Cuprins

CAPITOLUL 1

Module noetheriene şi module artiniene

Galois a introdus ideea de a studia un obiect matematic (ecuaţii polinomiale) indirect, prin intermediul altei structuri (grupuri asociate). O paradigmă asemănătoare funcţionează cu mult succes în multe alte contexte. Foarte fructuoasă s-a dovedit a fi considerarea relaţiilor de ordine pe mulţimi asociate obiectelor de interes. Pe această idee se bazează demonstraţia elegantă şi simplă dată de E. Noether faptului că în orice inel comutativ în care nu există şiruri infinite de ideale conţinute unul în altul, orice ideal este o intersecţie finită de ideale primare. Acest punct de vedere a fost însuşit în studiul modulelor peste inele necomutative, al laticilor, dar şi al spaţiilor topologice.

1. Condiţii de lanţuri pentru inele şi module

PROPOZIŢIE 1.1. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(ACC) *orice lanţ ascendent de submodule $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ este staţionar, i.e. există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $E_n = E_k$ pentru orice $n \geq k$,*

(MAX) *orice mulţime nevidă de submodule ale lui E conţine un element maximal faţă de incluziune.*

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia $(ACC) \implies (MAX)$ o demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există o muţime nevidă $\mathcal{L}$ de submodule ale lui E astfel încât $\mathcal{L}$ nu are elemente maximale faţă de incluziune. Considerăm $E_1 \in \mathcal{L}$. Atunci există $E_2 \in \mathcal{L}$ cu $E_1 \subset E_2$, în caz contrar E_1 ar fi element maximal, în contradicţie cu presupunerea făcută. Din acelaşi motiv există $E_3 \in \mathcal{L}$ cu $E_2 \subset E_3$. Astfel se pune în evidenţă un şir strict crescător de submodule ale lui E, şir care nu este staţionar.

$(MAX) \implies (ACC)$ Fie $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ un şir ascendent de submodule. În virtutea condiţiei (MAX), mulţimea $\mathcal{L} := \{ E_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ conţine un element maximal E_k. Pentru $n \geq k$ avem $E_k \subseteq E_n$ (pentru că lanţul este ascendent) şi $E_n \in \mathcal{L}$, deci $E_n = E_k$, altfel s-ar contrazice faptul că E_k este element maximal al mulţimii $\mathcal{L}$. □

Considerând pe mulţimea submodulelor ordinea opusă incluziunii, se obţine:

PROPOZIŢIE 1.2. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(DCC) *orice şir descrescător $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ de submodule este staţionar,*

(MIN) *orice mulţime nevidă de submodule ale lui E conţine un element minimal faţă de incluziune.*

DEFINIŢIE 1.3. Un A-modul E se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente ale propoziţiei 1.1 (resp. 1.2). Un inel se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă este astfel privit ca modul peste el însuşi.

Reamintim că un modul E este numit *finit generat* dacă există x_1, …, $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $E = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$. Noţiunea duală este definită folosind dualitatea dintre suma şi intersecţia de submodule.

DEFINIŢIE 1.4. Un A-modul E se numeşte *finit cogenerat* dacă pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ cu $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = 0$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = 0$.

Dualitatea este mai puţin misterioasă după ce vom vedea că procedeul cel mai simplu de a construi un lanţ ascendent este să facem suma unor submodule, iar pentru a produce un lanţ descendent este firesc să considerăm intersecţia a tot mai multe submodule.

EXEMPLE. 1. $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}$ este finit generat (un sistem de generatori constă doar din elementul unitate), dar nu este finit cogenerat întrucât $\cap\{\, p\mathbb{Z} : p \text{ prim}\,\} = 0$ şi

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z} = p_1p_2\cdots p_n\mathbb{Z}$$

pentru orice numere prime p_1, …, p_n, $n \geq 1$.

2. Fie K un corp. Un K-spaţiu vectorial este finit generat dacă şi numai dacă este de dimensiune finită, dacă şi numai dacă este finit cogenerat.

PROPOZIŢIE 1.5. *Pentru un A-modul arbitrar E, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *E este A-modul finit generat,*

(ii) *pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ astfel ca $\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = E$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = E$.*

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Fie o familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ astfel ca $\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = E$. Se consideră un sistem finit de generatori x_1, …, x_n pentru E. Fiecare x_k se scrie ca o sumă finită de elemente nenule $y_{kj} \in E_j$ pentru j parcurgând o mulţime finită Λ_j. Strângem în Γ toţi indicii submodulelor din familia considerată care conţin componentele y_{kj} ale generatorilor modulului E: $\Gamma := \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n$. Este clar că Γ este o parte finită a lui Λ şi că orice element din E este combinaţie liniară de x_k, deci şi de y_{kj}.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Se consideră familia de submodule $(Ax)_{x\in E}$ ale lui E. $\square$

TEOREMA 1.6. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *E este A-modul noetherian,*
(ii) *orice submodul al lui E este finit generat,*
(iii) *pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.*

DEMONSTRAŢIE. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Să presupunem că există un submodul F al unui modul noetherian E care nu este finit generat. Atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, avem $Ax_1 + \cdots + Ax_n \subset F$, deci există $x_{n+1} \in F \setminus \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Ax_i$. Inductiv se construieşte un lanţ ascendent nestaţionar de submodule ale lui F, deci şi ale lui E.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Se aplică propoziţia 1.5 A-modulului $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Dacă $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ este un lanţ ascendent de submodule ale lui E, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_{n\geq 0} E_n = \sum_{i=0}^{k} E_i = E_k \ .$$

Rezultă $E_n \subseteq E_k$ pentru toţi $n \geq k$. Cum incluziunea inversă are loc pentru că E_n formează un lanţ crescător faţă de incluziune, rezultă că lanţul considerat este staţionar. $\square$

Rezultatul corespunzător pentru module artiniene este următorul:

TEOREMA 1.7. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *E este A-modul artinian,*
(ii) *orice modul cât al lui E este finit cogenerat,*
(iii) *pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.*

DEMONSTRAŢIE. Echivalenţa dintre prima şi ultima condiţie se demonstrează ca şi în cazul noetherian.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Fie $F := \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ şi $p : E \longrightarrow E/F$ surjecţia canonică. Întrucât

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} p(E_\lambda) = p\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\big) = p(F) = 0 \ ,$$

iar modulul cât E/F este finit cogenerat conform condiţiei (ii), deducem că există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} p(E_\gamma) = 0$. Ultima relaţie este echivalentă cu $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Fie $G \leq E$, $F := E/G$, $p : E \longrightarrow F$ surjecţia canonică şi $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o familie nevidă de submodule ale lui F cu $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = = 0$. Considerând preimaginile $E_\lambda := p^{-1}(F_\lambda)$, avem

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = p^{-1}\big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\big) = p^{-1}(0) = G \ .$$

Condiţia (iii) asigură existenţa unei părţi finite $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $G = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. De aici rezultă

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} p(E_\gamma) = p\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\big) = p(G) = 0 \ .$$

$\square$

TEOREMA 1.8. *Fie* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ *un şir exact de* A*-module. Atunci* E *este modul noetherian (resp. artinian) dacă şi numai dacă* E' *şi* E'' *sunt module noetheriene (resp. artiniene).*

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra numai echivalenţa afirmaţiilor referitoare la noetherianitate, restul demonstraţiei fiind similar.

Să presupunem că E este modul noetherian. Dacă $E'_0 \subseteq E'_1 \subseteq \subseteq E'_2 \subseteq \ldots$ este un lanţ ascendent de submodule ale lui E', atunci $(f(E'_n))_{n\geq 0}$ este un lanţ ascendent de submodule ale modulului noetherian E. Aşadar, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(E'_n) = f(E'_k)$ pentru toţi $n \geq k$. Morfismul f fiind injectiv, avem $E'_i = f^{-1}(f(E'_i))$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $E'_n = E'_k$ pentru $n \geq k$. Cum lanţul ascendent $(E'_n)_{n\geq 0}$ a fost arbitrar, conchidem că E' îndeplineşte condiţia (ACC).

Pentru fiecare lanţ ascendent $(E''_n)_{n\geq 0}$ de submodule ale lui E'', lanţul ascendent $(g^{-1}(E''_n))_{n\geq 0}$ de submodule ale lui E este staţionar. Cum g este surjectivă, avem $g(g^{-1}(E''_n)) = E''_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$. De aici se deduce rapid că lanţul considerat în E'' este staţionar.

Pentru reciprocă, se consideră $(E_n)_{n\geq 0}$ un lanţ ascendent de submodule ale lui E. Preimaginile modulelor E_i prin f, resp. imaginile lor prin g, formează lanţ ascendent pe modulul noetherian E'', resp. E'.

Acestea staţionează: $f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$ şi $g(E_n) = g(E_k)$ pentru toţi $n \geq k$, unde k a fost convenabil ales. Vom arăta că $E_n = E_k$ pentru $n \geq k$.

Fie $x \in E_n$, unde $n \geq k$. Din $g(x) \in g(E_n) = g(E_k)$ rezultă că există $y \in E_k$ astfel ca $g(y) = g(x)$. Atunci $x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$. Aşadar, există $z \in E'$ cu $f(z) = x - y \in E_n + E_k = E_n$. Deci $z \in f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$, astfel că $x - y = f(z) \in E_k$. Prin urmare $x = (x - y) + y \in E_k$. □

COROLAR 1.9. *Un modul izomorf cu un modul noetherian (resp. artinian) este noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică teorema şirului exact

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E \longrightarrow E \longrightarrow 0 \ .$$

□

COROLAR 1.10. *Suma directă a unei familii finite de module este modul noetherian (resp. artinian) dacă şi numai dacă fiecare membru al familiei are aceeaşi proprietate.*

DEMONSTRAŢIE. Se raţionează prin inducţie după cardinalul familiei folosind şirul exact canonic

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n-1} E_i \longrightarrow 0 \ .$$

□

COROLAR 1.11. *Orice modul finit generat peste un inel noetherian (resp. artinian) este modul noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Un modul generat de n elemente este izomorf cu un cât al A-modulului A^n, care este A-modul noetherian (resp. artinian) conform rezultatului precedent. Apoi se aplică teorema 1.8. □

COROLAR 1.12. *Dacă A este un inel noetherian (resp. artinian) şi I este un ideal al său, atunci A/I este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Conform teoremei 1.8, A/I este A-modul noetherian (resp. artinian). Apoi se ţine cont că orice ideal al inelului A/I este A-modul. □

Ambele proprietăţi se comportă bine la localizare.

PROPOZIŢIE 1.13. *Dacă E este un A-modul noetherian (resp. artinian) şi S este un sistem multiplicativ închis în A, atunci $S^{-1}E$ este $S^{-1}A$-modul noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAŢIE. Aserţiunea rezultă din binecunoscuta corespondenţă dintre $S^{-1}A$-submodulele lui $S^{-1}E$ şi A-submodulele lui E care sunt S-saturate. $\square$

EXEMPLE. 1. Orice inel finit este noetherian şi artinian pentru că există doar un număr finit de ideale.

2. Orice corp este inel noetherian şi artinian, având doar două ideale.

3. Orice inel principal este noetherian. Un inel principal este artinian dacă şi numai dacă este corp. Într-adevăr, dacă $p \neq 0$ este generatorul unui ideal maximal, şirul descrescător de ideale $(p) \supset (p^2) \supset \supset (p^3) \supset \ldots$ nu este staţionar — în caz contrar rezultând existenţa unui număr natural $n > 0$ şi a unui element a al inelului astfel ca $p^n = ap^{n+1}$, ceea ce implică p inversabil.

4. Un spaţiu vectorial V este modul noetherian dacă şi numai dacă este modul artinian, dacă şi numai dacă are dimensiunea finită. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie liniar independentă de elemente ale lui V, pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră subspaţiile vectoriale V_n şi W_n generate de elementele cu indici $\leq n$, respectiv $> n$. Atunci $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un lanţ ascendent nestaţionar, iar $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un lanţ descendent nestaţionar. Dacă V este finit dimensional, se foloseşte exemplul 2 şi corolarul 1.11.

5. Pentru K corp, $K^{\mathbb{N}}$ şi $K[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ nu sunt inele noetheriene. Afirmaţia referitoare la $K^{\mathbb{N}}$ este consecinţă a exemplului 4. Pentru inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate se observă, de pildă, că lanţul constând din idealele generate de primele n variabile, $n = 1, 2, \ldots$, nu este staţionar.

6. Pentru p număr prim se defineşte $H_p := \{\, \dfrac{x}{p^n} \,:\, x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \,\}$ şi $\mathbb{Z}_{p^\infty} := H_p/\mathbb{Z}$. Atunci $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este $\mathbb{Z}$-modul artinian, dar nu noetherian. Pentru a demonstra aceste afirmaţii, considerăm G un subgrup propriu al lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ şi observăm că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât G este generat de clasa lui $1/p^n$. Rezultă că dacă $G = p^{-s}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ şi $G' = p^{-t}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ cu $s, t \in \mathbb{N}$, atunci $G' \leq G$ dacă şi numai dacă $t \leq s$. Prin urmare, laticea $\mathbb{Z}$-submodulelor lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este bine ordonată relativ la incluziune, adică îndeplineşte condiţia (MIN). Cum mulţimea numerelor naturale nu satisface condiţia lanţurilor ascendente, tragem concluzia că $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nu are proprietatea (ACC).

7. În notaţiile exemplului precedent, H_p nu este $\mathbb{Z}$-modul artinian şi nici noetherian, pentru că există un şir exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow 0$.

8. Un subinel al unui inel noetherian (resp. artinian) nu are neapărat aceeaşi proprietate. De pildă, inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate de la exemplul 5 este subinel al corpului său de fracţii.

Rezultatul care urmează arată că proprietatea unui inel de a fi noetherian se transferă la inelul de polinoame într-o variabilă. Astfel putem da noi exemple de inele noetheriane.

TEOREMA 1.14. *(Teorema bazei a lui Hilbert) Dacă A este inel noetherian, atunci inelul de polinoame $A[X]$ este încă noetherian.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că dacă $A[X]$ nu este inel noetherian, atunci nici A nu este. Fie I un ideal în $A[X]$ care nu este finit generat. Alegem $f_1 \in I$ un polinom nenul de grad minim printre elementele lui I. Întrucât I nu coincide cu idealul generat de f_1, există $f_2 \in I \setminus f_1A[X]$. Alegem un polinom f_2 de grad minim între toate polinoamele cu această proprietate. Repetând construcţia, se obţine un şir de polinoame $(f_n)_{n\geq 1}$ cu f_n un polinom de grad minim din $I \setminus (f_1, \dots, f_{n-1})A[X]$, $n \geq 1$. Notăm cu d_n gradul lui f_n şi cu a_n coeficientul său dominant. Din alegerea polinoamelor rezultă $d_1 \leq d_2 \leq \dots$ Arătăm că lanţul de ideale $a_1A \subseteq (a_1, a_2)A \subseteq \dots$ este strict crescător. Să presupunem contrariul. Atunci există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, astfel încât $(a_1, a_2, \dots, a_k)A = (a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})A$ sau echivalent $a_{k+1} = a_1b_1 + \dots + a_kb_k$ pentru nişte elemente $b_i \in A$. Atunci polinomul

$$g := f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b_i X^{d_{k+1}-d_i} f_i$$

are gradul $< d_{k+1}$, este din idealul considerat I, dar nu aparţine idealului generat de f_1, …, f_k. Existenţa unui astfel de polinom contrazice alegerea lui f_{k+1}. $\square$

Reciproca este valabilă pentru că dacă $A[X]$ este inel noetherian, atunci $A \simeq A[X]/(X)$ este $A[X]$-modul noetherian, deci inel noetherian conform corolarului 1.12.

Pentru a formula consecinţe importante ale acestui rezultat fundamental în algebra comutativă, reamintim următoarele noţiuni. Dacă $u : A \longrightarrow B$ este un morfism unitar de inele comutative, B va fi numit *A-algebră de morfism structural u*. Pe grupul abelian $(B, +)$ subiacent inelului B se introduce o structură de A-modul prin restricţia scalarilor via morfismul u, înmulţirea exterioară fiind definită prin formula $a \cdot x = u(a) \cdot x$, $a \in A$, $x \in B$, unde înmulţirea din partea dreaptă este înmulţirea internă cu care este înzestrat inelul B. În cazul în care u este injectiv, identificând pe A cu imaginea sa prin u, putem presupune că A este un subinel al lui B şi că u este morfismul de incluziune $A \subseteq B$. Spunem în acest caz că B este o *extindere* a inelului A.

Pentru $x_1, \ldots, x_n \in B$ arbitrare se notează cu $A[x_1, \ldots, x_n]$ cel mai mic subinel al lui B care conţine elementele alese şi $u(A)$. Din proprietatea de universalitate a algebrei polinoamelor rezultă că aplicaţia $\alpha : A[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B$ definită prin evaluarea $f \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ este unicul morfism de inele astfel încât $\alpha(X_i) = x_i$, $1 \le i \le n$, şi $\alpha(a) = u(a)$, $a \in A$. Este clar că

$$A[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{Im}\ \alpha = \{\, f(x_1, \ldots, x_n) \,:\, f \in A[X_1, \ldots, X_n]\,\}\ .$$

Se spune că morfismul de inele $u : A \longrightarrow B$ este *de tip finit* sau că B este o A-*algebră de tip finit* sau că B este o A-*algebră finit generată* dacă există $x_1, \ldots, x_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $B = A[x_1, \ldots, x_n]$. În acest caz, $x_1, \ldots, x_n$ se numeşte *sistem de generatori ai* A-*algebrei* B. Din cele de mai sus rezultă că $B \simeq A[X_1, \ldots, X_n]/I$ pentru un ideal I în inelul de polinoame $A[X_1, \ldots, X_n]$. Se spune că morfismul u este *finit* sau că B este o A-*algebră finită* dacă B este A-modul finit generat.

Propoziţie 1.15. *Fie A un inel noetherian (resp. artinian) şi B o A-algebră finită. Atunci B este inel noetherian (resp. artinian).*

Demonstraţie. Conform corolarului 1.11 B este un A-modul noetherian (resp. artinian). Cum orice ideal al lui B este şi un A-submodul al lui B privit ca A-modul, laticea idealelor lui B satisface condiţia (ACC) (resp. (DCC)). □

Are loc şi o reciprocă parţială a acestui rezultat:

Teorema 1.16. *(Eakin-Nagata-Eisenbud) Dacă A este un subinel al lui B astfel încât B este o A-algebră finită via morfismul incluziune $A \subseteq B$, iar B este inel noetherian (resp. artinian), atunci A este inel noetherian (resp. artinian).*

Demonstraţie. Pentru o demonstraţie a afirmaţiei referitoare la noetherianitate trimitem la [**3**, teorema 8.10]. Cazul artinian se găseşte în [**7**]. □

Propoziţie 1.17. *Fie A un inel noetherian şi B o A-algebră de tip finit. Atunci B este un inel noetherian.*

Demonstraţie. Inelul B este izomorf cu un inel factor al inelului de polinoame peste A într-un număr finit de nedeterminate. Un inel de forma $A[X_1, \ldots, X_n]$ este noetherian conform teoremei bazei a lui Hilbert. Demonstraţia se încheie folosind corolarul 1.12. □

Exerciţii.

1. Fie E un A-modul. Arătaţi că următoarele condiţii sunt echivalente:

(i) E este modul noetherian,
(ii) condiţia (ACC) este satisfăcută pentru submodulele finit generate ale lui E,
(iii) orice modul cât al lui E este noetherian.

2. Un inel este noetherian dacă şi numai dacă orice ideal prim este finit generat.

3. Dacă un inel are proprietatea că orice ideal maximal al său este finit generat, rezultă că inelul este noetherian?

4. Inelul de serii formale într-o variabilă cu coeficienţi într-un inel noetherian este inel noetherian.

5. Fie E un A-modul şi f un A-endomorfism al său.

a) Dacă E este modul artinian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $E = \text{Im } f^n + \ker f^n$. Deduceţi că f este monomorfism dacă şi numai dacă este automorfism.

b) Dacă E este modul noetherian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $\text{Im } f^n \cap \ker f^n = 0$. Aşadar, f este epimorfism dacă şi numai dacă este automorfism.

6. Orice endomorfism surjectiv al unui modul finit generat este automorfism.

2. Module de lungime finită

Până acum am studiat în paralel noetherianitatea şi artinianitatea modulelor, ghidaţi de dualitatea existentă între cele două proprietăţi. Am demonstrat câteva proprietăţi ale modulelor noetheriene care nu au corespondent în cazul artinian. În această secţiune arătăm că prezenţa simultană a celor două proprietăţi are consecinţe importante, conducând la o generalizare a noţiunii de spaţiu vectorial de dimensiune finită.

Definiţie 2.1. Un lanţ finit de submodule

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{1}$$

se numeşte *filtrare finită* sau *serie normală* a lui E. Numărul n se numeşte *lungimea seriei*, iar modulele factor E_{i-1}/E_i, $1 \le i \le n$, poartă numele de *factori*.

O serie normală este numită *serie Jordan-Hölder* sau *şir de compoziţie* pentru E dacă factorii săi sunt module simple (*i.e.* E_{i-1}/E_i nu are submodule proprii oricare ar fi i, $1 \le i \le n$). Echivalent, o serie normală saturată (între ai cărei termeni nu mai pot fi introduse alte submodule).

Prin convenţie, modulul nul admite un şir de compoziţie de lungime zero.

PROPOZIŢIE 2.2. *Un modul E are un şir de compoziţie dacă şi numai dacă E este modul noetherian şi artinian.*

DEMONSTRAŢIE. Să presupunem că E are un şir de compoziţie de lungime n. Raţionăm prin inducţie după n. În cazul $n = 0$, E este modulul nul şi nu avem nimic de demonstrat. Dacă $n = 1$, atunci E este un A-modul simplu, care evident este noetherian şi artinian. Presupunem că orice A-modul care are un şir de compoziţie de lungime cel mult n, $n \geq 1$, este noetherian şi artinian, iar E admite un şir de compoziţie $0 = E_{n+1} \subset E_n \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E$ de lungime $n + 1$. Atunci E_1 are un şir de compoziţie de lungime n, deci conform ipotezei de inducţie, E_1 este modul noetherian şi artinian. Cum E/E_1 este modul simplu, aplicând teorema 1.8 şirului exact

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E/E_1 \longrightarrow 0$$

se obţine că E este noetherian şi artinian.

Demonstrăm reciproca. Mulţimea tuturor submodulelor nenule ale modulului artinian E are un element minimal E_1. Se observă că E_1 este modul simplu, altfel s-ar contrazice minimalitatea sa. Dacă $E \neq E_1$, se raţionează la fel pentru modulul artinian nenul E/E_1, obţinându-se existenţa unui submodul E_2 al lui E având proprietatea că E_2/E_1 este modul simplu. În acest mod se găseşte un lanţ ascendent $0 \subset E_1 \subset \subset E_2 \subset \ldots$ de submodule ale modulului noetherian E. Acest lanţ este staţionar conform condiţiei (ACC). Pe de altă parte, din modul de alegere a submodulelor E_i rezultă că ultimul termen din lanţ nu poate fi decât întreg modulul E. $\square$

LEMA 2.3. *Un A-modul nenul E este simplu dacă şi numai dacă există un ideal maximal M astfel încât $E \simeq A/M$.*

DEMONSTRAŢIE. Corpul A/M neavând ideale diferite de zero şi de el însuşi, înseamnă că A-modulul A/M este simplu pentru orice ideal maximal M. Reciproc, să presupunem că E este un modul nenul şi simplu. Pentru $x \in E$, $x \neq 0$, Ax este un submodul nenul al lui E. Prin urmare, $E = Ax$, deci există un morfism surjectiv $p : A \longrightarrow E$ definit prin asocierea $a \mapsto ax$. Din teorema fundamentală de izomorfism pentru module rezultă că nucleul $M := \ker p$ satisface $A/M \simeq E$. Dacă M nu ar fi ideal maximal, atunci A/M, deci şi E, ar conţine un submodul nenul, contradicţie. $\square$

DEFINIŢIE 2.4. Se spune că A-modulul E are *lungime finită* dacă există majorare pentru lungimile tuturor seriilor normale.

TEOREMA 2.5. *(Jordan-Hölder) Dacă există un şir de compoziţie pentru E, atunci E are lungime finită şi toate şirurile sale de compoziţie au aceeaşi lungime.*

DEMONSTRAŢIE. Fie

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{2}$$

un şir de compoziţie de lungime minimă pentru E. Vom arăta prin inducţie după n că orice serie normală a lui E are lungimea cel mult n. În particular, orice alt şir de compoziţie are lungimea mai mică sau egală cu n. În virtutea alegerii şirului de compoziţie 2), rezultă concluzia anunţată.

