[35] M. van der Put, A problem on coefficient fields and equations over local rings, *Compositio Math.*, **30**(1975), 235–258.

[36] N. Radu, *Inele locale*, vol.I, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1968.

[37] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Math., vol. 169, Springer, Berlin, 1970.

[38] M. Raynaud, *Anneaux henséliens et approximations*, Colloque d'Algèbre Commutative (Rennes, 1972), Exp. No. 13, 9 pp., Publ. Sem. Math. Univ. Rennes, Annee 1972, Univ. Rennes, Rennes, 1972.

[39] I. Reiten, The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32**(1972), 417–420.

[40] C. Rotthaus, Rings with AP, *Math. Ann.*, **287**(1990), 455–466.

[41] F. K. Schmidt, Mehrfach perfekte Korpes, *Math. Ann.*, **108**(1933), 1–25.

[42] H. Seydi, Anneaux henséliens et conditions de chaînes, *Bull. Soc. Math. France*, **98**(1970), 9–31.

[43] H. Seydi, Sur la théorie des anneaux excellents en caractéristique p, II, *J. Math. Kyoto. Univ.*, **20**(1980), 155–167.

[44] M. Spivakovsky, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **294**(1999), 381–444.

[45] R. Swan, Néron-Popescu desingularization, în *Algebra and Geometry, National Taiwan Univ., 26–30 Dec. 1995*, (Ming-chang Kang, ed.), International Press Cambridge, 1998, 135–192.

[46] B. Teissier, Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative (d'après Artin, Popescu, André, Spivakovsky), *Séminaire Bourbaki*, **784**(1994), 1–15.

[47] J. J. Wavrick, A theorem on solutions of analytic equations with appplications to deformations of complex structures, *Math. Ann.*, **216**(1975), 127–142.

[48] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. II, van Nostrand, Princeton, 1960.