Teorema este evidentă pentru $n \leq 1$. Presupunem că $n > 1$ şi că aserţiunea este valabilă pentru modulele care au un şir de compoziţie de lungime mai mică decât n. Fie $0 = F_t \subset F_{t-1} \subset \ldots \subset F_1 \subset F_0 = E$ o serie normală arbitrară a lui E. Dacă $F_1 \subseteq E_1$, aplicând ipoteza de inducţie lui E_1 se obţine $t-1 \leq n-1$. Dacă $F_1 \not\subseteq E_1$, atunci $E_1+F_1 = E$ deoarece E/E_1 este modul simplu. Din teorema de izomorfism pentru module avem

$$\frac{E}{E_1} = \frac{E_1 + F_1}{E_1} \simeq \frac{F_1}{E_1 \cap F_1} .$$

Rezultă că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este modul simplu. Întrucât E_1 are o serie de compoziţie de lungime $n-1$, din ipoteza de inducţie se obţine că în submodulul său propriu $E_1 \cap F_1$ toate seriile normale au lungimea cel mult $n-2$. Folosind faptul că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este simplu, se deduce că F_1 are o serie de compoziţie de lungime $\leq n-1$. Aşadar, şi în acest caz avem $t-1 \leq n-1$. □

În virtutea teoremei Jordan-Hölder, următoarea definiţie are sens:

DEFINIŢIE 2.6. Maximul lungimilor seriilor normale dintr-un modul E în care există şir de compoziţie poartă numele *lungimea modulului* E. Notaţia consacrată este $l_A(E)$. Dacă nu există pericol de confuzie, se omite menţionarea explicită a inelului.

Din demonstraţia teoremei Jordan-Hölder se constată că $l_A(E)$ este egală cu lungimea oricărui şir de compoziţie. Cunoştinţele referitoare la modulele noetheriene şi artiniene ne permit să arătăm că lungimea este o funcţie aditivă pe mulţimea modulelor de lungime finită.

PROPOZIŢIE 2.7. *Fie dată o serie normală* (1) *pentru* E. *Atunci* E *are lungime finită dacă şi numai dacă* E_{i-1}/E_i *are lungime finită pentru* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Dacă* $l(E) < \infty$, *atunci* $l(E) = \sum_{i=1}^{n} l(E_{i-1}/E_i)$.

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să justificăm afirmaţiile pentru $n = 2$, cazul general rezultând apoi uşor prin inducţie. Aşadar, presupunem că $l(E) < \infty$ şi că $0 = E_2 \subset E_1 \subset E$ este o serie normală, pe care o rafinăm până la un şir de compoziţie. Modulele din acest şir de compoziţie situate între E_1 şi E (resp. E_2 şi E_1) induc un şir de compoziţie pentru E/E_1 (resp. E_1). Evident are loc relaţia $l(E) = l(E/E_1) + l(E_1)$.

Pentru implicaţia reciprocă, presupunem că E/E_1 şi E_1 sunt module de lungime finită. Obţinem un şir de compoziţie pentru E prelungind un şir de compoziţie pentru E_1 cu preimaginile în E ale modulelor dintr-un şir de compoziţie al lui E/E_1. □

COROLAR 2.8. *a) Orice submodul şi orice imagine omomorfă a unui modul de lungime finită are lungime finită.*

b) O sumă directă finită de module de lungime finită are lungime finită şi lungimea sa este suma lungimilor sumanzilor.

Rezultatul care urmează arată că noţiunea de modul de lungime finită este o generalizare a noţiunii de spaţiu vectorial finit-dimensional.

PROPOZIŢIE 2.9. *Fie* V *un spaţiu vectorial peste un corp* K. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) $\dim_K(V) < \infty$,

(*ii*) V *este un* K*-modul de lungime finită,*

(*iii*) V *este un* K*-modul noetherian,*

(*iv*) V *este un* K*-modul artinian.*

Dacă una dintre aceste condiţii este îndeplinită, atunci are loc egalitatea $\dim_K(V) = l_K(V)$.

DEMONSTRAŢIE. Din propoziţia 2.2 ştim deja că (*iii*) şi (*iv*) sunt consecinţe ale condiţiei (*ii*). Pentru a arăta că (*i*) implică (*ii*), se consideră o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pentru V. Spaţiile vectoriale $V_t := Ke_1 + \cdots + Ke_t$, $1 \leq t \leq n$, constituie un şir de compoziţie pentru V. Prin urmare, V este un K-modul de lungime finită. Implicaţiile (*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) şi (*iv*) $\Longrightarrow$ (*i*) au fost stabilite în exemplul 4. □

EXERCIŢII.

1. Dacă E_1 şi E_2 sunt submodule ale unui modul E de lungime finită, atunci $l(E_1 + E_2) + l(E_1 \cap E_2) = l(E_1) + l(E_2)$.

2. Fie E un modul de lungime finită n şi f un endomorfism al lui E. Să se arate că E este suma directă internă dintre $\operatorname{Im} f^n$ şi $\ker f^n$.

3. Un modul nenul E se numeşte *indecompozabil* dacă singurii săi sumanzi direcţi sunt modulele improprii 0 şi E. Să se demonstreze că orice modul noetherian sau artinian se poate scrie ca o sumă directă finită de submodule indecompozabile.

4. Fie f un endomorfism al unui modul indecompozabil şi de lungime finită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este monomorfism,
(ii) f este epimorfism,
(iii) f este automorfism,
(iv) $f^n \neq 0$ pentru orice număr natural n.

3. Descompunere primară în module noetheriene

Teoremele de descompunere a unui obiect în componente mai simple sau cu anumite proprietăţi specificate ocupă un loc central în algebră. Posibilitatea de a clasifica obiectele sau de a le manipula mai uşor este întotdeauna atrăgătoare. În această secţiune se arată că fiecare submodul al unui modul noetherian este intersecţia unei familii finite de submodule primare. În forma actuală, demonstraţia este influenţată de viziunea modernă, impusă de Bourbaki, şi este susceptibilă de a fi parafrazată pentru inele necomutative, în categorii sau latici.

3.1. Radicalul unui submodul.

Definiţie 3.1. Fie A un inel, I un ideal al său, E un A-modul şi F submodul al lui E. Mulţimea

$$(F : I)_E := \{\, x \in E \,:\, ax \in F \text{ pentru orice } a \in I \,\} \tag{3}$$

este numită *transportorul lui I în F*. Mulţimea

$$(F : E)_A := \{\, a \in A \,:\, aE \subseteq F \,\} \tag{4}$$

este numită *câtul lui F prin E*. În cazul particular al submodulului nul, $(0 : I)_E$ este numit *anulatorul lui I în E* şi se notează $\operatorname{Ann}_E I$.

Se verifică imediat că $(F : I)_E$ este submodul al lui E, iar $(F : E)_A$ este un ideal în A. Proprietăţile de mai jos se justifică fără nici o dificultate:

Propoziţie 3.2. *Fie A un inel, I, J ideale, E un A-modul şi F submodul al lui E. Atunci:*
a) $F \subseteq (F : I)_E$,
b) $I(F : I)_E \subseteq F$,
c) $((F : I)_E : J)_E = (F : IJ)_E = ((F : J)_E : I)_E$,

d) pentru orice familie de submodule $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ale lui* E *avem*

$$\Big((\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) : I\Big)_E = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F_\lambda : I)_E \ ,$$

e) pentru orice familie de ideale $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ale lui* A *avem*

$$\Big(F : \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\Big)_E = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(F : I_\lambda)_E \ .$$

DEFINIŢIE 3.3. Numim *rădăcină a lui* F *în* E mulţimea

$$\mathrm{Rad}_E\,(F) := \{\, a\in A \ :\ \forall x\in E,\ \exists n\in\mathbb{N} \ \text{ astfel ca } a^n x\in F\,\}. \tag{5}$$

În particular, pentru orice ideal I notăm $\mathrm{Rad}\,(I) = \mathrm{Rad}_A\,(I)$. Se verifică imediat că $\mathrm{Rad}_E\,(F)$ este ideal în A care conţine câtul lui F prin E. Alte proprietăţi sunt date în următoarea

PROPOZIŢIE 3.4. *a)* $\mathrm{Rad}_E\,(F) = A$ *dacă şi numai dacă* $F = E$, *dacă şi numai dacă* $(F : E)_A = A$.

b) Dacă $F' \subseteq F$ *sunt submodule ale lui* E, *atunci*

$$\mathrm{Rad}_E\,(F') \subseteq \mathrm{Rad}_E\,(F) \quad \textit{şi} \quad (E : F')_A \subseteq (E : F)_A \ .$$

c) $\mathrm{Rad}_E\,(F) = \mathrm{Rad}_{E/F}\,(0)$.

d) $\mathrm{Rad}_E\,(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n) = \mathrm{Rad}_E\,(F_1)\cap\ldots\cap\mathrm{Rad}_E\,(F_n)$.

PROPOZIŢIE 3.5. *Pentru* J *şi* I *ideale ale lui* A *sunt îndeplinite proprietăţile:*

a) Dacă $I\subseteq J$, *atunci* $\mathrm{Rad}\,(I)\subseteq\mathrm{Rad}\,(J)$.

b) $\mathrm{Rad}\,(\mathrm{Rad}\,(I)) = \mathrm{Rad}\,(I)$.

c) $\mathrm{Rad}\,(I) = A$ *dacă şi numai dacă* $I = A$.

d) $\mathrm{Rad}\,(IJ) = \mathrm{Rad}\,(I\cap J) = \mathrm{Rad}\,(I)\cap\mathrm{Rad}\,(J)$.

e) $\mathrm{Rad}\,(I+J) = \mathrm{Rad}\,(\mathrm{Rad}\,(I)+\mathrm{Rad}\,(J))$.

EXEMPLE 1. Fie n un număr întreg supraunitar. Atunci $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Z}}\,(n\mathbb{Z})$ este generat de produsul divizorilor primi ai lui n.

2. $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Z}}\,(0) = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}\,(0) = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}\,(\mathbb{Z}) = 0$.

3. $\mathrm{Rad}_A\,(I) = \{\, a\in A \ :\ \text{există } n\in\mathbb{N} \text{ astfel ca } a^n\in I\,\}$.

Rădăcina idealului nul este formată din acele elemente a ale inelului pentru care există un număr natural n astfel ca $a^n = 0$. Prin urmare, $\mathrm{Rad}_A(0)$ coincide cu idealul format din elementele nilpotente din inel, ideal notat $\mathrm{N}(A)$ şi numit *nilradicalul* inelului.

DEFINIŢIE 3.6. Un ideal se numeşte *radical* dacă el coincide cu rădăcina sa. Un inel este *redus* dacă nu are elemente nilpotente nenule.

Orice ideal prim este ideal radical. Mai general, pentru orice ideal prim P şi orice $n \geq 1$ avem Rad $(P^n) = P$. Pentru orice inel A, inelul $A/\mathrm{N}(A)$ este redus.

PROPOZIŢIE 3.7. *Dacă S este un sistem multiplicativ închis în A, atunci $\mathrm{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathrm{N}(A)$. În particular, orice localizat al unui inel redus este inel redus.*

În repetate rânduri vom folosi un rezultat cunoscut sub numele de lema lui Krull:

PROPOZIŢIE 3.8. *(Lema lui Krull) Fie S un sistem multiplicativ închis ce nu conţine 0 şi I un ideal disjunct de S. Atunci există un ideal prim ce conţine I şi este disjunct de S. În particular, orice ideal $I \neq A$ este conţinut într-un ideal maximal.*

DEMONSTRAŢIE. Vom folosi procedeul de zornificare. Notăm cu $\mathcal{L}$ mulţimea idealelor din A care nu taie S şi conţin I. Prin ipoteză $\mathcal{L}$ este nevidă. Vom demonstra că $\mathcal{L}$ ordonată cu relaţia de incluziune este mulţime inductivă. Fie $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ un şir crescător de ideale din $\mathcal{L}$. Atunci $J := \cup\{\, J_n \,:\, n \geq 1 \,\}$ este un ideal disjunct de S, conţine I, deci $J \in \mathcal{L}$. Din lema lui Zorn rezultă că $\mathcal{L}$ conţine un element maximal P. Vom arăta că P este ideal prim al lui A.

Fie b, $c \in A \backslash P$ astfel încât $bc \in P$. Deoarece $P + Ab$ şi $P + Ac$ conţin strict idealul P, din maximalitatea lui P ca element al lui $\mathcal{L}$ decurge $(P + Ab) \cap S \neq \emptyset$ şi $(P + Ac) \cap S \neq \emptyset$. Explicit, există $s = p + cx \in S$ şi $t = q + by \in S$, cu x, $y \in A$ şi p, $q \in P$. Prin calcul direct se găseşte $st = (pq + bpy + cqx) + cbxy \in P$. Cum S este închisă la înmulţire, $st \in S$, ceea ce contrazice faptul că P şi S nu au elemente în comun.

În cazul particular $I = 0$ şi $S = \{\, 1 \,\}$, mulţimea $\mathcal{L}$ definită mai sus constă din idealele distincte de întreg inelul. Prin urmare, elementele sale maximale sunt exact idealele maximale ale lui A. Ultima parte a concluziei propoziţiei rezultă folosind această observaţie pentru inelul A/I şi corespondenţa dintre Spec A/I şi Spec A. $\square$

O altă proprietate utilă este consemnată în următoarea lemă.

LEMA 3.9. *(Principiul local-global) Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) $E = 0$,
(ii) $E_P = 0$ *pentru orice ideal prim* P,
(iii) $E_M = 0$ *pentru orice ideal maximal* M.

DEMONSTRAŢIE. Singura implicaţie care necesită justificare este $(iii) \Longrightarrow (i)$. Presupunem că E este un modul nenul ce îndeplineşte condiţia (iii). Se găseşte $x \in E$, $x \neq 0$, deci anulatorul său $\operatorname{Ann}_A x$ este diferit de A. Conform lemei lui Krull, idealul $\operatorname{Ann}_A x$ este conţinut într-un ideal maximal M. Întrucât $x/1 \in E_M = 0$, există $a \in A \setminus M$ cu $ax = 0$. Această relaţie arată $a \in \operatorname{Ann}_A x \subseteq M$, absurd. □

Rezultatul următor arată că proprietatea unui inel de a fi redus este o proprietate locală.

PROPOZIŢIE 3.10. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *A este inel redus,*
(ii) *A_P este inel redus pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$,*
(iii) *A_M este inel redus pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$.*

DEMONSTRAŢIE. La demonstrarea implicaţiei $(iii) \Longrightarrow (i)$ se foloseşte comutarea localizării cu luarea nilradicalului şi faptul că un modul este nul dacă şi numai dacă toate localizatele sale în ideale maximale sunt nule. □

PROPOZIŢIE 3.11. *Fie A un inel şi I un ideal în A. Atunci $\operatorname{Rad}_A(I)$ este intersecţia idealelor prime din A care conţin pe I.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinând cont de relaţia $c)$ din propoziţia 3.4 şi de bijecţia dintre idealele lui A care conţin pe I şi idealele inelului A/I, este suficient să arătăm că nilradicalul unui inel A coincide cu intersecţia idealelor prime ale inelului.

Fie a un element nilpotent şi n un număr natural astfel ca $a^n = 0$. Pentru orice ideal prim P avem $a^n \in P$, deci $a \in P$. Aşadar,

$$\mathrm{N}(A) \subseteq \cap\{\, P \,:\, P \in \operatorname{Spec} A \,\} \,.$$

Pentru a demonstra egalitatea în această incluziune, vom arăta că pentru $a \in A \setminus \mathrm{N}(A)$ se găseşte un ideal prim P care nu conţine a. Considerăm sistemul multiplicativ S constând din elementul unitate al inelului A şi din puterile lui a. În conformitate cu alegerea lui a, S nu conţine elementul nul. Proprietatea dorită rezultă din lema lui Krull. □

DEFINIŢIE 3.12. Un ideal prim P se numeşte *ideal prim minimal* dacă nici un ideal prim nu este conţinut strict în P. Altfel spus, P este un element minimal în mulţimea $\operatorname{Spec} A$ ordonată cu relaţia de incluziune. Vom nota cu $\operatorname{Min} A$ mulţimea tuturor idealelor prime minimale ale lui A.

Arătăm că fiecare ideal prim conţine cel puţin un ideal prim minimal.

LEMA 3.13. *Pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ există $Q \in \operatorname{Min} A$ cu $Q \subseteq P$.*

Demonstraţie. Vom arăta că mulţimea

$$\mathcal{L} := \{\, Q \in \operatorname{Spec} A \,:\, Q \subseteq P \,\}$$

ordonată de incluziune este inferior inductivă (altfel spus, $\mathcal{L}$ cu ordinea duală este mulţime inductiv ordonată). Dacă $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ este un lanţ descrescător de ideale din $\mathcal{L}$, notăm $Q := \cap\{\, P_n \,:\, n \geq 1 \,\}$. Evident Q este conţinut în orice P_n, $n \geq 1$. Mai trebuie justificat faptul că idealul Q este prim. Fie a, $b \in A \setminus Q$. Atunci există numere naturale s şi t pentru care $a \notin P_s$, $b \notin P_t$. Notând cu n cel mai mare dintre s şi t, din relaţia $P_n = P_s \cap P_t$ rezultă că $a \notin P_n$ şi $b \notin P_n$. Prin urmare $ab \notin P_n$, şi cu atât mai mult $ab \notin Q$. □

Corolar 3.14. *a) Radicalul unui ideal I este intersecţia idealelor prime care conţin pe I şi sunt minimale cu această proprietate.*

b) Pentru orice modul E şi F submodul al său, $\operatorname{Rad}_E(F)$ este intersecţie de ideale prime.

Propoziţie 3.15. *Dacă I şi J sunt două ideale astfel încât J este finit generat şi conţinut în $\operatorname{Rad}(I)$, atunci I conţine o putere a lui J.*

Demonstraţie. Fie $b_1, \dots, b_n$ un sistem de generatori ai lui J. Pentru fiecare indice $i = 1, \dots, n$ există un număr natural e_i astfel ca $b_i^{e_i} \in I$. Notăm s suma acestor exponenţi şi arătăm că $J^s \subseteq I$. Un element arbitrar $y \in J^s$ este o sumă finită de elemente de forma $x_1 \cdots x_s$, cu $x_j \in J$, iar fiecare x_j este o combinaţie liniară cu coeficienţi din A de elementele $b_1, \dots, b_n$. Prin urmare $x_1 \cdots x_s$ este suma unor termeni de forma $cb_1^{u_1} \cdots b_n^{u_n}$, unde $c \in A$ şi $u_1, \dots, u_n$ sunt numere naturale cu suma s. Pentru cel puţin un indice j avem $u_j \geq e_j$, deci toate produsele ce apar în scrierea lui $x_1 \cdots x_s$ sunt din I. □

Aplicând acest rezultat pentru I ideal arbitrar al unui inel noetherian şi $J = \operatorname{Rad}(I)$, se obţine:

Corolar 3.16. *Orice ideal al unui inel noetherian conţine o putere a radicalului său.*

Propoziţie 3.17. *Fie $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ un şir exact de A-module, F un submodul al lui E, $F'' := g(F)$ şi $F' := f^{-1}(F)$. Atunci*

$$\operatorname{Rad}_E(F) = \operatorname{Rad}_{E'}(F') \cap \operatorname{Rad}_{E''}(F'') \ .$$

Demonstraţie. Fie a un element arbitrar al intersecţiei de ideale din membrul drept. Rezultă că pentru orice $x \in E$ există numărul natural m astfel încât $g(a^m x) = a^m g(x) \in F''$. Aşadar, există $y \in F$ pentru care $a^m x - y \in E'$. Pe de altă parte, există un număr natural

t astfel ca $a^t(a^m x - y) \in F'$, deci $a^{m+t}x \in F$. Relaţia fiind valabilă pentru orice $x \in E$, conchidem că

$$\mathrm{Rad}_{E'}(F') \cap \mathrm{Rad}_{E''}(F'') \subseteq \mathrm{Rad}_E(F)\ .$$

Incluziunea contrară se verifică asemănător. □

PROPOZIŢIE 3.18. *Fie S un sistem multiplicativ închis în A, E un A-modul şi $u : A \longrightarrow S^{-1}A$, $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismele canonice.*

a) Dacă F este un A-submodul al lui E, atunci

$$S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F) \subseteq \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)\ .$$

b) Dacă F' este un $S^{-1}A$-submodul al lui $S^{-1}E$, atunci

$$u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')\big) = \mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F'))\ .$$

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $b \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$. Atunci $b = a/s$, cu $a \in \mathrm{Rad}_E(F)$ şi $s \in S$. Pentru un element arbitrar $y = e/t \in S^{-1}E$ cu $e \in E$ şi $t \in S$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n e \in F$. Prin urmare $b^n y = a^n e/s^n t \in S^{-1}F$.

b) Pentru $a \in u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')\big)$ şi $e \in E$ se găseşte $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(a^n e) = u(a)^n \cdot v(e) \in F'$, astfel că $a^n e \in v^{-1}(F')$. Cum e este arbitrar în E, se obţine $a \in \mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F'))$. Fie acum a din $\mathrm{Rad}_E(v^{-1}(F'))$ şi $e/s \in S^{-1}E$. Conform definiţiei, avem $a^n e \in v^{-1}(F')$ pentru un număr natural n convenabil. Atunci $v(a^n e) = u(a^n)v(e) = = u(a^n) \cdot e/s \cdot s/1 \in F'$, ceea ce înseamnă $a \in u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')\big)$. □

EXEMPLU. Incluziunea demonstrată la punctul a) poate fi strictă. De pildă, pentru $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{Q}$ şi $F = \mathbb{Z}$ avem $S^{-1}\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = S^{-1}\,0 = 0$, $\mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(S^{-1}\mathbb{Z}) = \mathrm{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Condiţii suficiente pentru realizarea egalităţii sunt puse în evidenţă în următoarea

PROPOZIŢIE 3.19. *Fie S un sistem multiplicativ închis din inelul A, E un A-modul şi F un submodul al său. Atunci*

$$S^{-1}\ \mathrm{Rad}_E(F) \ = \ \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$$

dacă una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:

α) E este un A-modul de tip finit,
β) din $s \in S$, $x \in E$ şi $sx \in F$ rezultă $x \in F$.

DEMONSTRAŢIE. În notaţiile din propoziţia 3.18, pentru a/s element arbitrar din $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$ şi orice e din E există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a/s)^n \cdot (e/1) \in S^{-1}F$, deci $ta^n e \in F$ pentru $t \in S$ convenabil. În cazul β) rezultă imediat $a^n e \in F$, de unde $a/s \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$.

Presupunem în continuare îndeplinită condiţia α). Considerăm e_1, …, e_r un sistem finit de generatori pentru E. Pentru fiecare indice i, $i = 1$, …, r, există $n_i \in \mathbb{N}$ şi $t_i \in S$ astfel încât $t_i a^{n_i} e_i \in F$. Luând $n := \max\{\, n_i \,:\, i = 1, \dots, r \,\}$ şi $t := \prod_{i=1}^{r} t_i$, se obţine $ta^n E \subseteq F$ şi deci $ta \in \mathrm{Rad}_E(F)$. Aşadar, $a/s = at/st \in S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$. □

În continuare arătăm că mulţimea idealelor prime ale unui inel are în mod natural o structură de spaţiu topologic. Această topologie este folosită intens în geometria algebrică.

Pentru orice ideal I al inelului comutativ şi unitar A se notează

$$\mathrm{V}(I) := \{\, P \in \text{ Spec } A \,:\, I \subseteq P \} \ .$$

Propoziţie 3.20. *Aplicaţia de la mulţimea idealelor lui A la mulţimea părţilor lui Spec (A) definită prin asocierea $I \mapsto \mathrm{V}(I)$ are următoarele proprietăţi:*

a) $\mathrm{V}(0) = \mathrm{Spec}\ A$, $\mathrm{V}(A) = \emptyset$;

b) *dacă* $I \subseteq J$, *atunci* $\mathrm{V}(J) \subseteq \mathrm{V}(I)$;

c) *pentru orice familie de ideale* $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *avem*

$$\mathrm{V}\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big) = \mathrm{V}\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}(I_\lambda) \ ;$$

d) $\mathrm{V}(I \cap J) = \mathrm{V}(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$;

e) $\mathrm{V}(I) = \emptyset$ *dacă şi numai dacă* $I = A$;

f) $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(\mathrm{Rad}\,(I))$.

Proprietăţile *a*), *c*) şi *d*) permit să se definească o topologie pe mulţimea Spec A în care mulţimile închise sunt exact mulţimile de forma $\mathrm{V}(I)$, pentru I un ideal în A. Această topologie este numită *topologia spectrală* sau *topologia lui Zariski* pe spaţiul Spec A. În continuare vom considera întotdeauna această topologie pe mulţimea idealelor prime ale inelului A.

Dacă X este o submulţime a lui Spec (A), notăm

$$\mathrm{I}(X) := \cap \{\, P \,:\, P \in X \,\} \ .$$

Evident $\mathrm{I}(X)$ este un ideal în A, $\mathrm{I}(\emptyset) = A$, iar

$$\mathrm{I}\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}(X_\lambda)$$

pentru orice familie $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de submulţimi ale lui Spec A. În particular, dacă $X \subseteq Y$, atunci $\mathrm{I}(Y) \subseteq \mathrm{I}(X)$.

Propoziţie 3.21. *Fie I ideal în A şi $X \subseteq$ Spec A. Atunci:*

a) $\mathrm{V}(I)$ *este o mulţime închisă în spaţiul topologic* Spec (A), *iar* $\mathrm{I}(X)$ *este un ideal radical al lui* A.

b) $\mathrm{I}(\mathrm{V}(I)) = \mathrm{Rad}\,(I)$, $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) = \overline{X}$*, închiderea mulţimii* X *în topologia spectrală.*

c) Aplicaţiile I *şi* V *definesc bijecţii descrescătoare, inverse una alteia, între mulţimea mulţimilor închise ale lui* Spec (A) *şi mulţimea idealelor radicale ale lui* A*.*

Demonstraţie. *a)* $\mathrm{V}(I)$ este mulţime închisă în Spec A conform definiţiei topologiei spectrale. Am văzut că pentru orice ideal I avem

$$\mathrm{Rad}(I) = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{V}(I)\,\}\ ,$$

deci

$$\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X)) = \cap\{P \,:\, \mathrm{I}(X) \subseteq P\,\}\ .$$

Cum pentru orice $Q \in X$ avem $\mathrm{I}(X) \subseteq Q$, rezultă că toate idealele din X apar printre idealele prime prin intersectarea cărora se obţine $\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X))$. Altfel spus, $\mathrm{Rad}(\mathrm{I}(X)) \subseteq \mathrm{I}(X)$.

b) Din definiţii şi din propoziţia 3.11 rezultă

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}(I)) = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{V}(I)\,\} = \mathrm{Rad}(I)\ .$$

Fie J un ideal al lui A astfel încât $X \subseteq \mathrm{V}(J)$, adică $J \subseteq P$ pentru orice $P \in X$. Atunci $J \subseteq \mathrm{I}(X)$ şi din monotonia aplicaţiei V rezultă $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) \subseteq \mathrm{V}(J)$. Pe de altă parte, $X \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$. Conchidem că $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$ este cea mai mică parte închisă a spaţiului Spec A care conţine X, adică $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) = \bar{X}$.

c) Consecinţă directă a celor demonstrate anterior. □

Exerciţii.

1. Determinaţi nilradicalul inelului de polinoame (respectiv, serii formale) într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un inel comutativ.

2. Caracterizaţi inelele în care nilradicalul este un ideal maximal (respectiv minimal).

3. Pentru orice ideale I, J, K ale unui inel A au loc egalităţile:

$$\mathrm{Rad}\,(I + JK) = \ \mathrm{Rad}\,(I + (J \cap K)) = \ \mathrm{Rad}\,(I + J) \cap \mathrm{Rad}\,(I + K)\ .$$

4. Dacă $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de mulţimi închise ale spaţiului topologic Spec A, atunci

$$\mathrm{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\Big) = \mathrm{Rad}\,\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}(X_\lambda)\Big)\ .$$

5. Dacă I şi J sunt ideale în A, arătaţi că $\mathrm{V}(I) \subseteq \mathrm{V}(J) \iff J \subseteq\ \subseteq \mathrm{Rad}\,(I) \iff \mathrm{Rad}\,(J) \subseteq \mathrm{Rad}\,(I)$.

6. Să se arate că următoarele condiţii sunt echivalente pentru un spaţiu topologic X:

(i) orice două mulţimi deschise nevide au intersecţia nevidă,

(*ii*) orice mulţime deschisă nevidă a lui X este densă în X,
(*iii*) orice mulţime deschisă a lui X este conexă,
(*iv*) orice două mulţimi închise ale lui X, ambele diferite de X, au reuniunea diferită de X.

Un spaţiu topologic X care îndeplineşte aceste condiţii este numit *ireductibil.*

7. Considerăm spaţiul Spec A înzestrat cu topologia spectrală.

a) Să se arate că o submulţime $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ este ireductibilă dacă şi numai dacă $\mathrm{I}\,(Y) \in \operatorname{Spec} A$.

b) Spec A este un spaţiu ireductibil dacă şi numai dacă singurele elemente $e \in A$ cu $e^2 = e$ sunt $e = 0$ şi $e = 1$.

3.2. Suportul unui modul. O noţiune importantă în algebra comutativă este aceea de suport al unui modul.

Definiţie 3.22. Fie E un A-modul. Mulţimea

$$\operatorname{Supp}_A E := \{\, P \in \operatorname{Spec} A \ : \ E_P \neq 0 \,\}$$

se numeşte *suportul lui E.*

Întrucât $\operatorname{Supp}_A A = \operatorname{Spec} A$, noţiunea are semnificaţie doar pentru module. Cu ajutorul suportului se pot distinge modulele nule. Principiul local-global poate fi reformulat astfel:

Lema 3.23. *Un modul este nul dacă şi numai dacă suportul său este mulţimea vidă.*

Exemplu. $\operatorname{Supp}_A (A/I) = \mathrm{V}(I)$ pentru orice ideal I al lui A.

Într-adevăr, pentru $P \in \operatorname{Spec} A$ avem echivalenţele $P \in \operatorname{Supp}_A (A/I) \iff (A/I)_P \neq 0 \iff A_P/IA_P \neq 0 \iff IA_P \neq A_P \iff I \cap (A \setminus P) = = \emptyset \iff I \subseteq P \iff P \in \mathrm{V}(I)$.

Propoziţie 3.24. *Dacă* $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ *este un şir exact de A-module, atunci* $\operatorname{Supp}_A F = \operatorname{Supp}_A E \cup \operatorname{Supp}_A G$.

Demonstraţie. Pentru orice ideal prim P avem şirul exact de A_P-module $0 \longrightarrow E_P \longrightarrow F_P \longrightarrow G_P \longrightarrow 0$, deci $F_P = 0$ dacă şi numai dacă $E_P = 0$ şi $G_P = 0$. $\square$

Propoziţie 3.25. *Dacă* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *este o familie de submodule ale unui modul E, atunci*

$$\operatorname{Supp}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Supp}\,(E_\lambda)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Cum localizarea comută cu sumele arbitrare de submodule, pentru orice ideal prim P avem $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)_P = 0$ dacă şi numai dacă $(E_\lambda)_P = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$. $\square$

COROLAR 3.26. *Dacă $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este o familie de generatori pentru A-modulul E, atunci*

$$\operatorname{Supp} E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(x_\lambda)) \ .$$

În particular, dacă E este A-modul finit generat, atunci $\operatorname{Supp} E = = \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(E))$ *este o mulţime închisă în topologia Zariski.*

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că $\operatorname{Ann}_A E = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(x_\lambda))$, iar $\mathrm{V}(I\cap J) = \mathrm{V}(I)\cup \mathrm{V}(J)$ pentru orice ideale I, J ale lui A. $\square$

LEMA 3.27. *(Lema de evitare a lui McCoy) Fie $I \le A$ şi $P_1, \ldots, P_n$ $(n \ge 2)$ o familie de ideale dintre care cel mult două nu sunt prime. Dacă I este conţinut în reuniunea idealelor $P_1, \ldots, P_n$, atunci I este conţinut într-unul din aceste ideale.*

DEMONSTRAŢIE. Raţionăm prin inducţie după n. Dacă $n = 2$ şi există $x_j \in I \setminus P_{3-j}$, $j = 1, 2$, atunci $x_j \in P_j$, deci $y := x_1 + x_2 \in \in I \subseteq P_1\cup P_2$. Rezultă că y este un element al lui P_1, să spunem, încât $x_2 = y - x_1 \in P_1$, contradicţie.

Presupunem acum că $n \ge 3$ şi că afirmaţia a fost stabilită pentru orice familie cu proprietăţile din enunţ şi de cardinal strict mai mic decât n. În plus, putem presupune $I \not\subseteq \bigcup\{\, P_j \,:\, 1 \le j \ne k \le n \,\}$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$ (în caz contrar concluzia dorită decurge din ipoteza inductivă). Alegând $x_k \in I \setminus \bigcup\{\, P_j \,:\, 1 \le j \ne k \le n \,\}$, avem $x_k \in P_k$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Cum $n \ge 3$, există cel puţin un ideal prim în familia considerată, să spunem P_1. Elementul $x_1 + x_2x_3\cdots x_n$ este din I, dar nu din P_1 (întrucât $x_1 \in P_1$, dar $x_2x_3\cdots x_n \notin P_1$) şi nici din P_k, $k \ge 2$ (deoarece $x_1 \notin P_k$ şi $x_2x_3\cdots x_n \in P_k$). $\square$

DEFINIŢIE 3.28. Pentru A inel comutativ şi unitar, intersecţia tuturor idealelor sale maximale se notează $J(A)$ şi este numită *radicalul Jacobson*. Un inel este *local* (resp. *semilocal*) dacă acest inel are un singur ideal maximal (resp. un număr finit de ideale maximale).

Folosind lema de evitare şi corespondenţa dintre idealele S-saturate ale inelului A şi idealele din $S^{-1}A$, se obţine următoarea clasă de exemple de inele semilocale:

LEMA 3.29. *Dacă $P_1, \ldots, P_n$ $(n \ge 1)$ sunt ideale prime incomparabile două câte două faţă de incluziune şi* $S := \bigcap\{\, A\setminus P_i \,:\, i = 1,\ldots,n \,\}$, *atunci* $\operatorname{Max} S^{-1}A = \{\, S^{-1}P_i \,:\, i = 1,\ldots,n \,\}$.

Elementele din radicalul Jacobson se pot identifica graţie următoarei caracterizări:

LEMA 3.30. *Fie $x \in A$. Atunci $x \in J(A)$ dacă şi numai dacă $1-ax$ este inversabil în A pentru orice $a \in A$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x \in J(A)$ şi există $a \in A$ astfel încât $y := 1 - ax$ este neinversabil, rezultă că idealul Ay este diferit de A. Conform lemei lui Krull, există un ideal maximal M ce conţine Ay. Din $x \in M$ şi $1 - ax \in M$ decurge contradicţia $1 \in M$.

Reciproc, dacă $x \notin J(A)$, înseamnă că există un ideal maximal M astfel ca $x \notin M$. Deci $M \subset M + Ax$ şi maximalitatea lui M implică $M + Ax = A$. Prin urmare, se găsesc $a \in A$ şi $b \in M$ astfel încât $1 = b + ax$, relaţie din care conchidem că $1 - ax$ este neinversabil, în contradicţie cu condiţia din enunţ. □

LEMA 3.31. *(Lema lui Nakayama) Dacă E este un A-modul finit generat şi I un ideal conţinut în radicalul Jacobson astfel încât $IE = E$, atunci E este modulul nul.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ un sistem minimal de generatori pentru E. Întrucât mulţimea numerelor naturale este bine ordonată (*i.e.* orice submulţime nevidă are un cel mai mic element), putem presupune că E nu poate fi generat de mai puţin de n elemente.

Din $x_n \in E = IE$ se obţine o reprezentare $x_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ cu $a_i \in I$ $(1 \leq i \leq n)$. Atunci $(1 - a_n)x_n = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ şi cum $1-a_n$ este inversabil (a_n fiind din $J(A)$), înseamnă că generatorul x_n este superfluu. Cum sistemul de generatori a fost ales minimal, s-a ajuns la o contradicţie. □

Acest rezultat joacă un rol important în studiul inelelor locale, dar are aplicaţii surprinzătoare şi în alte contexte. Menţionăm câteva consecinţe ale sale.

COROLAR 3.32. *Fie E un A-modul şi F un submodul cu E/F finit generat. Dacă $I \subseteq J(A)$ şi $E = IE + F$, atunci $E = F$.*

DEMONSTRAŢIE. Se foloseşte lema lui Nakayama pentru A-modulul finit generat E/F. □

COROLAR 3.33. *Fie (A, M, K) un inel local şi E un modul de tip finit. Pentru $x_1, \ldots, x_n \in E$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *$x_1, \ldots, x_n$ generează A-modulul E,*

(*ii*) *clasele $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ în E/ME generează K-spaţiul vectorial E/ME.*

Demonstraţie. Implicaţia $(i) \Longrightarrow (ii)$ este clară. Pentru reciprocă se observă că din condiţia (ii) rezultă $E = ME + Ax_1 + \cdots + Ax_n$ şi se aplică rezultatul precedent. □

Lema 3.34. *(Lema chineză a resturilor) Fie $I_1, \ldots, I_n$ $(n \geq 2)$ ideale astfel încât $I_j + I_k = A$ pentru $1 \leq j < k \leq n$. Atunci:*

a) $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = \prod_{j=1}^{n} I_j$,

b) morfismul $\pi : A \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} A/I_j$, $a \mapsto (a + I_1, \ldots, a + I_n)$, *este surjectiv şi induce un izomorfism*

$$A/\bigcap_{j=1}^{n} I_j \simeq \prod_{j=1}^{n} (A/I_j) \ .$$

Demonstraţie. $a)$ Evident, intersecţia idealelor conţine produsul lor. Incluziunea inversă se obţine prin inducţie după n. Dacă $n = 2$, atunci

$$I_1 \cap I_2 = (I_1 + I_2)(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1(I_1 \cap I_2) + I_2(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1 I_2 \ .$$

Presupunem acum $n > 2$ şi că relaţia este adevărată pentru cel mult $n - 1$ ideale comaximale două câte două. Observăm că $I_n + L = A$, unde $L := I_1 \cdots I_{n-1} = I_1 \cap \ldots \cap I_{n-1}$. Într-adevăr, din $I_n + L \neq A$ rezultă existenţa unui ideal maximal M ce conţine $I_n + L$, în particular avem $I_1 \cdots I_{n-1} \subseteq M$. Atunci M conţine un ideal I_j, $1 \leq j < n$. Cum $I_n \subseteq M$, se ajunge la contradicţia $A = I_j + I_n \subseteq M$. Conform cazului $n = 2$, avem

$$\prod_{j=1}^{n} I_j = I_n \prod_{j=1}^{n-1} I_j = I_n L = I_n \cap L = I_n \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} I_j \ .$$

$b)$ Acum arătăm că pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, există $a_k \in \bigcap_{j \neq k} I_j$ astfel încât $a_k - 1 \in I_k$. Pentru $j \neq k$ există $b_j \in I_k$ şi $c_j \in I_j$ cu suma 1. Atunci elementul $a_k := \prod_{j \neq k} c_j$ are proprietăţile dorite: evident a_k aparţine tuturor idealelor de indice diferit de k, iar $a_k - 1 = \prod_{j \neq k}(1 - b_j) - 1 \in I_k$.

Pentru $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n}(A/I_j)$ considerăm câte un reprezentant b_j pentru x_j $(1 \leq j \leq n)$ şi punem $x := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Pentru fiecare $k = 1, \ldots, n$ avem $b_k(a_k - 1) \in I_k$ şi $a_j b_j \in I_k$ pentru $1 \leq j \neq k \leq n$, deci $x - b_k \in I_k$. Altfel spus, morfismul π este surjectiv. Din definiţia produsului direct rezultă că nucleul lui π coincide cu produsul idealelor I_k, care nu este altceva decât intersecţia lor conform punctului a). Demonstraţia se încheie aplicând teorema fundamentală de izomorfism pentru inele. $\square$

PROPOZIŢIE 3.35. *Dacă E şi F sunt module finit generate peste inelul noetherian A, atunci* $\operatorname{Supp}(E \otimes_A F) = \operatorname{Supp} E \cap \operatorname{Supp} F$.

DEMONSTRAŢIE. Primul pas constă în reducerea la cazul local. Aici este simplu datorită comutării localizării cu tensorizarea:

$$(E \otimes_A F)_P \simeq E_P \otimes_{A_P} F_P \quad \text{pentru orice } P \in \operatorname{Spec} A\ .$$

Apoi se aplică următorul rezultat. $\square$

LEMA 3.36. *Dacă E şi F sunt module nenule de tip finit peste un inel local noetherian (A, M, K), atunci $E \otimes_A F \neq 0$.*

DEMONSTRAŢIE. Pornim de la o prezentare $F \simeq A^n/G$ cu n un număr natural şi cu G un submodul al lui A^n. Imaginile lui G prin proiecţiile canonice ale lui A^n pe sumanzii săi direcţi sunt submodule ale lui A, adică ideale. Nu se poate ca toate aceste ideale să coincidă cu A, pentru că atunci ar rezulta $F = 0$. Obţinem prin urmare un morfism surjectiv $F \longrightarrow A/I$ cu I ideal diferit de întreg inelul. Morfismul $E \otimes_A F \longrightarrow E/IE$ indus prin tensorizare cu E este încă surjectiv. Dacă sursa sa ar fi modulul nul, atunci ar rezulta $E = IE$, ceea ce, conform lemei lui Nakayama, ar conduce la concluzia $E = 0$, în contradicţie cu ipoteza. $\square$

3.3. Ideale prime asociate unui modul.

DEFINIŢIE 3.37. Fie A un inel şi E un A-modul. Un ideal prim P din A se numeşte *asociat lui E* dacă există $x \in E$ astfel încât $P = \operatorname{Ann}_A x$. Mulţimea idealelor prime asociate lui E se notează $\operatorname{Ass}_A E$. O denumire alternativă, uşor macabră şi paradoxală, este *asasin* al modulului E. Dacă F este un submodul al lui E, un element din $\operatorname{Ass}_A(E/F)$ se numeşte *ideal prim asociat lui F în E* sau *divizor prim al lui F în E*.

Observăm că orice ideal prim asociat unui modul conţine anulatorul acelui modul, iar $\operatorname{Ass} E$ coincide cu mulţimea formată din $P \in \operatorname{Spec} A$ pentru care există un submodul al lui E izomorf cu A/P.

LEMA 3.38. *Pentru orice $P \in \operatorname{Spec} A$ şi $x \in A/P$, $x \neq 0$, avem* $\operatorname{Ann} x = P$, *deci* $\operatorname{Ass}_A(A/P) = \{P\}$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x = a + P$, cu $a \in A \setminus P$, atunci $bx = 0$ dacă şi numai dacă $ab \in P$. Cum a nu aparţine idealului prim P, această relaţie este echivalentă cu $b \in P$. $\square$

Exemplu. Pentru A inelul de polinoame în variabilele X şi Y peste un corp K şi $I := (X^2, XY)$, avem $P := (X, Y) \in \mathrm{Ass}_A\,(A/I)$, $Q := (X) \in \mathrm{Ass}_A\,(A/I)$ şi $Q \subset P$. Într-adevăr, se verifică uşor relaţiile $P = (I : (X))_A$ şi $Q = (I : (Y))_A$.

Lema 3.39. *Pentru orice A-modul E avem*

$$\cap\{\, P \;:\; P \in \mathrm{Ass}_A\, E \,\} \supseteq \mathrm{Rad}_E\,(0) \cup \mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}_A\, E)\ .$$

Demonstraţie. Fie P un ideal prim asociat lui E şi $x \in E$ astfel încât $P = \mathrm{Ann}\ x$. Pentru orice $a \in \mathrm{Rad}_E\,(0)$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n x = 0$, adică $a^n \in \mathrm{Ann}\ x = P$. Rezultă $\mathrm{Rad}_E\,(0) \subseteq P$ pentru orice $P \in \mathrm{Ass}\ E$.

Deoarece orice ideal prim este radical, relaţia

$$\mathrm{Ann}\ E = \cap\,\{\, \mathrm{Ann}\ y \;:\; y \in E \,\} \subseteq \mathrm{Ann}\ x$$

implică $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}\ E) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}\ x) = P$. □

Problema existenţei unor ideale prime asociate unui modul dat are un răspuns clar.

Lema 3.40. *Fie E un modul peste un inel noetherian A. Atunci E este modulul nul dacă şi numai dacă $\mathrm{Ass}_A\, E$ este mulţimea vidă.*

Demonstraţie. Dacă modulul E este nenul, atunci mulţimea de ideale $\{\, \mathrm{Ann}\ x \;:\; x \in E, x \neq 0 \,\}$ este nevidă. În conformitate cu condiţia (MAX), această mulţime are un element maximal P. Vom arăta că P este ideal prim.

Fie $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $P = \mathrm{Ann}\ x$ şi a, $b \in A$ cu $b \notin P$, dar $ab \in P$. Relaţiile $abx = 0$, $bx \neq 0$ arată că $a \in \mathrm{Ann}\ (bx)$. Considerând a un element arbitrar al idealului P, conchidem că P este conţinut în anulatorul elementului nenul bx al lui E. Datorită maximalităţii lui P rezultă $P = \mathrm{Ann}\ (bx)$. Acum este limpede că din $abx = 0$ şi $bx \neq 0$ rezultă $a \in P$. □

Exemplu. Ipoteza noetherianităţii inelului este esenţială. Să considerăm, de pildă, idealul I generat în inelul $A := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ de pătratele variabilelor şi $E := A/I$. Atunci $\mathrm{Ass}_A\, E = \emptyset$. Într-adevăr, se verifică uşor că singurul ideal prim ce conţine I este idealul generat de variabile. Pentru orice $f \in A/I$ se găseşte un reprezentant dintr-un inel de polinoame într-un număr finit de nedeterminate. Anulatorul acestui reprezentant este conţinut în acelaşi subinel.

Elementele conţinute în idealele asociate unui modul au o proprietate introdusă în următoarea definiţie.

DEFINIŢIE 3.41. Un element $a \in A$ se numeşte *divizor al lui zero în* E dacă există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $ax = 0$. Un element este *regulat pe* E dacă nu este divizor al lui zero pe E.

Mulţimea formată din toţi divizorii lui zero pe un modul E este notată $\mathrm{Z}(E)$.

PROPOZIŢIE 3.42. *Dacă A este inel noetherian, atunci reuniunea primelor asociate unui modul E coincide cu mulţimea divizorilor lui zero pe E.*

DEMONSTRAŢIE. Este evident că elementele din orice ideal prim asociat lui E sunt divizori ai lui zero pe E. Reciproc, fie $ax = 0$, unde $a \in A$ şi $x \in E$, $x \neq 0$. Din lema precedentă ştim $\mathrm{Ass}_A(Ax) \neq \emptyset$, deci există $b \in A$ şi $P \in \mathrm{Spec}\ A$ astfel încât $P = \mathrm{Ann}\ (bx)$. Cum $abx = 0$, deducem $a \in P$. $\square$

PROPOZIŢIE 3.43. *Fie A inel noetherian. Pentru orice submodul F al lui E avem*

$$\mathrm{Ass}\,(F) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E) \subseteq \mathrm{Ass}\,(F) \cup \mathrm{Ass}\,(E/F)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Incluziunea din stânga este evidentă: anulatorul unui element x din F nu se modifică dacă vom considera x ca element al lui E. Fie $P \in \mathrm{Ass}\ (E) \setminus \mathrm{Ass}\ (F)$ şi $x \in E$ astfel ca $P = \mathrm{Ann}\ x$. Cum $Ax \simeq A/P$, din lema 3.38 rezultă $\mathrm{Ass}\ (Ax) = \{\, P \,\}$. Conform alegerii lui P avem $Ax \cap F = 0$. Atunci imaginea lui Ax prin morfismul canonic $E \longrightarrow E/F$ este un submodul al lui E/F izomorf cu A/P. În virtutea primei incluziuni, $\{\, P \,\} = \mathrm{Ass}_A\,(A/P) \subseteq \mathrm{Ass}_A\,(E/F)$. $\square$

EXEMPLU. Incluziunile nu sunt totdeauna egalităţi.

Fie K un corp, $A := K[X, Y]$ şi şirul exact de A-module

$$0 \longrightarrow (X)/(X^2, XY) \longrightarrow A/(X^2, XY) \longrightarrow A/(X) \longrightarrow 0\ .$$

Din lema 3.38 şi faptul că A-modulul $(X)/(X^2, XY)$ este izomorf cu $A/(X, Y) \simeq K$ rezultă

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}_A\,((X)/(X^2, XY)) &= \{\,(X, Y)\,\} \subseteq \mathrm{Ass}_A\,(A/(X^2, XY)) \subseteq \\ &\subseteq \{\,(X, Y)\,\} \cup \{\,(X)\,\}\ .\end{aligned}$$

În acest caz prima dintre incluziunile de la propoziţia 3.43 este strictă.

Pentru a ne convinge că este posibil ca a doua incluziune să nu fie egalitate, este suficient să considerăm şirul exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow 9\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. În acest caz este simplu de văzut $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}) = \mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(9\mathbb{Z}) = \{\,0\,\}$, $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) = \{\,3\mathbb{Z}\,\}$.

Alte proprietăţi ale asasinului unui modul sunt date în următoarea

PROPOZIŢIE 3.44. *a) Dacă* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *este o familie de submodule ale lui* E *a căror reuniune este* E*, atunci*

$$\mathrm{Ass}\,\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ass}\,(E_\lambda)\ .$$

b) Două module izomorfe au aceleaşi prime asociate.

c) Dacă $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *este o familie de submodule ale lui* E*, atunci*

$$\mathrm{Ass}\,\big(\oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ass}\,(E_\lambda)\ .$$

d) Dacă $E_1,\ \dots,\ E_n$ $(n \geq 1)$ *sunt submodule ale lui* E *a căror intersecţie este modulul nul, atunci*

$$\mathrm{Ass}\ (E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}\,(E/E_i)\ .$$

DEMONSTRAŢIE. a) Consecinţă directă a definiţiilor.

b) Rezultă din faptul că anulatorul oricărui element dintr-un modul coincide cu anulatorul elementului corespunzător din celălalt modul.

c) Cu ajutorul relaţiei de la punctul a) ne reducem la cazul în care Λ este o mulţime finită, când se raţionează prin inducţie. Pasul iniţial al raţionamentului inductiv (Λ are doar două elemente) este consecinţă a propoziţiei precedente:

$$\mathrm{Ass}\,(E_i) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E_1 \oplus E_2) \subseteq \mathrm{Ass}\,(E_1) \cup \mathrm{Ass}\,(E_2)\ ,\ i = 1, 2\ .$$

Când sunt $n \geq 3$ submodule, se raţionează asemănător.

d) Ipoteza asigură injectivitatea compunerii aplicaţiilor canonice

$$E \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(E/E_i) \simeq \oplus_{i=1}^{n}(E/E_i)\ .$$

Se aplică proprietatea de la punctul c) şi propoziţia 3.43. $\square$

EXEMPLU. Incluziunea de la punctul d) nu este valabilă pentru o familie infinită de submodule: când p parcurge numerele naturale prime avem $\bigcap_p p\mathbb{Z} = 0$, $\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}) = \{\,0\,\}$, în vreme ce

$$\mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\big(\oplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big) = \bigcup_p \mathrm{Ass}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}\ .$$

În continuare vom studia comportarea asasinului la luarea fracţiilor.

PROPOZIŢIE 3.45. *Fie* E *un modul peste un inel noetherian* A *şi* S *un sistem multiplicativ închis din* A*. Atunci*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}\,(S^{-1}E) = \{\,S^{-1}P\ :\ P \in \mathrm{Ass}_A\,(E)\ ,\ P \cap S = \emptyset\,\}\ .$$

Demonstraţie. Pentru $P \in \mathrm{Ass}_A(E)$ disjunct de S există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $P = \mathrm{Ann}_A\, x$. Observăm că $x/1$ este element nenul în $S^{-1}E$ întrucât $S \cap P = \emptyset$. Cum $S^{-1}P$ rămâne ideal prim în inelul de fracţii şi $S^{-1}P = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(x/1)$, avem $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}E)$.

Reciproc, fie $P \in \mathrm{Spec}\, A$ astfel ca P să fie disjunct de S şi $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}E)$. Să presupunem $S^{-1}P = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(x/t)$ pentru x în E şi $t \in S$. Fie $a_1, \ldots, a_n$ un sistem de generatori ai lui P. Din relaţiile $a_i/1 \cdot x/t = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că există $s_i \in S$ astfel încât $a_i s_i x = 0$. Atunci $s := s_1 s_2 \cdots s_n \in S$ şi $P \subseteq \mathrm{Ann}_A(sx)$. Pentru $b \in \mathrm{Ann}_A(sx)$ arbitrar, din $bsx/t = 0$ rezultă $bs/1 \in \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(x/t) = S^{-1}P$. Cum s nu aparţine lui P, se deduce $b \in P$. Avem, aşadar, $P = \mathrm{Ann}_A(sx) \subseteq \mathrm{Ass}_A(E)$. □

Există o strânsă legătură între asasinul şi suportul unui modul.

Propoziţie 3.46. *Dacă E este modul peste un inel noetherian A, atunci* $\mathrm{Supp}\, E = \cup\{\, \mathrm{V}(P) \,:\, P \in \mathrm{Ass}(E)\,\}$. *În particular,* $\mathrm{Ass}(E) \subseteq \mathrm{Supp}\, E$ *şi cele două mulţimi au aceleaşi elemente minimale. Aşadar,* $\mathrm{Min}\, E \subseteq \mathrm{Ass}(E)$.

Demonstraţie. Fie $P \in \mathrm{Ass}\,(E)$ şi $Q \in \mathrm{V}(P)$, adică Q este un ideal prim din A şi $Q \supseteq P$. Din relaţia $P \cap (A \setminus Q) = \emptyset$ şi din propoziţia precedentă rezultă $PA_Q \in \mathrm{Ass}_{A_Q}(E_Q)$. Lema 3.40 implică E_Q este modul nenul, ceea ce înseamnă că idealul prim Q aparţine suportului lui E.

Fie acum $Q \in \mathrm{Supp}\,(E)$. Cum E_Q este modul nenul peste inelul noetherian A_Q, din lema 3.40 se deduce $\mathrm{Ass}_{A_Q}(E_Q) \neq \emptyset$. Din propoziţia precedentă rezultă existenţa unui ideal prim P asociat lui E disjunct de $A \setminus Q$, ceea ce înseamnă $Q \in \mathrm{V}(P)$. □

Propoziţie 3.47. *Fie E un modul nenul şi finit generat peste un inel noetherian A. Atunci există un lanţ de submodule*

$$E = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n = 0$$

astfel încât $E_{i-1}/E_i \simeq A/P_i$ cu $P_i \in \mathrm{Spec}\, A$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. În plus $\mathrm{Ass}\,(E) \subseteq \{\, P_1, P_2, \ldots, P_n \,\} \subseteq \mathrm{Supp}\, E$, *iar cele trei mulţimi au aceleaşi elemente minimale, care coincid cu elementele minimale din* $\mathrm{V}(\mathrm{Ann}_A(E))$.

Demonstraţie. Conform lemei 3.40, E conţine un submodul izomorf cu A/P, unde P este un ideal prim asociat lui E. Aceasta înseamnă că mulţimea $\mathcal{L}$ a submodulelor nenule ale lui E care îndeplinesc concluzia propoziţiei este nevidă. Cum E este modul noetherian, mulţimea $\mathcal{L}$ are un element F maximal faţă de incluziune.

Dacă $F \neq E$, atunci E/F conţine un submodul de forma A/P, cu $P \in \operatorname{Spec} A$. Preimaginea sa F' în F prin morfismul canonic de la E la E/F este un element din $\mathcal{L}$ care conţine strict F, ceea ce contrazice maximalitatea lui F. S-a obţinut $E \in \mathcal{L}$.

Prin aplicarea repetată a propoziţiei 3.43 se găseşte că Ass (E) este conţinut în mulţimea $\{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$. Pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, avem

$$P_i \in \operatorname{Supp}_A(A/P_i) = \operatorname{Supp}_A(E_{i-1}/E_i) \subseteq \operatorname{Supp}_A(E) = \mathrm{V}(\operatorname{Ann}_A(E)) \ .$$

Ultima afirmaţie rezultă din faptul că Ass (E) şi Supp E au aceleaşi elemente minimale. □

Exerciţii.

1. Fie A un inel şi $a \in A$. Să se arate că a este nilpotent dacă şi numai dacă este divizor al lui zero pe orice A-modul.

2. Să se decidă dacă următoarele proprietăţi sunt sau nu echivalente pentru orice modul E de tip finit peste un inel noetherian A:

   (i) E este modul de lungime finită,

   (ii) Ass $E =$ Supp E.

3. Fie A inel noetherian, E un A-modul, F submodul şi P un divizor prim al lui F în E. Să se arate că dacă P nu conţine $\operatorname{Ann}_A(F)$, atunci P este asociat lui E.

4. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A. Să se arate că pentru orice A-modul F avem

$$\operatorname{Ass}_A\big(\operatorname{Hom}_A(E, F)\big) = \operatorname{Ass}_A(F) \cap \operatorname{Supp}_A(E) \ .$$

5. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A. Dacă un ideal I constă numai din divizori ai lui zero pe E, atunci există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel ca $I \subseteq \operatorname{Ann} x$.

6. Dacă un ideal al unui inel noetherian conţine un element regulat, acel ideal este generat de elementele regulate pe care le conţine. Este această proprietatea îndeplinită în orice inel?

3.4. Submodule primare. În restul secţiunii A va fi un inel noetherian.

Definiţie 3.48. Fie E un A-modul şi F un submodul. Se spune că F este *submodul primar al lui* E dacă $\operatorname{Ass}_A(E/F)$ constă dintr-un singur element. Dacă $\operatorname{Ass}_A(E/F) = \{ P \}$, se spune că F este P-primar.

Proprietatea consemnată în lema următoare va fi frecvent invocată în raţionamente referitoare la submodule primare.

Lema 3.49. *Fie A un inel noetherian, E un modul finit generat şi F un submodul P-primar. Atunci* $\operatorname{Rad}_A(\operatorname{Ann}_A(E/F)) = P$.

Demonstraţie. Idealele prime asociate unui modul sunt conţinute în suportul modulului. În plus, $\mathrm{Ass}_A(E/F)$ şi $\mathrm{Supp}_A(E/F)$ au aceleaşi elemente minimale. Pentru că F este submodul P-primar al lui E, avem $\mathrm{Ass}_A(E/F) = \{ P \}$, iar $\mathrm{Supp}_A(E/F) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_A(E/F))$ pentru că E/F este modul de tip finit. Concluzia rezultă din faptul că radicalul unui ideal coincide cu intersecţia primelor sale minimale. □

Următorul rezultat dă o caracterizare a submodulelor primare.

Propoziţie 3.50. *Fie A un inel noetherian, E un modul finit generat şi F un submodul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *F este submodul primar al lui E,*
(*ii*) *orice divizor al lui zero pe E/F este nilpotent,*
(*iii*) *dacă $a \in A$ şi $x \in E$ sunt astfel încât $ax \in F$, rezultă că $a \in \mathrm{Rad}_E(F)$ sau $x \in F$.*

Demonstraţie. Este evidentă echivalenţa condiţiilor (*ii*) şi (*iii*). Dacă F este P-primar, atunci $\mathrm{Z}(E/F) = P$ şi $\mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}_A(E/F)) = P$. Astfel se obţine că (*i*) implică (*ii*).

Să presupunem că afirmaţia (*ii*) este îndeplinită. De aici şi din propoziţiile 3.11 şi 3.42 rezultă

$$\cup\{P : P \in \mathrm{Ass}\ (E/F)\} = \mathrm{Z}(E/F) = \mathrm{N}(E/F) = \cap\{P : P \in \mathrm{Ass}\ (E/F)\}.$$

Egalitatea termenilor extremi în acest şir de egalităţi poate avea loc doar dacă $\mathrm{Ass}\ (E/F)$ constă dintr-un singur element. Conform definiţiei, aceasta înseamnă că F este submodul primar al lui E. □

Lema 3.51. *Intersecţia unei familii finite de submodule P-primare ale lui E este un submodul P-primar.*

Demonstraţie. Este suficient să stabilim această proprietate pentru două submodule P-primare, să spunem F şi G. Considerăm şirul exact de A-module

$$0 \longrightarrow F/(F \cap G) \longrightarrow E/(F \cap G) \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

în care $F/(F \cap G) \simeq (F + G)/G$. Concluzia dorită rezultă din faptul că $\mathrm{Ass}\ (E/(F \cap G))$ este o submulţime nevidă a mulţimii

$$\mathrm{Ass}\ (F/(F \cap G)) \cup \mathrm{Ass}\ (E/F) \subseteq \mathrm{Ass}\ (E/G) \cup \mathrm{Ass}\ (E/F) = \{ P \}\ .$$

□

Definiţie 3.52. Un submodul $F \subset E$ se numeşte *ireductibil în E* dacă satisface condiţia: pentru orice submodule E_1, E_2 ale lui E astfel încât $F = E_1 \cap E_2$, avem $F = E_1$ sau $F = E_2$.

Este evident că F este ireductibil în E dacă şi numai dacă submodulul nul este ireductibil în E/F.

LEMA 3.53. *Dacă F este un submodul ireductibil în E, atunci F este submodul primar al lui E.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă Ass (E/F) ar conţine două ideale prime distincte P_1 şi P_2, atunci E/F ar conţine submodule $U_1 \simeq A/P_1$ şi $U_2 \simeq A/P_2$. Observăm că $U_1 \cap U_2 = 0$ întrucât orice element nenul al lui U_i are anulatorul P_i. Cum submodulul nul al lui E/F este ireductibil, rezultă $U_1 = 0$ sau $U_2 = 0$, ceea ce este imposibil. Aşadar, Ass (E/F) constă dintr-un singur ideal prim. □

EXEMPLE. 1. Orice ideal prim P al unui inel noetherian este ideal P-primar (conform lemei 3.38).

2. Dacă F este un submodul al lui E cu $M := \mathrm{Rad}_E(F)$ ideal maximal, atunci F este submodul M-primar al lui E. În particular, orice putere a unui ideal maximal este ideal primar. De asemenea, dacă în A există un singur ideal prim, atunci orice submodul propriu al unui A-modul arbitrar este primar.

Într-adevăr, să considerăm $a \in A$ şi $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Dacă $a \notin \mathrm{Rad}_E(F) = M \in \mathrm{Max}\ A$, atunci $M + aA = A$. Prin urmare există $b \in M$ şi $c \in A$ astfel ca $1 = b + ac$. Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $b^n x \in F$. Ridicând la puterea n relaţia $1 = b + ac$, se obţine $1 = b^n + ad$, unde $d \in A$. Înmulţind această relaţie cu x, rezultă $x = b^n x + d(ax) \in F$.

3. Într-un inel principal, idealele primare sunt 0 şi idealele generate de puteri de elemente prime.

Dacă p este un element prim în inelul principal A şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $p^n A$ este ideal primar întrucât $\mathrm{Rad}_A(p^n A) = pA$ şi din $ab \in p^n A$ cu a, $b \in A$ rezultă $a \in pA$ sau $b \in p^n A$ pentru că A este inel factorial. Reciproc, fie aA un ideal nenul şi $a = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ descompunerea în factori primi distincţi a generatorului său. Dacă $t > 1$, relaţiile $p_1^{e_1}(p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}) \in aA$, $p_1^{e_1} \notin \mathrm{Rad}_A(aA) = p_1 p_2 \cdots p_t A$ şi $p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t} \notin aA$ arată că aA nu este ideal primar.

4. Nu orice ideal primar este putere de ideal prim.

Fie K un corp, $A := K[X, Y]$ şi $I := (X^2, Y)A \leq A$. Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}_A(I) &= \mathrm{Rad}_A(X^2 A + YA) = \mathrm{Rad}_A(\mathrm{Rad}_A(X^2 A) + \mathrm{Rad}_A(YA)) = \\ &= \mathrm{Rad}_A(XA + YA) = (X, Y)A =: M \in \mathrm{Max}\ A\ ,\end{aligned}$$

deci I este M-primar. Cum $Y \in I \setminus M^2$, $X \in M \setminus I$, există incluziuni stricte $M^2 \subset I \subset M$.

5. O putere a unui ideal prim nu este neapărat ideal primar.

Fie K un corp, $A := K[X,Y,Z]/(XY - Z^2) = K[x,y,z]$ şi idealul $P := (x,z)A$. Deoarece $A/P \simeq K[Y]$, avem $P \in \operatorname{Spec} A$. Relaţiile $xy = z^2 \in P^2$, $x \notin P^2$ şi $y \notin \operatorname{Rad}_A(P^2) = P$ arată că P^2 nu este ideal primar. Să dovedim $x \notin P^2$. În caz contrar am avea

$$X \in (X^2, XZ, Z^2, XY - Z^2)K[X,Y,Z] = (X^2, XZ, XY, Z^2)K[X,Y,Z]\,,$$

adică ar exista polinoame f_1, f_2, f_3, $f_4 \in K[X,Y,Z]$ astfel încât $X = X^2 f_1 + XY f_2 + f_3 XZ + f_4 Z^2$. Înlocuind în această relaţie Y şi Z cu 0, se obţine $X = X^2 f_1(X,0,0)$, egalitate ce nu poate avea loc (consideraţi gradele polinoamelor din cei doi membri). Analog se justifică relaţia $y \notin P$.

În continuare studiem comportarea submodulelor primare la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

Lema 3.54. *Fie F un submodul P-primar în modulul finit generat E. Pentru orice ideal I din A astfel încât $(F:I)_E \neq E$, submodulul $(F:I)_E$ este P-primar în E.*

Demonstraţie. Fie $x \in E$ şi $b \in A \setminus \operatorname{Rad}_E((F:I)_E)$ astfel ca $bx \in (F:I)_E$. Atunci $abx \in F$ pentru orice $a \in I$ şi cum $\operatorname{Rad}_E(F) \subseteq$ $\subseteq \operatorname{Rad}_E((F:I)_E)$, rezultă $ax \in F$, adică $x \in (F:I)_E$. $\square$

Lema 3.55. *Fie E un modul de tip finit şi F un submodul P-primar al lui E. Atunci $(F:E)_A$ este ideal P-primar.*

Demonstraţie. Conform lemei 3.49, $\operatorname{Rad}_A((F:E)_A) = P$. Fie a, $b \in A$ astfel încât $ab \in (F:E)_A$. Dacă $a \notin P$, atunci $abx \in F$ pentru orice $x \in E$ şi, întrucât F este P-primar, rezultă $bx \in F$. Conchidem $b \in (F:E)_A$. $\square$

Propoziţie 3.56. *Fie $g : E \longrightarrow E''$ un morfism surjectiv de A-module. Un submodul F al lui E care conţine nucleul lui g este submodul P-primar al lui E dacă şi numai dacă $F'' := g(F)$ este submodul P-primar în E''.*

Demonstraţie. Se observă că $\operatorname{Rad}_E(F) = \operatorname{Rad}_{E''}(F'')$. Apoi se stabileşte că pentru orice $a \in A$ şi $x \in E$, apartenenţa $ax \in F$ este echivalentă cu $ag(x) \in F''$, iar $x \in F$ dacă şi numai dacă $g(x) \in F''$. $\square$

Propoziţie 3.57. *Fie S un sistem multiplicativ închis în inelul A şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic.*

a) Dacă F este submodul P-primar în E şi $P \cap S = \emptyset$, atunci $S^{-1}F$ este submodul $S^{-1}P$-primar al lui $S^{-1}E$, iar $v^{-1}(S^{-1}F) = F$.

b) Dacă F este submodul P-primar în E şi $P \cap S \neq \emptyset$, atunci $S^{-1}F = S^{-1}E$.

c) Dacă F' este submodul primar al $S^{-1}A$-modulului $S^{-1}E$, atunci $v^{-1}(F')$ este submodul primar al A-modulului E.

DEMONSTRAŢIE. *a*) Prima afirmaţie rezultă din comportarea asasinului la localizare. Pentru ultima parte, reamintim că

$$v^{-1}(S^{-1}F) = \{\, x \in E \,:\, \text{există } s \in S \text{ astfel încât } sx \in F \,\}$$

şi că P este mulţimea divizorilor lui zero pe E/F.

b) Fie $s \in S \cap P$. Pentru orice $x \in E$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $s^n x \in F$, deci $s^n v(x) \in v(F)$, încât $v(x) \in S^{-1}F$.

c) Notăm $F := v^{-1}(F')$ şi $u : A \longrightarrow S^{-1}A$ morfismul canonic. Deoarece F' este modul primar, $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')$ este un ideal prim în $S^{-1}A$. Din ipoteza că elementele lui S sunt nondivizori ai lui zero pe E/F şi din propoziţia 3.19 rezultă $\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F') = S^{-1}\mathrm{Rad}_E(F)$ şi $u^{-1}\big(\mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')\big) = \mathrm{Rad}_E(F)$. Fie $a \in A \backslash \mathrm{Rad}_E(F)$ şi $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Atunci $u(a)v(x) \in F'$ şi $u(a) \notin \mathrm{Rad}_{S^{-1}E}(F')$, deci $v(x)$ aparţine lui F'. Prin urmare $x \in v^{-1}(F') = F$. □

DEFINIŢIE 3.58. Un submodul F al lui E are o *descompunere primară* dacă există submodulele primare $F_1, \ldots, F_n$ ($n \geq 1$) ale lui E astfel încât $F = F_1 \cap \ldots \cap F_n$. O astfel de descompunere primară este numită *redusă* dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

a) Dacă F_i este P_i-primar, atunci $P_i \neq P_j$ pentru $1 \leq i < j \leq n$.

b) $\cap\{\, F_j \,:\, j \neq i \,\} \not\subseteq F_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

Submodulele F_i ce apar într-o descompunere primară redusă a lui F se numesc *componentele primare ale lui F*.

Cum inelul A este presupus noetherian, din orice descompunere primară a lui F se obţine o descompunere primară redusă astfel: înlocuind toate submodulele primare F_i care au acelaşi radical prin intersecţia lor se asigură satisfacerea condiţiei *a*) (*cf.* lema 3.51), iar pentru a obţine *b*) se omit modulele superflue (care conţin intersecţia celorlalte).

Existenţa descompunerilor primare este asigurată în condiţii destul de generale:

TEOREMA 3.59. *Orice submodul al unui modul E de tip finit peste un inel noetherian A are o descompunere primară.*

DEMONSTRAŢIE. Conform lemei 3.53, este suficient să arătăm că F este intersecţia unei familii finite de submodule ireductibile în E. În caz contrar, din condiţia maximală pe modulul noetherian E rezultă că există un submodul F, maximal cu proprietatea că nu este intersecţia unui număr finit de submodule ireductibile. În particular, acest F nu este ireductibil, deci coincide cu intersecţia a două submodule F_1 şi F_2

ale lui E care conţin strict F. Din alegerea lui F rezultă că fiecare F_i este intersecţia unei familii finite de submodule ireductibile. Aceeaşi proprietate o are şi $F_1 \cap F_2 = F$, contradicţie. □

Folosind un alt raţionament, se poate arăta că rezultatul se menţine pentru module noetheriene peste inele arbitrare.

După ce am tranşat chestiunea existenţei unei descompuneri primare, se pune problema unicităţii sale.

TEOREMA 3.60. *Fie A inel noetherian, E un A-modul şi $F \subset E$ un submodul ce admite o descompunere primară redusă $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n$, $n > 1$, cu F_i submodul P_i-primar în E. Atunci:*

a) $\mathrm{Ass}\,(E/F) = \{\, P_1, \ldots, P_n \,\}$.

b) Dacă P_i ($1 \leq i \leq n$) este minimal în $\mathrm{Ass}\,(E/F)$, *$S = A \setminus P_i$ şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ este morfismul canonic, atunci $F_i = v^{-1}(v(F))$.*
Aşadar, componenta primară a lui F corespunzătoare unui prim asociat minimal este unic determinată de E şi F.

DEMONSTRAŢIE. *a)* Notăm $Q_i := \cap\{\, F_j \,:\, j \neq i \,\}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Atunci $F = F_i \cap Q_i$ şi $F \neq Q_i$. Din $Q_i/F \simeq (Q_i + F_i)/F_i \subseteq E/F_i$ rezultă

$$\emptyset \neq \mathrm{Ass}(Q_i/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/F_i) = \{\, P_i \,\}\ ,$$

ceea ce împreună cu $\mathrm{Ass}(Q_i/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/F)$ implică $\{\, P_1, \ldots, P_n \,\} \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Ass}(E/F)$.

Pentru a demonstra incluziunea reciprocă folosim un raţionament prin inducţie după n. Cazul $n = 1$ nu necesită justificare. Fie $n > 1$ şi presupunem că egalitatea *a)* este valabilă pentru toate submodulele lui E cu cel mult $n - 1$ componente primare. Cum Q_i are o astfel de descompunere primară redusă, din ipoteza de inducţie rezultă $\mathrm{Ass}(E/Q_i) = \{\, P_j \,:\, 1 \leq j \neq i \leq n \,\}$. Izomorfismul existent între E/Q_i şi $(E/F)/(Q_i/F)$ implică

$$\mathrm{Ass}(E/F) \subseteq \mathrm{Ass}(E/Q_i) \cup \mathrm{Ass}(Q_i/F) = \{P_1, \ldots, P_n\,\}\ .$$

b) Din minimalitatea lui P_i în $\mathrm{Ass}(E/F)$ rezultă $S \cap P_j \neq \emptyset$ pentru $j \neq i$. Propoziţia 3.57 asigură $v(F) = S^{-1}F = S^{-1}F_i = v(F_i)$ şi prin urmare $F_i = v^{-1}(v(F_i)) = v^{-1}(v(F))$. □

Dacă F_i este o componentă primară a lui F al cărei radical nu este element minimal în $\mathrm{Ass}(E/F)$, se spune că F_i este *componentă primară scufundată* a lui F. În general, componentele primare scufundate nu sunt unic determinate.

EXEMPLU. În inelul de polinoame $K[X, Y]$ peste un corp K avem $I := (X^2, XY) = (X) \cap (X^2, Y)$. Cum (X) este ideal prim, iar (X^2, Y) este primar (având radicalul $M := (X, Y)$ ideal maximal), s-a găsit o descompunere primară redusă. Raţionând analog, se vede că $(X^2, XY) = (X) \cap (X^2, X+Y)$ este o altă descompunere primară redusă a lui I. Idealul M-primar $(X^2, X+Y)$ nu coincide cu (X^2, Y) întrucât ultimul ideal nu conţine $X+Y$.

Ca aplicaţie a descompunerii primare, prezentăm un rezultat celebru al lui Krull, pentru a cărui demonstraţie avem nevoie de următorul rezultat:

LEMA 3.61. *Fie I un ideal al unui inel noetherian şi $J := \bigcap_{n\geq 1} I^n$. Atunci $I \cdot J = J$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $I = A$, nu avem nimic de demonstrat. Fie deci $I \neq A$. Din $I \cdot J \subseteq I \subset A$ rezultă că idealul $I \cdot J$ are o descompunere primară de forma

$$I \cdot J = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i, \quad Q_i \quad \text{ideal } P_i\text{-primar} .$$

Pentru acei indici i, $1 \leq i \leq r$, pentru care $I \subseteq P_i$ se consideră $e_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $P_i^{e_i} \subseteq Q_i$ şi se deduce $J \subseteq I^{e_i} \subseteq P_i^{e_i} \subseteq Q_i$. Pentru ceilalţi indici i există $a_i \in I \setminus P_i$ şi cum idealul $a_i J$ este conţinut în idealul P_i-primar Q_i, rezultă $J \subseteq Q_i$. Aşadar, $J \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} Q_i = I \cdot J$. Pe de altă parte, întotdeauna produsul unor ideale este conţinut în intersecţia lor. $\square$

TEOREMA 3.62. *(Teorema de intersecţie a lui Krull) Fie A un inel noetherian, I un ideal şi E un A-modul noetherian. Atunci $\bigcap_{n\geq 1} I^n E$ coincide cu mulţimea elementelor din E al căror anulator conţine un element de forma $1-a$, cu $a \in I$. În cazul în care I este conţinut în radicalul Jacobson al inelului, avem $\bigcap_{n\geq 1} I^n E = 0$.*

DEMONSTRAŢIE. Este clar că pentru $x \in E$ şi $a \in I$ cu $(1-a)x = 0$ avem $x = ax = xa^2 = xa^n$, pentru orice număr natural $n \geq 1$, deci $x \in \bigcap_{n\geq 1} I^n E$. Incluziunea reciprocă este consecinţa rezultatului următor, aplicat pentru $F = xA$. Din $x \in xA \cap I^s E \subseteq Ix$ pentru un anumit $s \in \mathbb{N}$ rezultă $x = ax$, unde a este un element din I. $\square$

PROPOZIŢIE 3.63. *Fie A un inel, E un modul noetherian şi F un submodul. Pentru orice ideal I din A există un submodul G al lui E cu $\mathrm{Rad}_E(G) \supseteq I$ şi $G \cap F = IF$. Dacă în plus A este inel noetherian, atunci există un număr întreg $n \geq 1$ astfel încât $I^n E \cap F \subseteq IF$.*

DEMONSTRAŢIE. Mulţimea $\mathcal{L}$ a submodulelor lui E a căror urmă pe F coincide cu IF este nevidă (conţine IF) şi inductiv ordonată cu relaţia de incluziune. Vom arăta că un element maximal $G \in \mathcal{L}$ are proprietăţile cerute. Rămâne să verificăm incluziunea $I \subseteq \mathrm{Rad}_E(G)$.

Dacă această relaţie nu are loc, se găseşte $a \in I \setminus \mathrm{Rad}_E(G)$. Lanţul crescător de submodule ale modulului noetherian E

$$G \subseteq (G : Aa)_E \subseteq (G : Aa^2)_E \subseteq \dots$$

este staţionar. Fie r un număr natural nenul la care lanţul considerat staţionează: $(G : Aa^r)_E = (G : Aa^{r+1})_E$. Este suficient să arătăm că are loc egalitatea

$$G = (G + a^r E) \cap (G : Aa^r)_E \ . \tag{6}$$

Într-adevăr, avem $F \subseteq (G : I)_E \subseteq (G : Aa^r)_E$ întrucât $IF \subseteq G$, prin urmare $F \cap (G + a^r E) \subseteq (G : Aa^r)_E \cap (G + a^r E) = G$. De aici rezultă $F \cap (G + a^r E) \subseteq G \cap F = IF$. Din $IF \subseteq G$ se obţine $IF \subseteq F \cap (G + a^r E)$, încât $G + a^r E \in \mathcal{L}$. Relaţia $a \notin \mathrm{Rad}_E(G)$ arată că G este conţinut strict în $G + a^r E$. S-a contrazis astfel maximalitatea lui G în $\mathcal{L}$.

Trecând la demonstrarea relaţiei (6), notăm că G este conţinut în fiecare dintre modulele din membrul drept al acestei relaţii. Dacă $x = y + a^r z$, cu $y \in G$, $z \in E$, şi dacă $x \in (G : Aa^r)_E$, atunci $a^r x = a^r y + a^{2r} z \in G$, deci $z \in (G : Aa^{2r})_E = (G : Aa^r)_E$. Prin urmare $a^r z \in G$ şi în consecinţă $x = y + a^r z \in G$.

Ultima afirmaţie rezultă din faptul că pentru ideal I finit generat conţinut în $\mathrm{Rad}_E(G)$ există un număr natural n astfel ca $I^n E \subseteq G$ şi prin urmare $I^n E \cap F \subseteq G \cap F = IF$. □

Exerciţii.

1. Un inel noetherian este redus dacă şi numai dacă toate componentele primare ale idealului nul sunt ideale prime.

2. Fie $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E, $S \subset A$ un sistem multiplicativ închis şi $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic. Dacă $F_1, \dots, F_s$, $s \leq n$, sunt toate componentele primare ale lui F cu proprietatea $\mathrm{Rad}_E(F_i) \cap S = \emptyset$, atunci $v^{-1}(v(F)) = \bigcap_{i=1}^s F_i$.

3. Dacă $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ este o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E cu F_i submodul P_i-primar, $i = 1, \dots, n$, atunci $\mathrm{Ass}(F_i/F) = \mathrm{Ass}(E/F) \setminus \{ P_i \}$ pentru orice i, $1 \leq i \leq n$.

4. Structura inelelor artiniene

Inelele artiniene, apărute ca urmare a unui exerciţiu de logică formală — dualizarea relaţiei de incluziune, s-au dovedit a fi în multe circumstanţe un substitut pentru corpuri. Proprietăţile lor intervin decisiv în construirea unei teorii a dimensiunii pentru inele comutative. În încheierea acestui capitol prezentăm structura inelelor artiniene.

Lema 4.1. *Orice nondivizor al lui zero dintr-un inel artinian este inversabil. În particular, un inel artinian care este domeniu de integritate este de fapt corp.*

Demonstraţie. Pentru un astfel de element a, şirul $aA \supseteq a^2A \supseteq \supseteq a^3A \supseteq \ldots$ este staţionar. Dacă $a^nA = a^{n+1}A$, atunci $a^n = a^{n+1}b$ pentru un anumit $b \in A$. Cum a este nondivizor al lui zero, se poate simplifica cu a^n în ultima egalitate, rezultând $ab = 1$. $\square$

Lema 4.2. *Într-un inel artinian există doar un număr finit de ideale prime.*

Demonstraţie. Observăm mai întâi că din lema precedentă şi din faptul că o imagine omomorfă a unui inel artinian este încă inel artinian rezultă că orice ideal prim al unui astfel de inel este maximal. Să presupunem că spectrul inelului artinian A nu este finit. Atunci există o mulţime infinită de ideale prime $(P_n)_{n\geq 1}$. Lanţul descendent $P_1 \supset P_1 \cap P_2 \supset P_1 \cap P_2 \cap P_3 \supset \ldots$ nu este staţionar întrucât orice ideal prim este maximal. Contradicţia la care s-a ajuns provine din presupunerea că Spec A este mulţime infinită. $\square$

Lema 4.3. *Radicalul Jacobson J al unui inel artinian este nilpotent, i.e. există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^t = 0$.*

Demonstraţie. Folosind lema 4.1, se deduce

$$J = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{Max}\ A \,\} = \cap\{\, P \,:\, P \in \mathrm{Spec}\ A \,\}\ ,$$

adică orice element al radicalului este nilpotent. Cum nu ştim că J este finit generat, nu putem conchide că exponenţii începând de la care se anulează puterile elementelor lui J sunt majoraţi de aceeaşi constantă. Din faptul că A este inel artinian rezultă că există un număr natural t astfel ca $J^t = J^{t+1} =: I$. Vom arăta că I este idealul nul.

Observăm că $JI = JJ^t = J^{t+1} = I$. Presupunând $I \neq 0$, din $JI = I \neq 0$ rezultă că mulţimea $\mathcal{L}$ constituită din idealele neconţinute în anulatorul lui I este nevidă. Fie L un element minimal al lui $\mathcal{L}$. Din $IL \neq 0$ rezultă că există $a \in L$ astfel ca $aI \neq 0$. Din alegerea lui L se deduce $L = aA$. Cum $aIJ = aI \neq 0$, rezultă $aJ = aA = L$. Prin urmare $a = ab$, cu $b \in J$, şi atunci $a = ab = ab^n$ pentru orice $n \geq 1$. Dar ştim deja că b, ca orice alt element al lui J, este nilpotent. Am ajuns astfel la contradicţia $a = 0$. $\square$

Propoziţie 4.4. *Pentru un modul de tip finit E peste inelul noetherian A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *E este modul de lungime finită,*
(ii) $\mathrm{Ass}_A(E) \subseteq \mathrm{Max}\ A$,

(*iii*) $\mathrm{Supp}_A(E) \subseteq \mathrm{Max}\, A$.

DEMONSTRAŢIE. Conform propoziţiei 3.47, există o filtrare

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \ldots \subset E_1 \subset E_0 = E \tag{7}$$

ai cărei factori E_{i-1}/E_i sunt module izomorfe cu imagini omomorfe integre A/P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ale inelului A, iar

$$\mathrm{Ass}_A(E) \subseteq \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \} \subseteq \mathrm{Supp}_A(E)\ . \tag{8}$$

(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) Factorii E_{i-1}/E_i ($1 \leq i \leq n$) sunt module de lungime finită, deci $l_A(A/P_i) < \infty$. Prin urmare A/P_i este inel artinian. Fiind domeniu de integritate, el este corp, deci $P_i \in \mathrm{Max}\, A$ ($1 \leq i \leq n$). Din relaţia (8) rezultă că toate primele asociate lui E sunt ideale maximale.

Condiţia (*ii*) implică (*iii*) pentru că $\mathrm{Ass}\, E \subseteq \mathrm{Supp}\, E$ şi cele două mulţimi au aceleaşi elemente minimale. Presupunând îndeplinită condiţia (*iii*), din relaţia (8) rezultă că factorii filtrării (7) sunt A-module simple, deci (7) este un şir de compoziţie pentru E. Condiţia (*i*) este îndeplinită conform teoremei Jordan-Hölder. □

Putem acum caracteriza inelele artiniene comutative:

TEOREMA 4.5. *Pentru un inel A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A este inel artinian,*
(*ii*) *A este inel noetherian şi orice ideal prim al lui A este maximal,*
(*iii*) *A este inel noetherian şi orice ideal prim asociat lui A este maximal.*

Dacă aceste condiţii sunt satisfăcute, atunci A este un inel semilocal, cu radicalul Jacobson nilpotent.

DEMONSTRAŢIE. (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) Singura proprietate a cărei existenţă nu a fost încă dovedită este noetherianitatea. Vom arăta faptul echivalent că un inel artinian are lungimea finită.

Fie $I \leq A$ un ideal minimal cu proprietatea că $l_A(A/I) < \infty$. Dacă I este nenul, atunci suportul A-modulului I este nevid, *cf.* lema 3.23. Pentru $P \in \mathrm{Supp}\ (I)$ avem $I_P \neq 0$. Arătăm că I_P/PI_P este un spaţiu vectorial nenul peste corpul rezidual $A_P/PA_P \simeq A/P$ (aici se foloseşte maximalitatea idealului P). Presupunând contrariul, se găseşte $I_P = PI_P = P^2 I_P = \ldots = 0$, pentru că PA_P este ideal nilpotent în inelul artinian A_P conform lemei 4.3. Contradicţia obţinută provine din presupunerea că $I_P/PI_P = 0$. Cum orice spaţiu vectorial nenul este sursa unui morfism a cărui imagine este corpul peste care se lucrează, rezultă existenţa unui morfism surjectiv de

A-module $I_P/PI_P \longrightarrow A/P$. Prin compunere cu morfismele canonice $I \longrightarrow I_P \longrightarrow I_P/PI_P$ se obţine un morfism surjectiv de A-module $v : I \longrightarrow A/P$. Nucleul $J := \ker v$ este un ideal al inelului A conţinut strict în I şi care are proprietatea că A/J este A-modul de lungime finită, conform propoziţiei 2.7 aplicate seriei normale $0 \subset I/J \simeq A/P \subset A/J$. S-a ajuns la o contradicţie cu alegerea lui I.

Clar (iii) este consecinţă a condiţiei (ii), iar implicaţia $(iii) \Longrightarrow (i)$ decurge din propoziţia 4.4. □

Se poate arăta că orice inel necomutativ artinian la stânga este noetherian la sânga.

Lema 4.6. *Fie A un inel artinian cu* $\operatorname{Max} A = \{ M_1, \ldots, M_n \}$, $J = M_1 \cap \ldots \cap M_n$ *şi* $J^k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. *Atunci* $0 = M_1^k \cap \ldots \cap M_n^k$ *este unica descompunere primară redusă a idealului nul din A.*

Demonstraţie. Evident $\prod_{i=1}^k M_i^k \subseteq J^k = 0$. Deoarece M_i şi M_j sunt comaximale pentru $1 \leq i < j \leq n$, rezultă că şi $M_i^k + M_j^k = A$. Conform lemei chineze a resturilor avem $0 = M_1^k \cap \ldots \cap M_n^k$, relaţie ce este o descompunere primară a idealului nul pentru că $\operatorname{Rad}(M^k) = M$ pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$ şi un modul este primar dacă radicalul său este ideal maximal. Observăm că această descompunere primară este redusă întrucât o relaţie $M_i^k \supseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k$ implică

$$\prod_{j \neq i} M_j^k \subseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k = 0 \subseteq M_i \ ,$$

deci $M_j \subseteq M_i$ pentru un indice $j \neq i$. Unicitatea rezultă din teorema 3.60 şi din faptul că $M_1, \ldots, M_n$ este ideal prim minimal în A conform teoremei 4.5. □

Teorema 4.7. *Orice inel artinian este izomorf cu produsul direct al localizatelor sale în idealele maximale.*

Demonstraţie. Fie J radicalul Jacobson al inelului artinian A şi $M_1, \ldots, M_n$ idealele maximale, iar $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^k = 0$. Conform rezultatului precedent şi lemei chineze a resturilor, există un izomorfism canonic $A \simeq \prod_{i=1}^n A/M_i^k$. Vom arăta că pentru $M \in \operatorname{Max} A$, morfismul de localizare $u : A \longrightarrow A_M$ este surjectiv şi are nucleul M^k.

Fie $p : A \longrightarrow A/M^k$ surjecţia canonică. Deoarece A/M^k este inel local de ideal maximal M/M^k, se obţine că $p(a)$ este inversabil pentru orice $a \in A \setminus M$. Din proprietatea de universalitate a inelelor de fracţii rezultă că există un morfism de inele $f : A_M \longrightarrow A/M^k$ astfel încât $p = fu$. Evident f este surjectiv. Rămâne să arătăm injectivitatea lui f. Dacă $a/s \in \ker f$, atunci $u(a) = a/1 \in \ker f$, încât $p(a) = f(u(a)) = 0$. Prin urmare $a \in M^k$ şi

$$a/s \in M^k A_M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^k A_M = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} M_i^k\Big) A_M = 0 \ .$$

□

CAPITOLUL 2

Dimensiunea Krull a inelelor noetheriene

1. Extinderi întregi de inele

Fie B o A-algebră şi I un ideal în A (cazul $I = A$ va fi frecvent întâlnit în noţiunile şi rezultatele următoare).

Definiţie 1.1. Un element $x \in B$ este numit *întreg peste I* dacă există un polinom $f \in A[X]$ de forma $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, cu $n > 0$, $a_i \in I$, $(0 \leq i < n)$ astfel încât $f(x) = 0$. Dacă orice element al lui B este întreg peste A, se spune că B este o *A-algebră întreagă*.

Propoziţie 1.2. *Fie B o A-algebră, I un ideal în A şi $x \in B$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *x este întreg peste I,*

(ii) *A-subalgebra $A[x]$ a lui B este un A-modul finit generat şi $x \in \mathrm{Rad}_{A[x]}(IA[x])$,*

(iii) *există o A-subalgebră C a lui B cu $x \in C$, C un A-modul finit generat şi $x \in \mathrm{Rad}_C(IC)$.*

Demonstraţie. Pentru a arăta că (i) implică (ii), se consideră un polinom $f \in A[X]$ ca în definiţia 1.1. Cum f este unitar, orice polinom $g \in A[X]$ poate fi împărţit la f: $g = fq + r$, cu q, $r \in A[X]$ şi gradul lui r strict mai mic decât gradul lui f. Deoarece $g(x) = r(x)$, rezultă că $1, x, \ldots, x^{n-1}$ este un sistem de generatori pentru A-modulul $A[x]$. Din $f(x) = 0$ se obţine $x^n \in IA[x]$, astfel că $x \in \mathrm{Rad}_{A[x]}(IA[x])$.

Dacă (ii) este îndeplinită, atunci (iii) este satisfăcută de către $C = A[x]$. Să presupunem că afirmaţia (iii) este îndeplinită. Dacă $c_1, \ldots, c_s$ este un sistem de generatori pentru A-modulul C, relaţia $x^m \in IC$ implică $x^m c_i = a_{i1}c_1 + \ldots + a_{is}c_s$ pentru orice $i = 1, \ldots, s$, unde $a_{ik} \in I$ pentru $k = 1, \ldots, s$. Aceste relaţii sunt echivalente cu sistemul

$$\sum_{k=1}^{s} (\delta_{ik}x^m - a_{ik})c_k = 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, s \ ,$$

unde δ_{ik} este simbolul lui Kronecker.

Notăm cu $N = (b_{ik})$ adjuncta matricei $M := (\delta_{ik}x^m - a_{ik})$ cu elemente din inelul $A[x]$. Prin schimbarea ordinii de sumare, se găseşte că pentru $k = 1, \ldots, s$ avem

$$S := \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{s} b_{ki}(\delta_{ij}x^m - a_{ij}) \right) c_j = \sum_{i=1}^{s} b_{ki} \left(\sum_{j=1}^{s} (\delta_{ij}x^m - a_{ij})c_j \right) = 0.$$

Cum $NM = dE$, unde $d = \det\,(M)$ şi E este matricea unitate de ordin s, rezultă că suma S coincide cu

$$\sum_{j=1}^{s} \delta_{kj} dc_j = dc_k \ .$$

Pe de altă parte, există elemente $u_k \in A$ astfel ca $1 = \sum_{k=1}^{s} c_k u_k$, astfel că $d = d\sum_{k=1}^{s} c_k u_k = 0$. Prin dezvoltarea determinantului după prima sa linie, se găseşte o relaţie de dependenţă întreagă a lui x peste I. $\square$

COROLAR 1.3. *Dacă B este o A-algebră finită, atunci B este întreagă peste A. În acest caz, $x \in B$ este întreg peste un ideal $I \leq A$ dacă şi numai dacă $x \in \mathrm{Rad}_B(IB)$.*

Există o reciprocă parţială pentru acest rezultat:

COROLAR 1.4. *O algebră întreagă şi de tip finit este algebră finită.*

COROLAR 1.5. *Dacă x_1, …, $x_n \in B$ sunt întregi peste $I \leq A$, atunci $A[x_1, \ldots, x_n]$ este un A-modul finit generat şi toate elementele x_i, $i = 1, \ldots, n$, aparţin idealului $\mathrm{Rad}(IA[x_1, \ldots, x_n])$.*

O altă consecinţă a caracterizării elementelor întregi dată în propoziţia 1.2 este tranzitivitatea extinderilor întregi:

COROLAR 1.6. *Dacă B este o A-algebră întreagă şi C este o B-algebră întreagă, atunci C este o A-algebră întreagă.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru un element x arbitrar al lui C se consideră o relaţie de dependenţă întreagă peste B: $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$, $b_i \in B$. Din corolarul precedent rezultă că $A[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]$ este o A-algebră finită. Din acelaşi motiv $A[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x]$ este un A-modul finit generat. Acum se aplică rezultatul 1.3. $\square$

COROLAR 1.7. *Mulţimea A'_B formată din toate elementele lui B întregi peste A este A-subalgebră a lui B. Pentru orice ideal $I \leq A$, $\mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ coincide cu mulţimea elementelor din B întregi peste I.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru x, $y \in A'_B$, A-modulul $A[x,y]$ este finit generat. Conform condiţiei (*iii*) din propoziţia 1.2, $x+y$ şi xy sunt întregi peste A. Dacă $x \in B$ este întreg peste I, atunci $x \in \mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ conform propoziţiei 1.2.

Reciproc, pentru $x \in \mathrm{Rad}_{A'_B}(IA'_B)$ avem $x^m \in IA[x_1,\dots,x_n]$ pentru anumiţi x_1, ..., $x_n \in A'_B$ şi $m \in \mathbb{N}$. Se foloseşte acum faptul că din condiţia (*iii*) din propoziţia 1.2 rezultă condiţia (*i*). $\square$

DEFINIŢIE 1.8. Fie A un inel şi B o A-algebră. Inelul A'_B constând din toate elementele lui B întregi peste A se numeşte *închiderea întreagă a lui A în B*. Se spune că A *este întreg închis în B* dacă A'_B coincide cu imaginea lui A în B prin morfismul structural. Un domeniu întreg închis în corpul său de fracţii este numit *domeniu normal*.

COROLAR 1.9. *Prin adjuncţionarea unei familii arbitrare de elemente întregi peste A se obţine o A-algebră întreagă.*

De aici rezultă imediat idempotenţa luării închiderii întegi:

COROLAR 1.10. *Pentru orice A-algebră B, A'_B este întreg închis în B. Echivalent, $(A'_B)'_B = A'_B$.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x \in B$ este întreg peste A'_B, atunci $A'_B[x]$ este A'_B-algebră întreagă. Cum A'_B este A-algebră întreagă, din tranzitivitatea extinderilor întregi rezultă x întreg peste A. Prin urmare $x \in A'_B$. Am stabilit. şadar, $(A'_B)'_B \subseteq A'_B$. Incluziunea opusă este trivială. $\square$

EXEMPLE. 1. Un domeniu de integritate cu proprietatea că oricare două elemente admit un cel mai mare divizor comun este normal. În particular, inelele factoriale sunt normale.

Fie K corpul de fracţii al unui domeniu A cu proprietatea indicată. Pentru $x \in K$ se consideră o reprezentare $x = b/c$ cu b, $c \in A$ coprime şi $c \neq 0$. Dacă x satisface o relaţie de forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, cu $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$, după înmulţire cu c^n se obţine relaţia $b^n + a_{n-1}cb^{n-1} + \ldots + a_1c^{n-1}b + a_0c^n = 0$ care arată că c divide b^n. Atunci c divide c.m.m.d.c (c, b^n), care este un element inversabil din A. Conchidem că c este inversabil în A, încât $x \in A$.

2. Se poate arăta că un element x din $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ este întreg peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Altfel spus, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ este domeniu normal.

Putem demonstra acum un rezultat faimos, care stă la baza legăturii dintre algebra comutativă şi geometria algebrică.

TEOREMA 1.11. *[Teorema zerourilor a lui Hilbert (Nullstellensatz), forma slabă] Fie K un corp algebric închis. Atunci orice ideal maximal al inelului de polinoame $K[X_1, \dots, X_n]$ este de forma $(X_1-a_1, \dots, X_n-a_n)$, cu $a_1, \dots, a_n \in K$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $a_1, \dots, a_n$ arbitrare în K, idealul $M := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ este maximal întrucât morfismul de K-algebre $A := K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K$, $X_i \mapsto a_i$, $i = 1, \dots, n$, este surjectiv, de nucleu M. Reciproc, fie $M \in \mathrm{Max}\ A$. Din teorema 1.12 rezultă că extinderea $K \subseteq A/M$ este algebrică. Cum K este algebric închis, avem $K \simeq A/M$. Se consideră $a_i \in K$ corespunzând clasei lui X_i modulo M, pentru $i = 1, \dots, n$. Din $X_i - a_i \in M$ şi maximalitatea idealului $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ tragem concluzia că $M = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. □

TEOREMA 1.12. *Dacă L/K este o extindere de corpuri şi L este o K-algebră de tip finit, atunci L/K este algebrică.*

DEMONSTRAŢIE. Vom raţiona prin inducţie după numărul generatorilor $x_1, \dots, x_n$ ai K-algebrei L. Pentru $n = 1$ este clar că $L = K[x_1]$ este algebrică, în caz contrar ar fi un inel de polinoame, în care nedeterminata nu este inversabilă. Presupunem că $n \geq 2$ şi că proprietatea este adevărată pentru $n-1$ elemente, dar este falsă pentru n elemente. După o eventuală renumerotare, găsim că x_1 este transcendent peste K. Cum $L = K(x_1)[x_2, \dots, x_n]$, din ipoteza de inducţie rezultă că L este algebric peste $K(x_1)$. Pentru $i = 2, \dots, n$ notăm $u_i \in K[x_1]$ coeficientul dominant al unui polinom cu coeficienţii din $K[x_1]$ care are ca rădăcină x_i. Fie $u := u_2 \dots u_n$. Observăm că L este $K[x_1, \frac{1}{u}]$-algebră întreagă Fie p un polinom ireductibil din $K[x_1]$ care nu divide u. Cum $1/p$ satisface o relaţie de forma

$$\left(\frac{1}{p}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{1}{p}\right)^{m-1} + \dots + a_0 = 0\ ,\ a_i \in K[x_1, \frac{1}{u}], m \geq 1,$$

după înmulţirea cu p^m şi o putere convenabilă a lui u se ajunge la $b_m p_m + b_{m-1} p_{m-1} + \dots + b_1 p + u^s = 0$, cu $b_i \in K[x_1]$. Din unicitatea descompunerii în factori primi în inelul de polinoame se trage concluzia că p divide u^s în $K[x_1]$, contradicţie. □

Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism de inele şi S un sistem multiplicativ închis din A. Se arată uşor că $S^{-1}A$-modulul $S^{-1}B$ are o structură de inel dacă se defineşte operaţia de înmulţire internă în mod natural

$$\frac{b}{s} \cdot \frac{b'}{s'} = \frac{bb'}{ss'} \quad , \quad b, b' \in B \text{ şi } \ s, s' \in S\ .$$

În plus, $S^{-1}B$ este izomorf cu inelul de fracţii $T^{-1}B$ al lui B în raport cu sistemul multiplicativ $T := u(S)$ al lui B. De asemenea, $S^{-1}B$ este o $S^{-1}A$-algebră via morfismul canonic $S^{-1}u$.

PROPOZIŢIE 1.13. *În notaţiile precedente are loc egalitatea*

$$(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B).$$

În particular, dacă u este un morfism întreg (resp. întreg închis), atunci $S^{-1}u : S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}B$ este morfism întreg (resp. întreg închis).

DEMONSTRAŢIE. Fie $x/s \in S^{-1}(A'_B)$, cu $x \in A'_B$ şi $s \in S$. Atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. Prin înmulţirea acestei relaţii cu $1/s^n$ în $S^{-1}A$-algebra $S^{-1}B$, se obţine o relaţie de dependenţă întreagă a lui x/s peste $S^{-1}A$.

Reciproc, se consideră $x/s \in (S^{-1}A)'_{S^{-1}B}$ şi o relaţie de dependenţă întreagă a sa peste $S^{-1}A$

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{t} \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{t} = 0 \quad , \quad a_i \in A \ , \ t \in S \ , \ n \in \mathbb{N}^* \ .$$

Aceasta înseamnă că există $q \in S$ astfel încât $q(tx^n + sa_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0s^n) = 0$, relaţie ce arată că $tqx \in A'_B$. Prin urmare $\dfrac{x}{s} = \dfrac{tqx}{tqs} \in S^{-1}(A'_B)$.

Dacă u este morfism întreg, atunci $A'_B = B$, deci $(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B) = S^{-1}B$, ceea ce înseamnă că morfismul $S^{-1}u$ este întreg. În cazul în care u este morfism întreg închis avem $A'_B = A$, astfel că $(S^{-1}A)'_{S^{-1}B} = S^{-1}(A'_B) = S^{-1}A$. □

COROLAR 1.14. *Fie S un sistem multiplicativ închis al unui domeniu normal A. Dacă S nu conţine 0, atunci $S^{-1}A$ este domeniu normal.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $0 \notin S$, avem $A \subseteq S^{-1}A \subseteq S^{-1}K = K$. Din propoziţia 1.13 rezultă că $S^{-1}A$ este întreg închis în corpul său de fracţii K. □

LEMA 1.15. *Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele, J un ideal în B şi $I := J \cap A$. Atunci:*

a) $A/I \subseteq B/J$ este o extindere întreagă.

b) Dacă J conţine un nondivizor al lui zero pe B, atunci $I \neq 0$.

DEMONSTRAŢIE. a) Injectivitatea este asigurată de ipoteza $I = J \cap A$. Restul rezultă din propoziţia 1.13.

b) Dacă $x \in J$ este un nondivizor al lui zero pe B şi satisface relaţia de dependenţă întreagă de grad minim $x^n + a^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, cu $n > 0$ şi $a_i \in A$, atunci $a_0 \neq 0$, pentru că în caz contrar, după împărţirea cu $x \notin \mathrm{Z}(B)$, obţinem o ecuaţie de grad mai mic satisfăcută de x. Cum $a_0 \in J \cap A = I$, idealul I este nenul. □

În studiul morfismelor întregi sau întreg închise de inele, un rol important joacă următoarele noţiuni.

Definiţie 1.16. Pentru o extindere de inele $A \subseteq B$ se consideră condiţiile:

LO: Pentru orice $P \in \text{Spec } A$ există $Q \in \text{Spec } B$ cu $Q \cap A = P$.

Se spune că P este *urma lui* Q sau Q *stă peste* P.

GU: Pentru orice P_1, $P_2 \in \text{Spec } A$ şi $Q_1 \in \text{Spec } B$ cu $P_1 \subset P_2$ şi $P_1 = Q_1 \cap A$ există $Q_2 \in \text{Spec } B$ astfel încât $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P_2 = Q_2 \cap A$.

GD: Pentru orice P_1, $P_2 \in \text{Spec } A$ şi $Q_2 \in \text{Spec } B$ cu $P_1 \subset P_2$ şi $P_2 = Q_2 \cap A$ există $Q_1 \in \text{Spec } B$ astfel încât $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P_1 = Q_1 \cap A$.

INC: Orice două ideale prime distincte Q_1, Q_2 ale lui B ce au aceeaşi urmă pe A sunt incomparabile faţă de incluziune.

Dacă $u^* : \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$ este aplicaţia continuă între spectre indusă de morfismul de algebre u, condiţia LO este echivalentă cu surjectivitatea lui u^*.

Definiţie 1.17. Fie A un inel nenul. Se spune că un lanţ de ideale prime ale inelului A

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_n \tag{9}$$

are *lungimea n*. Un lanţ (9) se numeşte *saturat* dacă pentru orice $i = 1$, $\ldots$, n, nu există $Q \in \text{Spec } A$ cu $P_{i-1} \supset Q \supset P_i$.

Înălţimea, resp *coînălţimea*, unui ideal prim P este definită a fi marginea superioară a lungimilor tuturor lanţurilor (9) cu $P_0 = P$, resp. $P_n = P$. Ea se notează ht P, resp. coht P. *Înălţimea* unui ideal arbitrar $I \leq A$ se defineşte a fi infimumul înălţimilor idealelor prime asociate lui. *Coînălţimea* sau *dimensiunea* idealului I se defineşte prin

$$\text{coht}\, I = \dim A/I \ .$$

Marginea superioară a lungimilor tuturor lanţurilor saturate de ideale prime ale lui A se numeşte *dimensiunea Krull* a inelului A şi se notează dim A. Convenim să definim dimensiunea inelului nul ca fiind -1.

Evident, dim A=0 dacă şi numai dacă Spec A= Max $A \neq \emptyset$. Este limpede că $\dim \mathbb{Z} = 1$.

Ţinând cont de corespondenţa dintre idealele prime ale unui inel şi idealele prime ale unui localizat sau ale unei imagini omomorfe, se obţine pentru $P \in \text{Spec } A$

$$\text{ht}\, P = \dim A_P \quad , \quad \text{coht}\, P = \dim A/P.$$

Evident, dacă $P \in \text{Spec } A$, atunci ht $P = 0$ dacă şi numai dacă $P \in \text{Min } A$.

Exemple 2. 1. Pentru orice număr prim p, morfismul canonic $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ este întreg, dar nu satisface condiţia LO. Explicaţia este simplă: corpul $\mathbb{Z}_p$ are un singur ideal prim, a cărui preimagine în $\mathbb{Z}$ este $p\mathbb{Z}$. Orice alt ideal prim din $\mathbb{Z}$ nu este în imaginea morfismului spectral $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$.

2. Condiţia LO nu este satisfăcută de extinderea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Justificarea este aceeaşi ca şi pentru exemplul precedent.

3. Orice extindere de inele $A \subseteq B$ cu $\dim A = 0$ satisface condiţiile LO, GU şi GD, dar nu satisface condiţia INC dacă $\dim B \geq 1$.

Teorema 1.18. *Fie $u : A \longrightarrow B$ un morfism întreg de inele. Atunci:*

a) $u^* : \mathrm{Spec}\ B \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A$ este aplicaţie surjectivă.

b) Imaginea prin u^* a oricărei mulţimi închise din $\mathrm{Spec}\ B$ este mulţime închisă în $\mathrm{Spec}\ A$.

c) Extinderea ??? satisface condiţia INC.

d) u^* induce o surjecţie între $\mathrm{Max}\ B$ şi $\mathrm{Max}\ A$ şi $(u^*)^{-1}\big(\mathrm{Max}\ A\big) = \mathrm{Max}\ B$. Altfel spus, un ideal prim Q al lui B este maximal dacă şi numai dacă $Q \cap A$ este ideal maximal în A.

Demonstraţie. a) Vom arăta mai întâi $u^{-1}(PB) \subseteq P$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\ A$. Fie $x \in PB$. Ca orice alt element al lui B, x este întreg peste A. Cum $x \in \mathrm{Rad}_B(PB)$, înseamnă că x este întreg peste P, deci există o relaţie de dependenţă întreagă $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ în care toţi coeficienţii a_i aparţin lui P. Dacă $x \in u^{-1}(PB)$, rezultă $x^n \in P$ şi prin urmare $x \in P$.

Relaţia demonstrată în paragraful precedent se exprimă echivalent $PB \cap S = \emptyset$, unde $S := A \setminus P$. Conform unei leme DE CITAT există $Q \in \mathrm{Spec}\ B$ astfel încât $PB \subseteq Q$ şi $Q \cap S = \emptyset$. Prin urmare $P \subseteq PB \cap A \subseteq Q \cap A \subseteq P$.

b) Fie $J \leq B$ şi $I := u^{-1}(J)$. Extinderea $A/I \subseteq B/J$ este întreagă conform lemei 1.15 şi satisface proprietatea LO în virtutea punctului a). Din corespondenţa existentă între idealele prime ale inelului A/I şi mulţimea închisă $\mathrm{V}(I)$ a lui $\mathrm{Spec}\ A$ rezultă că $u^*(\mathrm{V}(J)) = \mathrm{V}(I)$.

c) Fie $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Spec}\ B$ cu $Q_1 \subseteq Q_2$ şi $P = Q_1 \cap A = Q_2 \cap A$. Atunci extinderea $A/P \subseteq B/Q_1$ este întreagă, iar Q_2/Q_1 este un ideal prim al domeniului de integritate B/Q_1 a cărui urmă pe A/P este nulă. Din lema precedentă rezultă $Q_2/Q_1 = 0$, adică $Q_1 = Q_2$.

d) Fie $Q \in \mathrm{Spec}\ B$ şi $P := Q \cap A$. Dacă A/P este corp, cum B/Q se obţine adjuncţionând elemente algebrice la A/P, înseamnă că B/Q este corp. Reciproc, dacă B/Q este corp, idealul nul este singurul său ideal prim. Din proprietatea LO se deduce că unicul ideal prim din A/P este idealul nul. □

COROLAR 1.19. *Orice extindere întreagă satisface condiţia GU.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $P_1, P_2 \in \text{Spec } A$, $Q_1 \in \text{Spec } B$ cu $P_1 \subset P_2$ şi $Q_1 \cap A = P_1$. Aplicăm extinderii întregi $A/P_1 \subseteq B/Q_1$ proprietatea LO pentru $P_2/P_1 \in \text{Spec } (A/P_1)$. □

LEMA 1.20. *Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de domenii de integritate. Atunci A este corp dacă şi numai dacă B este corp.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că A este corp. Pentru $y \in B$, $y \neq 0$, se consideră relaţia de dependenţă întreagă de grad minim $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. Termenul liber a_0 este nenul, astfel că avem $y[-a_0^{-1}(y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \ldots + a_1)] = 1$.

Reciproc, dacă B este corp, orice element nenul $x \in A$ are un invers $x^{-1} \in B$. Dintr-o relaţie de dependenţă întreagă pentru x^{-1} de forma $x^{-n} + a_{n-1}x^{-n+1} + \ldots + a_0 = 0$, unde $a_i \in A$, rezultă $x^{-1} = -a_{n-1} - \ldots - a_0x^{n-1} \in A$. □

TEOREMA 1.21. *[Teorema GU a lui Krull-Cohen-Seidenberg] Orice extindere întreagă de inele $A \subseteq B$ satisface condiţiile* LO, GU *şi* INC. *În plus* dim $A=$ dim B.

DEMONSTRAŢIE. Prima parte a fost deja stabilită. Ultima afirmaţie se demonstrează astfel: condiţiile LO şi GU implică dim $A \leq$ dim B. Inegalitatea contrară este consecinţa proprietăţii INC: orice lanţ saturat de ideale prime din B produce un lanţ de ideale prime distincte din A de aceeaşi lungime. □

COROLAR 1.22. *Dacă $A \subseteq B$ este o extindere întreagă şi $Q \in$ Spec B, atunci*

$$\text{ht}\, Q \leq \text{ht }\ (Q \cap A)\ ,\ \text{coht }Q = \text{coht }(Q \cap A)\ .$$

Având în vedere relaţiile ht $Q =$ dim B_Q şi coht $Q =$ dim B/Q, deducem:

COROLAR 1.23. *Dacă $A \subseteq B$ este o extindere întreagă şi B este inel noetherian, atunci u^* :* Spec $B \longrightarrow$ Spec A *este aplicaţie finită (i.e. pentru orice $P \in$* Spec A*, există doar un număr finit de ideale prime Q din B ce stau peste P).*

DEMONSTRAŢIE. Conform proprietăţii LO, idealul PB este conţinut într-un ideal prim Q din B ce stă peste P. Din condiţia INC rezultă că idealele prime din B ce stau peste P sunt exact cele minimale peste PB. Dar într-un inel noetherian există doar un număr finit de ideale prime minimale. □

În continuare punem în evidenţă condiţii suficiente ca o extindere întreagă să aibă proprietatea GD.

TEOREMA 1.24. *[Teorema GD a lui Krull-Cohen-Seidenberg] Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inel. Presupunem că A este un domeniu normal şi că orice element nenul al lui A este nondivizor al lui zero în B. Atunci extinderea satisface condiţia* GD.

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra cazul particular B domeniu. O demonstraţie completă se găseşte de pildă în [**13**].

Fie $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} A$, $Q_2 \in \operatorname{Spec} B$ cu $P_1 \subset P_2$ şi $Q_2 \cap A = P_2$. Considerăm sistemele multiplicative $S_1 := A \setminus P_1$, $T_2 := B \setminus Q_2$ şi $S := \{ st : s \in S_1, t \in T_2 \}$. Vom arăta $P_1 B \cap S = \emptyset$. Din lema lui Krull va rezulta existenţa unui ideal prim Q_1 din B care conţine $P_1 B$ şi astfel încât $Q_1 \cap S = \emptyset$. Cum $T_2 \subseteq S$, vom avea $Q_1 \cap T_2 = \emptyset$, deci $Q_1 \subseteq Q_2$, iar din $S_1 \subseteq S$ va decurge $Q_1 \cap S_1 = \emptyset$ şi $Q_1 \cap A \subseteq P_1$. Dar $P_1 B \subseteq Q_1$ implică $P_1 \subseteq Q_1 \cap A$, iar $P_1 \neq P_2$ implică $Q_1 \neq Q_2$.

Să presupunem că există $x \in P_1 B \cap S$. Atunci x este întreg peste P_1 şi conform lemei următoare, polinomul său minimal peste corpul de fracţii K al lui A are forma $f = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$, cu $a_i \in P_1$, $i = 0, \ldots, n-1$. Cum $x \in S$, există $s \in S_1$ şi $t \in T_2$ astfel ca $x = st$. Polinomul minimal al lui $t = x/s$ peste K este

$$X^n + \frac{a_{n-1}}{s} X^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{s^n},$$

ai cărui coeficienţi sunt din A întrucât t este întreg peste domeniul normal A. Aşadar, elementele $b_i := a_i / s^{n-i}$, $i = 0, \ldots, n-1$, sunt din A şi satisfac relaţiile $b_i s^{n-i} \in P_1$. Cum s nu aparţine lui P_1, rezultă $b_i \in P_1$ pentru orice i, $0 \leq i < n$, ceea ce înseamnă că t este întreg peste P_1. Atunci $t \in \operatorname{Rad}_B(P_1 B) \subseteq Q_2$. S-a contrazis alegerea $t \in T_2 = B \setminus Q_2$. $\square$

DEFINIŢIE 1.25. Fie A un domeniu de integritate cu corp de fracţii K, L o K-algebră şi $x \in L$ un element întreg peste K (echivalent, x este *algebric* peste K, adică rădăcina unui polinom nenul din $K[X]$, nu neapărat unitar). Mulţimea

$$I(x) := \{ g \in K[X] : g(x) = 0 \}$$

este nevidă. Mai mult, este un ideal nenul din inelul principal $K[X]$. Generatorul unitar al lui $I(x)$ se numeşte *polinomul minimal* al lui x peste K.

Dacă L este domeniu de integritate, idealul $I(x)$ este prim, pentru că din $f = gh$, unde $g, h \in K[X]$ cu $0 < \operatorname{grad} g < \operatorname{grad} f$ şi $g(x)h(x) = 0$ rezultă $g \in I(x)$ sau $h \in I(x)$. În consecinţă, polinomul minimal al lui

x este ireductibil în acest caz. În general, însă, un polinom minimal nu este neapărat ireductibil. Spre exemplu, fie K un corp şi $L := K[X]/(X^2) = K[x]$. Este clar că polinomul minimal al elementului x este X^2.

LEMA 1.26. *Fie A un domeniu normal de corp de fracţii K, I un ideal radical în A şi L un corp ce conţine K. Dacă $x \in L$ este întreg peste I, polinomul său minimal f peste K are forma $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ cu $a_i \in I$, $i = 0, \ldots, n-1$.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $x_1 = x$, x_2, …, x_n rădăcinile lui f într-o închidere algebrică $\overline{K}$ a lui K. Polinomul f fiind ireductibil, grupul său Galois acţionează tranzitiv pe mulţimea rădăcinilor lui f. Altfel spus, există un K-automorfism al lui $\overline{K}$ care duce x în oricare alt element x_i, $i = 2, \ldots, n$. Rezultă că toate rădăcinile x_i sunt întregi peste I. Coeficienţii a_i sunt funcţii simetrice elementare de rădăcini, deci aparţin idealului $\mathrm{Rad}_{A'_K}(IA'_K)$. Ipoteza A domeniu normal înseamnă $A'_K = A$, prin urmare $\mathrm{Rad}_{A'_K}(IA'_K) = \mathrm{Rad}_A(I) = I$, întrucât I este presupus a fi ideal radical în A. □

COROLAR 1.27. *În ipotezele teoremei GD, avem* $\mathrm{ht}\ Q = \mathrm{ht}\ (Q \cap A)$ *pentru orice ideal prim Q al lui B.*

DEMONSTRAŢIE. Ştim deja că urma are înălţimea cel puţin egală cu înălţimea lui Q. Din teoremă rezultă că din orice lanţ saturat de ideale prime din A ce se termină cu $Q \cap A$ putem construi un lanţ de ideale prime din B ce se termină cu Q şi de aceeaşi lungime. □

EXERCIŢII.

1. Pentru o A-algebră B, I ideal în A şi $x \in B$, următoarele condiţii sunt echivalente:

(*i*) x este întreg peste I,
(*ii*) există un $A[x]$-modul fidel E (*i.e.* $\mathrm{Ann}_{A[x]}E = 0$) care este A-modul finit generat şi pentru care $xE \subseteq IE$.

2. Inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ este domeniu normal, dar nu orice două elemente ale sale admit un cel mai mare divizor comun.

3. Fie $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o familie de subinele normale ale unui domeniu de integritate. Arătaţi că $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ este domeniu normal.

4. Următoarele condiţii sunt echivalente pentru un domeniu de integritate A:

(*i*) A este domeniu normal,
(*ii*) A_P este domeniu normal pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\ A$,
(*iii*) A_M este domeniu normal pentru orice $M \in \mathrm{Max}\ A$.

5. Dacă extinderea $A \subseteq B$ satisface condiţia GU, atunci ea satisface şi condiţia LO.

6. Dacă extinderea $A \subseteq B$ satisface condiţiile GU şi INC, atunci dim A= dim B.

7. Fie K un corp şi polinomul $f \in K[X_1, \dots, K_n]$ ale cărui componente omogene sunt f_0, ..., f_m cu f_i polinom nul sau omogen de grad i, $i = 0$, ..., m. Presupunem că $f_m \neq 0$ este produs de polinoame ireductibile distincte. Arătaţi că inelul $K[f]$ este întreg închis în $K[X_1, \dots, K_n]$ şi corpul $K(f)$ este algebric închis în $K(X_1, \dots, K_n)$.

8. Fie $A \subseteq B$ o extindere întreagă de inele. Dacă B este inel local (resp. semilocal), atunci A este inel local (resp. semilocal).

9. Să se arate că orice inel redus este întreg închis în inelul de polinoame într-o nedeterminată peste el.

10. Fie $A = \mathbb{Z}'_{\mathbb{C}}$. Să se arate că:

a) extinderea $\mathbb{Z} \subseteq A$ este întreagă, dar nu este finită;
b) $P = P^2$ pentru orice $P \in \text{Spec } A$;
c) singurul ideal prim din A finit generat este idealul nul;
d) A nu este inel noetherian;
e) A nu are elemente prime.

11. Pentru orice A-algebră B, închiderea întreagă a inelului de polinoame $A[X_1, \dots, X_n]$ în $B[X_1, \dots, X_n]$ este $A'_B[X_1, \dots, X_n]$.

12. Fie d un întreg liber de pătrate, $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ şi $A := \mathbb{Z}'_K$. Să se demonstreze:

a) Dacă $d \equiv 2 \pmod 4$ sau $d \equiv 3 \pmod 4$, atunci $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
b) Dacă $d \equiv 1 \pmod 4$, atunci $A = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{d})/2]$.

13. Pentru $d \neq 1$ un întreg liber de pătrate şi $d \equiv 1 \pmod 4$, domeniul $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nu este normal.

14. Fie K un corp. Orice K-algebră A conţinută în inelul de polinoame într-o variabilă $K[X]$ este finit generată şi are dimensiunea cel mult unu.

15. Pentru orice inel A, extinderea $A \subset A[X]$ satisface condiţiile LO şi GD, dar nu şi condiţia INC. Pentru dim $A \geq 1$, nu este satisfăcută nici condiţia GU.

16. Un morfism de inele $u : A \longrightarrow B$ îndeplineşte condiţia GD dacă şi numai dacă pentru orice ideal $P \in \text{Spec } A$ şi orice $Q \in \text{Min } (B/PB)$ avem $u^{-1}(Q) = P$.

17. Fie A un domeniu de integritate, a şi c elemente ale sale şi $B := A[X]/(X^2 + aX + c)$. Să se arate că pentru orice $b \in B$, idealul $I(b)$ al lui $A[X]$ format din toate polinoamele care se anulează în b este principal.

18. Pentru $A \subseteq B$ o extindere de inele, idealul

$$f_{B/A} := \{ a \in A \,:\, aB \subseteq A \}$$

este numit *conductorul lui* B *în* A.

a) Arătaţi că $f_{B/A}$ este cel mai mare ideal din B conţinut în A.

b) Dacă B este A-algebră finită şi $S \subset A$ este un sistem multiplicativ închis, atunci

$$f_{S^{-1}B/S^{-1}A} = S^{-1}(f_{B/A}) \ .$$

19. Fie A un domeniu de integritate a cărui închidere întreagă $\bar{A}$ în corpul de fracţii K este A-algebră finită.

a) Pentru $P \in \operatorname{Spec} A$, A_P este întreg închis în K dacă şi numai dacă P nu conţine idealul $f_{\bar{A}/A}$.

b) A este domeniu normal dacă şi numai dacă A_M este întreg închis în K pentru orice $M \in \operatorname{Max} A$.

2. Lema de normalizare

Multă vreme, algebra comutativă a însemnat studierea inelelor de polinoame cu coeficienţi întregi sau într-un corp. Nu doar familiaritatea cu aceste inele a favorizat această situaţie, ci şi bogăţia proprietăţilor ce aşteptau să fie puse în evidenţă. Rezultatul central al acestei secţiuni arată că un inel de tip finit peste un corp este modul finit generat peste un inel de polinoame cu coeficienţi în corpul respectiv. Un astfel de rezultat, pe lângă consecinţele ce decurg nemijlocit din el, are valoare arhetipală, după acest model fiind ulterior obţinute teoreme de structură pentru inele locale complete.

Definiţie 2.1. O algebră A de tip finit peste un corp K este numită *K-algebră afină*. Dacă în plus A este domeniu de integritate, se spune că A este *K-domeniu afin*.

Lema 2.2. *Fie f un element din inelul de polinoame $K[X_1, \ldots, X_n]$, $n \geq 2$, în care nedeterminata X_n apare efectiv. Atunci:*

a) Există numere naturale nenule $r_1, \ldots, r_{n-1}$ astfel încât după efectuarea substituţiei $Y_i = X_i - X_n^{r_i}$, $1 \leq i < n$, f să aibă forma $cX_n^m + g_1X_n^{m-1} + \cdots + g_m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$, $c \in K$, $c \neq 0$ şi $g_i \in K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ pentru $1 \leq i \leq m$.

b) Dacă K este infinit, aceeaşi formă pentru f poate fi obţinută cu o substituţie $Y_i = X_i - c_iX_n$, unde c_i, $1 \leq i < n$, sunt elemente convenabil alese din K.

Demonstraţie. Fie $f = \sum a_{e_1 \ldots e_n} X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n}$, cu $a_{e_1 \ldots e_n} \in K$.

a) După efectuarea unei substituţii cu alura indicată, f devine

$$\sum a_{e_1\dots e_n}(Y_1+X_n^{r_1})^{e_1}\cdots(Y_{n-1}+X_n^{r_{n-1}})^{e_{n-1}}X_n^{e_n}=$$

$$=\sum a_{e_1\dots e_n}\big(X_n^{r_1e_1+\cdots+r_{n-1}e_{n-1}+e_n}+\text{ polinom de grad mai mic în } X_n\big)\ .$$

Ideea este de a alege r_i suficient de mari astfel ca exponenţii maximi ai lui X_n din fiecare paranteză să fie distincţi. Se poate pune $r_i=t^i$ pentru t mai mare decât toţi exponenţii e_1, ..., e_n pentru care există coeficient $a_{e_1\dots e_n}$ nenul.

În cazul *b*) considerăm componentele omogene f_0, f_1, ..., f_m ale lui f, cu $f_j\in K[X_1,\dots,X_n]$ polinom nul sau omogen de grad j, $0\le j\le$ $\le m$, şi $f_m\neq 0$. Prin substituţia indicată se găseşte

$$f=f_m(c_1,\dots,c_{n-1},1)X_n^m+\text{ polinom de grad mai mic în } X_n\ .$$

Observăm că $f_m(X_1,\dots,X_{n-1},1)$ este polinom nenul întrucât f_m este polinom nenul şi omogen în X_1, ..., X_n. Un raţionament prin inducţie după numărul variabilelor conduce la concluzia că se pot găsi c_1, ..., $c_{n-1}\in K$ astfel încât $f_m(c_1,\dots,c_{n-1},1)\neq 0$. □

TEOREMA 2.3. *(Lema de normalizare) Fie A o algebră afină peste un corp K şi $I\subset A$ un ideal. Există numere naturale $h\le d$ şi elemente y_1, ..., $y_d\in A$ astfel încât*

a) *y_1, ..., y_d sunt algebric independente peste K,*
b) *A este $K[y_1,\dots,y_d]$-algebră finită,*
c) *$I\cap K[y_1,\dots,y_d]=(y_{h+1},\dots,y_d)$.*

Pentru K infinit, y_1, ..., y_h sunt combinaţii liniare cu coeficienţi în K de generatorii K-algebrei A.

DEMONSTRAŢIE. Concluzia anunţată este obţinută în mai mulţi paşi.

Pasul 1. Cazul în care A este inel de polinoame $K[X_1,\dots,X_n]$ şi I este ideal principal, generat de un polinom neconstant f.

În această situaţie se poate alege $d=n$, $h=n-1$, $y_n=f$ şi $y_1,\dots,y_{n-1}$ ca în lema 2.2. Din relaţia

$$0=f-y_n=cX_n^m+g_1X_n^{m-1}+\cdots+g_m-y_n$$

cu $g_i\in K[y_1,\dots,y_{n-1}]$ şi $c\in K$, $c\neq 0$, rezultă că X_n este întreg peste algebra $K[y_1,\dots,y_n]$. Întrucât $A=K[y_1,\dots,y_n][X_n]$, am obţinut condiţia *b*).

Elementele $y_1,\dots,y_n$ sunt algebric independente peste K pentru că în caz contrar corpul $K(y_1,\dots,y_n)$, şi odată cu el $K(X_1,\dots,X_n)$, ar avea gradul de transcendenţă peste K strict mai mic decât n.

Rămâne să stabilim proprietatea c). Vom arăta că are loc egalitatea $I \cap K[y_1, \ldots, y_d] = (y_n)$. Orice element $g \in I \cap K[y_1, \ldots, y_n]$ se scrie $g = fu$, cu $u \in A$. Conform condiţiei b), u verifică o relaţie de dependenţă întreagă peste $K[y_1, \ldots, y_n]$:

$$u^s + b_1 u^{s-1} + \cdots + b_s = 0 \ , \quad \text{unde } s > 0 \text{ şi } b_i \in K[y_1, \ldots, y_n].$$

De aici se obţine imediat egalitatea $g^s + b_1 y_n g^{s-1} + \cdots + b_s y_n^s = 0$, care conduce la concluzia că y_n divide g în inelul $K[y_1, \ldots, y_n]$. Am arătat, aşadar, $I \cap K[y_1, \ldots, y_n] \subseteq (y_n)$. Cum incluziunea contrară este evidentă, conchidem că proprietatea c) este satisfăcută de $h = n - 1$.

Pasul 2. A este inel de polinoame şi I este un ideal, nu neapărat principal.

Cazul $I = 0$ nu necesită justificare: se ia $h = d = n$ şi $y_i = X_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Putem presupune că I conţine un polinom neconstant f. Vom demonstra prin inducţie după numărul de variabile n.

Pentru $n = 1$, A este inel principal şi am tranşat acest caz la pasul precedent. Fie $n > 1$ şi $y_1, \ldots, y_n$ aleşi ca la Pasul 1 aplicat lui A şi idealului său generat de f. Invocând ipoteza de inducţie pentru urma idealului I pe inelul de polinoame $K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$, se găsesc elemente $t_1, \ldots, t_{d-1} \in K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ algebric independente peste K astfel încât $K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ este $K[t_1, \ldots, t_{d-1}]$-modul finit generat şi $I \cap K[t_1, \ldots, t_{d-1}] = (t_{h+1}, \ldots, t_{d-1})$ pentru un număr natural $h \leq d-1$ convenabil. Atunci $K[y_1, \ldots, y_n]$ este $K[t_1, \ldots, t_{d-1}, y_n]$-modul de tip finit şi deci A este $K[t_1, \ldots, t_{d-1}, y_n]$-modul finit generat. De aici se deduce că $d = n$ şi că $t_1, \ldots, t_{d-1}, y_n$ sunt algebric independente peste K. Dacă K este infinit, putem alege t_i $(i = 1, \ldots, h)$ combinaţii liniare de y_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ cu coeficienţi din K, încât primele h dintre elementele t_i se exprimă liniar în funcţie de $X_1, \ldots, X_n$.

Orice $h \in I \cap K[t_1, \ldots, t_{n-1}, y_n]$ se poate scrie sub forma $h = g + uy_n$, unde $g \in I \cap K[t_1, \ldots, t_{d-1}] = (t_{h+1}, \ldots, t_{d-1})$ şi $u \in K[t_1, \ldots, t_{n-1}, y_n]$. De aici se deduce că idealul $I \cap K[t_1, \ldots, t_{n-1}, y_n]$ este generat de t_{h+1}, $\ldots, t_{n-1}$, y_n.

Pasul 3. Cazul general: $A = K[X_1, \ldots, X_n]/J$, cu J ideal propriu.

Conform celor stabilite la Pasul 2, există un număr natural $d \leq n$ şi o subalgebră de polinoame $K[y_1, \ldots, y_n]$ a lui $K[X_1, \ldots, X_n]$ astfel încât $J \cap K[y_1, \ldots, y_n] = (y_{d+1}, \ldots, y_n)$, cu $y_1, \ldots, y_d$ combinaţii liniare de $X_1, \ldots, X_n$ dacă K este infinit. Întrucât $y_1, \ldots, y_d$ sunt algebric independente peste K, imaginea lui $K[y_1, \ldots, y_n]$ în A poate fi identificată cu o algebră de polinoame $K[Y_1, \ldots, Y_d]$. În plus, A este $K[Y_1, \ldots, Y_d]$-modul finit generat. Aplicăm Pasul 2 pentru urma idealului considerat $L := I \cap K[Y_1, \ldots, Y_d]$. Se găseşte o subalgebră de polinoame $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[Y_1, \ldots, Y_d]$ astfel încât această extindere este finită, $L \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$, unde $0 \leq h \leq d$, şi, în ipoteza că K este corp infinit, $t_1, \ldots, t_h$ sunt combinaţii liniare de $Y_1, \ldots, Y_d$, deci şi de imaginile lui $X_1, \ldots, X_n$ în A. Concluzia dorită rezultă observând că A este $K[t_1, \ldots, t_d]$-algebră finită datorită tranzitivităţii extinderilor finite. $\square$

Definiţie 2.4. Pentru o K-algebră afină nenulă A, subalgebra sa $K[y_1, \ldots, y_d]$ este numită *normalizare Noether* dacă $y_1, \ldots, y_d$ sunt algebric independente peste K şi A este $K[y_1, \ldots, y_d]$-modul de tip finit.

Există o versiune mai tare a lemei de normalizare, care permite tratarea unui lanţ finit de ideale dintr-o algebră afină. Enunţul şi demonstraţia se găsesc în [**13**] sau [**2**].

Lema de normalizare împreună cu teoremele Krull-Cohen-Seidenberg au aplicaţii diverse.

Corolar 2.5. *Fie $A \subseteq B$ o extindere de tip finit de inele, cu A domeniu de integritate. Există un element nenul a din A şi o A-subalgebră C a lui B, izomorfă (ca A-algebră) cu o A-algebră de polinoame, astfel încât extinderea $C_a \subseteq B_a$ este întreagă.*

Demonstraţie. Fie $S := A \setminus \{ 0 \}$ şi $z_1, \ldots, z_r$ un sistem de generatori ai lui B ca A-algebră. Atunci $S^{-1}B$ este algebră de tip finit peste corpul de fracţii $K = S^{-1}A$ al lui A. Aplicând lema de normalizare pentru idealul nul din $S^{-1}B$, se găsesc $x_1, \ldots, x_n \in S^{-1}B$ elemente algebric independente peste K astfel încât extinderea $K[x_1, \ldots, x_n] \subseteq$ $\subseteq B$ să fie întreagă. Imaginea în $S^{-1}B$ a fiecărui generator z_j verifică o relaţie de dependenţă întreagă de forma

$$\Big(\frac{z_j}{1}\Big)^{n_j} + \sum_{k<n_j} f_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\Big(\frac{z_j}{1}\Big)^k = 0 \text{ , unde } f_{kj} \in K[x_1, \ldots, x_n].$$

Alegem a un numitor comun pentru $x_1, \ldots, x_n$ şi toţi coeficienţii din polinoamele f_{kj}, obţinând relaţii de forma

$$az_j^{n_j} + \sum_{k<n_j} g_{kj} z_j^k = 0 \ , \ 1 \leq j \leq r,$$

unde g_{kj} sunt polinoame în $y_1 := ax_1, \ldots, y_n := ax_n$ cu coeficienţi în A. Prin urmare $az_1, \ldots, az_r$ sunt elemente întregi peste inelul $C :=$ $:= A[y_1, \ldots, y_n]$. Cum $y_1, \ldots, y_n$ sunt algebric independente peste A, rezultă că C este izomorfă cu o A-algebră de polinoame. În inelul $B_a = B[\frac{1}{a}] = A[z_1, \ldots, z_r][\frac{1}{a}]$ avem $z_j/1 = az_j/1 \cdot 1/a$, deci $z_1/1, \ldots, z_r/1$ sunt întregi peste C_a. $\square$

COROLAR 2.6. *Fie A domeniu de integritate, K corpul său de fracţii şi L/K o extindere de corpuri. Dacă L este A-algebră de tip finit, atunci L este extindere finită a lui K şi există $a \in A$, $a \neq 0$, astfel încât $K = A_a$.*

DEMONSTRAŢIE. Din corolarul precedent decurge existenţa unor elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ şi $a \in A$, $a \neq 0$, astfel încât $x_1, \ldots, x_n$ sunt algebric independente peste A, deci şi peste K, iar extinderea $A[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{a}] \subseteq L$ este întreagă. Dar singurele elemente inversabile dintr-un inel de polinoame cu coeficienţi într-un domeniu C sunt elementele inversabile din C. Folosind această observaţie pentru $C := A[\frac{1}{a}]$, rezultă $n = 0$ şi deci C este corp, conţinut în corpul de fracţii al lui A. Atunci $K = C = A_a$. Extinderea $K \subseteq L$ fiind întreagă şi de tip finit, ea este finită conform corolarului 1.5. □

PROPOZIŢIE 2.7. *Dacă $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$ este o normalizare Noether, atunci* dim $A=d$. *Dacă în plus A este domeniu de integritate, toate lanţurile maximale de ideale prime din A au lungime d.*

DEMONSTRAŢIE. Se ştie din teorema GU că $\dim K[y_1, \ldots, y_d] = \dim A$. Deoarece lanţul de ideale prime din $K[y_1, \ldots, y_d]$

$$0 \subset (y_1) \subset (y_1, y_2) \subset \ldots \subset (y_1, \ldots, y_d)$$

are lungimea d, obţinem $\dim A \geq d$. Vom arăta că pentru un lanţ arbitrar de ideale prime din A

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m \tag{10}$$

avem $m \leq d$.

Raţionăm prin inducţie după d. Notăm $P_i := Q_i \cap K[y_1, \ldots, y_d]$, $i = 0, \ldots, m$, şi notăm că în lanţul

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_m \tag{11}$$

nu sunt repetiţii (din cauza condiţiei INC, îndeplinită conform teoremei 1.18). Pentru $d = 0$ nu avem nimic de demonstrat: se aplică lema 1.20. Presupunem că $d \geq 1$ şi că aserţiunea a fost stabilită pentru algebrele de polinoame în mai puţin de d variabile. Evident putem presupune şi că $m \geq 1$.

Din lema de normalizare decurge existenţa unei normalizări Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ cu $P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$ pentru un anumit întreg $0 \leq h \leq d$. Din lema 1.15 şi din faptul că idealul P_1 este nenul rezultă $h < d$. De aici se deduce că $K[t_1, \ldots, t_h] \subseteq K[t_1, \ldots, t_d]/P_1$ este normalizare Noether căreia i se poate aplica ipoteza de inducţie, rezultând că lungimea lanţului de ideale prime

$$0 \subset P_2/P_1 \subset \ldots \subset P_m/P_1 \tag{12}$$

satisface inegalitatea $m-1 \leq h$. Prin urmare $m-1 \leq h \leq d-1$, adică $m \leq d$.

Să presupunem în plus că lanţul de ideale prime (10) este maximal dacă A este domeniu de integritate. Rezultă $Q_0 = 0$ şi $Q_m \in \operatorname{Max} A$. Vom arăta prin reducere la absurd că lanţul (11) este lanţ maximal de ideale prime din $K[y_1, \ldots, y_d]$. Presupunem că există un indice i, $0 \leq i < m$, şi un ideal prim conţinut strict în P_{i+1} şi care conţine strict P_i. Alegem o normalizare Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ astfel ca $P_i \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$ pentru un număr natural $h \leq d$. Atunci $K[t_1, \ldots, t_h] \subseteq K[t_1, \ldots, t_d]/P_i$ este normalizare Noether. Cum există un ideal prim nenul al inelului $K[t_1, \ldots, t_d]/P_i$ conţinut strict în P_{i+1}/P_i, înseamnă că în $K[t_1, \ldots, t_h]$ există un ideal prim nenul conţinut strict în $(P_{i+1}/P_i) \cap K[t_1, \ldots, t_h]$. Să observăm că $K[t_1, \ldots, t_h] \subseteq A/Q_i$ este de asemenea normalizare Noether. Din teorema GD rezultă că există un ideal prim între Q_i şi Q_{i+1}, ceea ce contrazice ipoteza că şirul (10) este saturat. Aşadar, lanţul (11) este într-adevăr saturat. Cum $P_0 = 0$ şi P_m este ideal maximal al lui $K[y_1, \ldots, y_d]$, se deduce că lanţul (11) este chiar maximal.

Demonstrăm acum $m = d$ prin inducţie după d. Cazul iniţial $d = 0$ este clar, deci presupunem $d \geq 1$. Considerăm o normalizare Noether $K[t_1, \ldots, t_d] \subseteq K[y_1, \ldots, y_d]$ pentru care $P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d] = (t_{h+1}, \ldots, t_d)$. Din corolarul 1.27 avem $\operatorname{ht}(P_1 \cap K[t_1, \ldots, t_d]) = \operatorname{ht} P_1 = 1$, ceea ce implică $h = d-1$. Atunci (12) este un lanţ maximal de ideale prime din $K[t_1, \ldots, t_{d-1}]$ căruia i se poate aplica ipoteza de inducţie pentru a conchide că are lungimea $d-1$. De aici rezultă $m = d$. □

Rezultatul tocmai demonstrat arată că algebrele afine au dimensiune finită. Vom arăta că există inele noetheriene de dimensiune infinită. Exemplul următor ne convinge că proprietatea domeniilor afine pusă în evidenţă în propoziţia precedentă nu este îndeplinită de orice domeniu de integritate.

Exemplu de domeniu noetheriene de dimensiune finită în care se găsesc lanţuri maximale de ideale prime de lungimi diferite.

Fie K un corp şi $A := K[[X]][Y]$. Considerăm idealul principal M_1 generat de $XY - 1$ şi $M_2 := (X, Y)$. Ambele sunt ideale maximale, întrucât A/M_1 este izomorf cu corpul $K[[X]]_X$, iar $A/M_2 \simeq K$. Se verifică uşor că $\operatorname{ht} M_1 = 1$, $\operatorname{ht} M_2 = 2$.

O construcţie simplă ce furnizează exemple de inele noetheriene de dimensiune infinită a fost expusă de M. Nagata. Acesta demonstrează un criteriu de noetherianitate (propoziţia 2.9 de mai jos) din care rezultă că pentru inelele semilocale, noetherianitatea este o proprietate locală.

LEMA 2.8. *Fie A un inel, I şi J două ideale ale lui A. Dacă* $IA_M = JA_M$ *pentru orice ideal maximal M al lui A, atunci $I = J$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $I \subseteq J$, concluzia rezultă din principiul local-global aplicat A-modulului J/I. Pentru a reduce cazul general la această situaţie, se foloseşte $I \subseteq I + J$ şi comutarea localizării cu sumele de module. □

PROPOZIŢIE 2.9. *Fie A un inel cu următoarele proprietăţi:*

a) A_M *este inel noetherian pentru orice* $M \in \operatorname{Max} A$,
b) orice element nenul al lui A este conţinut doar într-un număr finit de ideale maximale.

Atunci A este inel noetherian.

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că orice ideal nenul I este finit generat. Fie $M_1, \ldots, M_s$ toate idealele maximale ce conţin un element nenul a din I. Evident I nu este conţinut în alte ideale maximale. Pentru $i = 1, \ldots, s$ alegem o mulţime finită de elemente din I ale căror imagini în A_{M_i} generează IA_{M_i} şi notăm U reuniunea lor. Dacă J este idealul generat de mulţimea finită $U \cup \{ a \}$, avem $JA_M = IA_M$ pentru $M \in \{ M_1, \ldots, M_s \}$ şi $JA_M = A_M = IA_M$ pentru celelalte ideale maximale. Din lema precedentă se obţine $I = J$. □

EXEMPLU de inel noetherian de dimensiune infinită.

Fie $R := K[X_n : n \in \mathbb{N}]$ inelul de polinoame de o infinitate numărabilă de nedeterminate peste un corp K şi $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale pentru care şirul $(n_{i+1} - n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ este nemărginit. Pentru $j \in \mathbb{N}$ notăm P_j idealul lui R generat de X_i cu $n_j \le i < n_{j+1}$. Întrucât P_j este ideal prim, $S := \bigcap_{j\in\mathbb{N}}(R \setminus P_j)$ este sistem multiplicativ închis. Idealele maximale ale inelului de fracţii $A := S^{-1}R$ sunt de forma $M_j := P_jA$, $j \in \mathbb{N}$. Din izomorfismul $A_{M_j} \simeq K[X_{n_j}, X_{n_j+1}, \ldots, X_{n_{j+1}-1}]$ rezultă că A îndeplineşte condiţia *a*) din propoziţia precedentă. Un element nenul a al lui A provine dintr-un polinom f din R în care apar efectiv doar un număr finit de nedeterminate. Pentru indicii j pentru care n_j depăşeşte acest număr avem $f \notin P_j$, deci $a \notin M_j$. Conchidem că şi condiţia *b*) din ipoteza propoziţiei 2.9 este îndeplinită. În consecinţă, inelul A este noetherian.

COROLAR 2.10. *Fie $P \subset Q$ ideale prime ale unei algebre afine A. Toate lanţurile maximale de ideale prime de extremităţi P şi Q au aceeaşi lungime* $\dim A/P - \dim A/Q$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_m = Q$ un astfel de lanţ şi $B := A/P$. Lanţul saturat $0 \subset P_1/P \subset \ldots \subset P_m/P$ din B poate fi prelungit până la un lanţ maximal de ideale prime din B. Lungimea acestuia este dim B conform propoziţiei 2.7, iar porţiunea sa care începe cu Q/P corespunde unui lanţ maximal de ideale prime din algebra afină A/Q. Aşadar, $m = \dim A/P - \dim A/Q$. □

COROLAR 2.11. *Fie P_1, …, P_s idealele prime minimale ale K-algebrei afine A şi L_i corpul rezidual în P_i ($i = 1, \ldots, s$).*

a) $\dim A = \max\{ \operatorname{trdeg}_K L_i \,:\, i = 1, 2, \ldots, s \}$.

În particular, $\dim A = \operatorname{trdeg}_K L$ *dacă A este domeniu de integritate de corp de fracţii L.*

b) Dacă $\dim A/P_i = \dim A/P_j$ *pentru $1 \le i < j \le s$, atunci*

$$\dim A = \operatorname{ht} P + \dim A/P \text{ pentru orice } P \in \operatorname{Spec} A\,.$$

DEMONSTRAŢIE. Întrucât orice lanţ maximal de ideale prime din A începe cu un ideal prim minimal, este suficient să demonstrăm afirmaţiile pentru domenii de integritate. Pentru A domeniu se consideră o normalizare Noether $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq A$. Evident $d = \dim A$ coincide cu gradul de transcendenţă al lui L peste K. Relaţia de la b) rezultă din corolarul 2.10. □

COROLAR 2.12. *Dimensiunea unei K-algebre afine A Acoincide cu numărul maxim de elemente din A care sunt algebric independente peste K. Dacă $B \subset A$ este o altă K-algebră afină, atunci* $\dim B \le \dim A$.

DEMONSTRAŢIE. Notăm $d = \dim A$ şi observăm că din lema de normalizare rezultă că este suficient să arătăm că dacă $z_1, \ldots, z_m \in A$ sunt algebric independente peste K, atunci $m \le d$. Dacă $P_1, \ldots, P_s$ sunt idealele prime minimale ale lui A, avem

$$0 = \Big(\bigcap_{i=1}^{s} P_i\Big) \cap K[z_1, \ldots, z_m] = \bigcap_{i=1}^{s} (P_i \cap K[z_1, \ldots, z_m])$$

întrucât nu există elemente nilpotente nenule în inelul de polinoame $C := K[z_1, \ldots, z_m]$. Din această egalitate şi din faptul că C este domeniu de integritate se deduce existenţa unui indice i, $1 \le i \le s$, astfel ca $P_i \cap C = 0$. Prin urmare $C \subseteq A/P_i$. Notând cu L corpul de fracţii al lui A/P_i, din corolarul 2.11 se obţine

$$m = \operatorname{trdeg}_K C \le \operatorname{trdeg}_K L \le \dim A.$$

Pentru a demonstra ultima parte a concluziei, observăm că elementele din B care sunt algebric independente peste K rămân algebric independente când sunt considerate ca elemente ale lui A. □

COROLAR 2.13. *Fie A şi B două K-algebre afine nenule şi L/K o extindere de corpuri.*

a) $\dim A = \dim(L \otimes_K A)$, $\dim(A \otimes_K B) = \dim A + \dim B$.

b) Dacă A este domeniu de integritate, atunci

$$\dim A = \dim(L \otimes_K A)/P$$

pentru orice ideal prim minimal P al lui $L \otimes_K A$. Dacă şi B este domeniu de integritate, atunci

$$\dim(A \otimes_K B)/Q = \dim A + \dim B$$

pentru orice ideal prim minimal Q al lui $A \otimes_K B$.

DEMONSTRAŢIE. Se consideră normalizări Noether $K[y_1, \ldots, y_d] \subseteq$ $\subseteq A$ şi $K[z_1, \ldots, z_t] \subseteq B$. Folosind izomorfismele canonice

$$L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d] \simeq L[y_1, \ldots, y_d] \ ,$$

$$K[y_1, \ldots, y_d] \otimes_K K[z_1, \ldots, z_t] \simeq K[y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_t] \ ,$$

se verifică uşor că $L[y_1, \ldots, y_d] \subseteq L \otimes_K A$ şi $K[y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_t] \subseteq$ $\subseteq A \otimes_K B$ sunt normalizări Noether. Cu aceasta, deducerea formulelor de la punctul a) se încheie.

Pentru a demonstra b), notăm cu F corpul de fracţii al lui A şi folosim diagrama comutativă de inele cu morfisme injective canonice

$$\begin{tikzcd} L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d] \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes_K A \arrow[d] \\ L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d) \arrow[r] & L \otimes_K F \end{tikzcd}$$

Întrucât există o bază pentru F peste corpul $K(y_1, \ldots, y_d)$, rezultă că $L \otimes_K F$ este $L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d)$-modul liber. Prin urmare, orice element nenul din $L \otimes_K K(y_1, \ldots, y_d)$ este nondivizor al lui zero în $L \otimes_K F$. Deducem că $P \cap (L \otimes_K K[y_1, \ldots, y_d]) = 0$ pentru că P, fiind ideal prim minimal în $L \otimes_K A$, constă doar din divizori ai lui zero. Atunci $L[y_1, \ldots, y_d] \subseteq (L \otimes_K A)/P$ este normalizare Noether căreia i se aplică propoziţia 2.7 pentru a obţine prima dintre egalităţile de la b). A doua formulă de la b) se demonstrează asemănător cu ajutorul diagramei comutative

$$\begin{tikzcd} K[y_1, \ldots, y_d] \otimes_K K[z_1, \ldots, z_t] \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_K B \arrow[d] \\ K(y_1, \ldots, y_d) \otimes_K K(z_1, \ldots, z_t) \arrow[r] & F \otimes_K N \end{tikzcd}$$

unde N este corpul de fracţii al lui B. $\square$

Exerciţii.

1. În condiţiile şi notaţiile lemei de normalizare, arătaţi că pentru I ideal prim şi K corp de caracteristică zero există g_h un polinom în Y_h cu coeficienţi în $K(Y_{h+1}, \ldots, Y_n)$ astfel încât

$$Q(A/I) = K(Y_{h+1}, \ldots, Y_n)[Y_h]/(g_h) \ .$$

2. Fie f_1, …, f_n polinoame în nedeterminata T cu coeficienţi într-un corp K astfel încât $K[T]$ este extindere finită a subalgebrei $A := K[f_1, \ldots, f_n]$ şi $K(T) = K(f_1, \ldots, f_n)$. Arătaţi că T este element întreg peste A.

3. Funcţia Hilbert-Samuel

Teoria dimensiunii Krull a algebrelor afine este bine pusă la punct şi şi-a dovedit utilitatea în algebră şi geometria algebrică. Tentaţia de a o extinde la alte clase de inele este puternică. Reuşită în contextul următor.

O funcţie numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este numită *funcţie polinomială* (de grad d) dacă, pentru valori suficient de mari ale argumentului, ia aceleaşi valori ca şi un polinom (de grad d) de o nedeterminată cu coeficienţi raţionali.

În acest context este util a accepta convenţia ca gradul polinomului nul să fie -1. Este clar că există un singur polinom care coincide cu o funcţie polinomială; acest polinom se numeşte *polinomul asociat funcţiei polinomiale.*

Pentru a explicita definiţia, fixăm o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{Q}[X]$ peste $\mathbb{Q}$. Din motive ce vor transpare curând, este preferabil a considera baza formată din polinoamele

$$\binom{X}{k} := \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \quad \text{pentru } k \geq 1, \quad \binom{X}{0} := 1.$$

Aşadar, pentru o funcţie polinomială f de grad $d \geq -1$ există un număr întreg n_0 şi c_0, …, $c_d \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{pentru } n \geq n_0$$

şi $c_d \neq 0$ dacă $d \geq 0$.

Definim *operatorul diferenţă* Δ pe mulţimea funcţiilor numerice punând $(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Arătăm că Δf este o funcţie polinomială simultan cu f.

LEMA 3.1. *O funcţie numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este polinomială dacă şi numai dacă Δf este funcţie polinomială. Operatorul diferenţă Δ coboară gradul funcţiilor polinomiale nenule cu* 1.

DEMONSTRAŢIE. Dacă

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0,$$

cu $n_0 \in \mathbb{Z}$ convenabil ales, şi $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ cu c_d nenul dacă $d \geq 0$, atunci

$$(\Delta f)(n) = \sum_{k=0}^{d-1} c_{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{pentru } n \geq n_0$$

datorită binecunoscutei identităţi satisfăcute de coeficienţii binomiali

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Reciproc, dacă există întregii $d \geq -1$, n_0 şi numerele raţionale c_0, ..., c_d astfel încât $c_d \neq 0$ pentru $d \geq 0$ şi

$$(\Delta f)(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k} \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0,$$

atunci funcţia diferenţă Δf ia pentru $n \geq n_0$ aceleaşi valori ca şi Δg, unde $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ este funcţia polinomială definită prin formula

$$g(n) := \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{n}{k+1}, \ n \in \mathbb{Z}\ .$$

Prin urmare, pentru $n \geq n_0$ avem $f(n+1) - f(n) = g(n+1) - g(n)$, ceea ce înseamnă $f(n+1) - g(n+1) = f(n) - g(n) =: c$. Conchidem că f ia aceleaşi valori ca şi funcţia polinomială $g + c$ pentru toate valorile argumentului ce depăşesc n_0. $\square$

Să notăm $\Delta^0 f = f$, $\Delta^1 f = \Delta f$ şi $\Delta^t f = \Delta^{t-1}(\Delta f)$ pentru $t \geq 2$ întreg.

LEMA 3.2. *Pentru $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ funcţie numerică şi d un număr natural, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *există un întreg nenul c astfel încât $\Delta^d f(n) = c$ pentru $n \gg 0$,*
(*ii*) *f este funcţie polinomială de grad d.*

DEMONSTRAŢIE. Faptul că (*i*) este consecinţă a condiţiei (*ii*) rezultă imediat din lema precedentă. Implicaţia reciprocă se demonstrează prin inducţie după d.

Pasul iniţial $d = 0$ este clar. Presupunem în continuare $d > 0$ şi

$$\Delta^d f(n) = \Delta^{d-1}(f(n+1) - f(n)) = c,\ c \neq 0,\ \text{pentru } n \gg 0.$$

Din ipoteza de inducţie rezultă existenţa unui număr întreg n_0 şi a unui polinom $P \in \mathbb{Q}[X]$ de grad $d-1$ astfel încât $f(n+1) - f(n) = P(n)$ pentru $n \geq n_0$. Atunci

$$f(n+1) = f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n} P(k) \quad \text{pentru } n \geq n_0.$$

Suma din expresia precedentă este o funcţie polinomială de grad cu unu mai mare decât gradul lui P. □

Următorul rezultat clarifică ce polinoame din $\mathbb{Q}[X]$ iau valori întregi.

Lema 3.3. *Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad $d \geq 0$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *$P(n) \in \mathbb{Z}$ pentru orice n suficient de mare,*

(*ii*) *există întregii $c_0, \ldots, c_d$ astfel încât $c_d \neq 0$ şi*

$$P = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{X}{k},$$

(*iii*) *există întregii $e_0, \ldots, e_d$ astfel încât $e_d \neq 0$ şi*

$$P = \sum_{k=0}^{d} e_k \binom{X+k}{k}.$$

Demonstraţie. Echivalenţa afirmaţiilor (*ii*) şi (*iii*) se obţine cu ajutorul schimbării de variabilă $X \mapsto -X-1$, care arată $c_k = (-1)^k e_k$ pentru $k = 0, 1, \ldots, d$. Singura implicaţie ce necesită justificare este $(i) \Longrightarrow (ii)$. Vom proceda prin inducţie după d.

Situaţia este clară pentru $d = 0$. Presupunând adevărat rezultatul pentru $d-1$, din demonstraţia lemei 3.1 rezultă că ΔP este funcţie polinomială de grad $d-1$ pentru care

$$\Delta P(n) = \sum_{k=0}^{d-1} c_{k+1} \binom{n}{k} \ \text{ pentru } n \gg 0.$$

Conform ipotezei de inducţie, $c_1, \ldots, c_d$ sunt toate întregi. Demonstraţia se încheie observând

$$c_0 = P(n) - \sum_{k=1}^{d} c_k \binom{n}{k} \ \text{ pentru } n \gg 0.$$

□

Lăsăm ca un exerciţiu util demonstrarea relaţiilor $c_k = \Delta^k P(0)$ pentru $k = 0, 1, \ldots, d$.

Oricărei funcţii numerice $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ i se asociază o serie cu coeficienţi întregi $H(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)t^n$ numită *seria generatoare* a funcţiei f. Reciproc, având o serie $H(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ cu coeficienţi întregi, se poate defini o funcţie numerică punând $f(n) := a_n$ pentru toţi $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.4. *Fie $H(t) = \sum a_n t^n$ o serie Laurent cu coeficienţi întregi (i.e. $a_i = 0$ pentru $i \ll 0$) şi $d \in \mathbb{N}^*$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *există un polinom $P \in \mathbb{Q}[X]$ de grad $d-1$ astfel încât*

$$P(n) = a_n \quad \textit{pentru} \quad n \gg 0 \ ,$$

(*ii*) *există un polinom Laurent $Q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ astfel încât*

$$H(t) = Q(t)/(1-t)^d \qquad \textit{şi} \quad Q(1) \neq 0 \ .$$

Demonstraţie. Să presupunem condiţia (*i*) îndeplinită. Funcţia numerică $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definită prin formula $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}$, verifică relaţia

$$(1-t)^d H(t) = \sum_n \Delta^d f(n-d) t^n.$$

Din lema 3.2 rezultă că membrul drept (deci şi cel stâng) al acestei relaţii este un polinom Laurent $Q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Din $Q(1) = 0$ se obţine

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_n \Delta^d f(n-d) = \sum_n \big(\Delta^{d-1} f(n+1-d) - \Delta^{d-1} f(n-d)\big) = \\ &= \Delta^{d-1} f(n) \quad \text{pentru } n \gg 0, \end{aligned}$$

ceea ce contrazice lema 3.2. Aşadar, $Q(1) \neq 0$, ceea ce încheie demonstraţia faptului că (*ii*) este consecinţă a condiţiei (*i*).

Implicaţia reciprocă se demonstrează asemănător. □

Fie $B = \oplus_{n\geq 0} B_n$ un inel graduat, cu B_0 inel artinian. Presupunem că B este B_0-algebră de tip finit, generată de elemente de gradul întâi $b_1, \ldots, b_r \in B_1$. Unii autori folosesc denumirea de *inel graduat standard* sau *algebră omogenă* (îndeosebi dacă B_0 este corp). Pentru orice B-modul graduat $G = \oplus_{n\geq 0} G_n$ de tip finit, fiecare componentă G_n este modul finit generat peste inelul artinian B_0, deci are lungime finită.

Lema 3.5. *Funcţia numerică $H_G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definită prin formula $H_G(n) := l_{B_0}(G_n)$ este polinomială. Polinomul asociat funcţiei H_G are gradul strict mai mic decât numărul generatorilor B_0-algebrei B şi coeficientul dominant pozitiv.*

Definiţie 3.6. În condiţiile lemei precedente, funcţia polinomială $H_G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definită prin formula $H_G(n) := l_{B_0}(G_n)$ este numită *funcţia Hilbert a B-modulului graduat G.*

Demonstraţie. Raţionăm prin inducţie după r. În cazul $r = 0$, ceea ce înseamnă $B = B_0$ inel artinian, avem $G_n = 0$ pentru n suficient de mare, deci polinomul nul coincide aproape peste tot cu funcţia H_G. Presupunem acum că $r \geq 1$ şi că lema este valabilă pentru inelele graduate generate peste componenta de grad 0, presupusă a fi inel artinian, de $r - 1$ elemente omogene de gradul întâi .

Notăm $C := B_0[b_1, \ldots, b_{r-1}]$ subinelul lui B generat de b_1, …, b_{r-1} şi considerăm $\lambda : G \longrightarrow G$ omotetia lui G definită de b_r. Din şirul exact de B_0-module $0 \longrightarrow E_n \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n+1} \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow 0$, unde $E := \ker\ \lambda$ şi $F := \operatorname{coker}\ \lambda$, se obţine, folosind aditivitatea funcţiei lungime,

$$l_{B_0}(G_{n+1}) - l_{B_0}(G_n) = l_{B_0}(F_{n+1}) - l_{B_0}(E_n)\ .$$

Cum E şi F sunt C-module graduate pentru care concluzia lemei este valabilă, funcţia din membrul drept al acestei relaţii este funcţie polinomială de grad strict mai mic decât $r-1$. În membrul stâng figurează funcţia diferenţă pentru funcţia Hilbert asociată B-modulului G. Conform lemei 3.1 H_G este funcţie polinomială de grad $< (r-1)+1 = r$.

Pentru a justifica ultima afirmaţie, se observă că funcţia numerică H_G ia numai valori pozitive. Dacă polinomul asociat ar avea coeficientul dominant strict negativ, atunci ar lua valori strict negative pentru valori ale argumentului suficient de mari. □

Exemple concrete de inele graduate cu proprietăţile cerute se obţin pornind de la orice inel noetherian A şi de la un ideal al său I al cărui radical este intersecţie finită de ideale maximale. În aceste condiţii A/I este inel artinian. Pentru orice A-modul E cu proprietatea că E/IE este A/I-modul de tip finit, funcţia

$$n \mapsto HS_{E,I}(n) := l_{A/I}(E/I^nE) = l_A(E/I^nE)$$

este polinomială şi de grad cel mult egal cu numărul minim de generatori ai idealului I.

Într-adevăr,

$$\Delta HS_{E,I}(n) = l_{A/I}(I^nE/I^{n+1}E) = l_A(I^nE/I^{n+1}E)$$

este funcţia Hilbert a lui $B :=\mathrm{gr}_I(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ şi $G :=\mathrm{gr}_I(E) := \sum_{n\in\mathbb{N}} I^nE/I^{n+1}E$. Mai trebuie observat că inelul graduat B este generat peste componenta sa omogenă de grad zero $\mathrm{gr}_I^0(A) = A/I$ de clasele în $\mathrm{gr}_I^1(A) = I/I^2$ ale unui sistem minimal de generatori ai lui I.

Inelele graduate au fost considerate pentru prima oară de către Krull, în scopul de a putea folosi raţionamente uzuale în inele de polinoame în care se invocă gradul unui element şi se compară coeficienţi.

DEFINIŢIE 3.7. În condiţiile precizate mai sus, funcţia $HS_{E,I}$ se numeşte *funcţia Hilbert-Samuel asociată lui I şi E*. Vom nota cu $d(E)$ gradul funcţiei polinomiale $HS_{E,I}$.

Am evitat să folosim pentru gradul $d(E)$ o notaţie în care figurează idealul I nu numai pentru a simplifica notaţia, ci mai ales pentru că $d(E)$ depinde de *radicalul* lui I şi nu de idealul însuşi. Pentru a justifica această remarcă, să presupunem că J este un alt ideal al cărui radical este $\mathrm{Rad}_A(I)$. Atunci există numerele naturale s şi t astfel încât $J^s \subseteq I$ şi $I^t \subseteq J$. Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$l_A(E/J^nE) \leq l_A(E/I^{nt}E) \text{ şi } l_A(E/I^nE) \leq l_A(E/J^{ns}E) \ .$$

Rezultă inegalităţile

$$HS_{E,J}(n) \leq HS_{E,I}(nt) \leq HS_{E,J}(nst) \text{ pentru } \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

din care se deduce că polinoamele asociate funcţiilor $HS_{E,J}$ şi $HS_{E,I}$ au acelaşi grad.

TEOREMA 3.8. *(Lema Artin-Rees) Fie A un inel noetherian, I un ideal al său, E un A-modul finit generat şi F un submodul al lui E. Atunci există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$I^{n+s}E \cap F = I^n(I^sE \cap F) \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N} \ .$$

DEMONSTRAŢIE. Vom considera inelul graduat

$$\mathcal{R}_I(A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n \ ,$$

în care înmulţirea este definită în mod evident, şi $\mathcal{R}_I(A)$-modulul graduat

$$\mathcal{R}_I(E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^nE \ .$$

Deoarece I este A-modul finit generat, $\mathcal{R}_I(A)$ este A-algebră de tip finit, deci inel noetherian. Întrucât $\mathcal{R}_I(E)$ este $\mathcal{R}_I(A)$-modul de tip finit, rezultă că este modul noetherian. Atunci $\mathcal{R}_I(A)$-submodulul său graduat

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_n \ ,$$

unde $F_n := I^nE \cap F$, este generat de elemente omogene $x_1, \ldots, x_k$. Fie $e_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_i \in I^{e_i}E \cap F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ şi $s := \max\{ e_1, \ldots, e_k \}$.

Evident $I^nF_s \subseteq F_{n+s}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi vom arăta că această incluziune este de fapt egalitate.

Orice $x \in F_{n+s}$ se scrie sub forma $x = b_1x_1+\cdots+b_kx_k$ cu $b_i \in \mathcal{R}_I(A)$ omogen de grad $n+s-e_i$, adică $b_i \in I^{n+s-e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Rezultă $x \in I^nF_s$. □

În restul secţiunii A şi I vor fi un inel, respectiv un ideal, cu proprietăţile precizate anterior definiţiei 3.7.

Lema 3.9. *Fie* $0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$ *un şir exact de* A*-module în care* G *este de tip finit. Atunci are loc relaţia*

$$HS_{G,I} = HS_{E,I} + HS_{F,I} + \phi \ ,$$

unde ϕ *este o funcţie polinomială de grad strict mai mic decât gradul lui* $HS_{E,I}$.

Demonstraţie. Din şirul exact

$$0 \longrightarrow E/(I^nG \cap E) \longrightarrow G/I^nG \longrightarrow F/I^nF \longrightarrow 0$$

şi din aditivitatea lungimii rezultă

$$l_A(G/I^nG) = l_A(E/(I^nG \cap E)) + l_A(F/I^nF) \ .$$

Din lema Artin-Rees se cunoaşte că există un număr natural s astfel ca

$$I^{n+s}E \subseteq I^{n+s}G \cap E = I^n(E \cap I^sG) \subseteq I^nE \ \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \ .$$

Prin urmare

$$HS_{E,I}(n+s) \geq HS_{I^sG\cap E,I}(n) \geq HS_{E,I}(n) \ .$$

Astfel $HS_{E,I}$ şi $HS_{I^sG\cap E,I}$ au acelaşi termen de grad maxim, încât diferenţa lor ϕ este fie nulă, fie funcţie polinomială de grad strict mai mic decât $d(E)$. □

Corolar 3.10. *Fie* E *un* A*-modul noetherian şi* $F := \mathrm{Ann}_E(a)$, *cu* $a \in A$. *Atunci funcţia polinomială* $HS_{F,I} - HS_{E/aE,I}$ *are gradul strict mai mic decât cel al funcţiei* $HS_{E,I}$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din lema anterioară aplicată şirurilor exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} aE \longrightarrow 0 \quad \text{şi} \quad 0 \longrightarrow aE \longrightarrow E \longrightarrow E/aE \longrightarrow 0,$$

unde α este omotetia definită de a. □

Exerciţii.

1. Fie I un ideal în $A := K[X_1, \dots, X_r]$, $r \geq 1$. Definim *funcţia Hilbert afină* prin relaţia

$$\mathrm{AH}_I(n) := \dim_K(A_{\leq n}/I_{\leq n}) \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

unde $A_{\leq n} := \{ f \in A \mid \text{grad } f \leq n \}$ şi analog $I_{\leq n}$.

a) Arătaţi că pentru orice număr natural n are loc egalitatea

$$\mathrm{AH}_I(n) = \mathrm{H}_{A[Y]/I_h}(n) \ ,$$

unde I_h este imaginea idealului I prin morfismul de omogenizare

$$\phi : A \longrightarrow A[Y] \ , \ \phi(f) := Y^{\text{grad } f} f\big(X_1 \cdot Y^{-1}, \dots, X_r \cdot Y^{-1}\big) \ .$$

b) Calculaţi funcţia Hilbert afină pentru cazul particular

$$I := (X^3 + Y^2 + Z) \leq K[X, Y, Z] \ .$$

4. Dimensiunea Krull a inelelor semilocale noetheriene

Începem prin a consemna o consecinţă directă a teoremei I.4.5:

Propoziţie 4.1. *Fie A inel noetherian şi J radicalul să Jacobson. Pentru orice ideal I al lui A, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *A este inel semilocal şi există întregul pozitiv t astfel încât $J^t \subseteq I \subseteq J$,*
(*ii*) *orice ideal maximal conţine I şi orice ideal prim ce conţine I este maximal,*
(*iii*) *$I \subseteq J$ şi A/I este inel artinian.*

Definiţie 4.2. Un ideal I cu proprietăţile din propoziţia precedentă se numeşte *ideal de definiţie al lui A*.

În această secţiune vom folosi implicit următoarele ipoteze şi notaţii: A este un inel semilocal noetherian, J este radicalul Jacobson al lui A, iar E este un A-modul finit generat.

Propoziţie 4.3. *Pentru un număr natural n, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \dots, a_n \in J$ astfel ca $l_A(E/(a_1E + \cdots + a_nE)) < \infty$,*
(*ii*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \dots, a_n \in J$ astfel că orice prim asociat A-modulului $E/(a_1E + \cdots + a_nE)$ este maximal,*
(*iii*) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \dots, a_n \in J$ astfel că orice prim din suportul A-modulului $E/(a_1E + \cdots + a_nE)$ este maximal,*

(iv) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel ca* $\dim_A(E/(a_1E + \cdots + a_nE)) = 0$,

(v) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ ale căror imagini în $B := A/\mathrm{Ann}\,(E)$ generează un ideal de definiţie pentru acest inel semilocal,*

(vi) *n este cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că există $a_1, \ldots, a_n \in J$ astfel încât idealul* $\mathrm{Ann}\,(E) + (a_1, \ldots, a_n)A$ *conţine o putere a radicalului Jacobson al lui A.*

Definiţie 4.4. Notăm $s(E)$ numărul definit prin proprietăţile echivalente din rezultatul precedent. O familie de elemente $a_1, \ldots, a_{s(E)}$ din J se numeşte *sistem de parametri ai lui E* dacă

$$l_A(E/(a_1E + \cdots + a_{s(E)}E)) < \infty .$$

Definiţie 4.5. Un inel noetherian şi local (A, M, K) se numeşte *regulat* dacă M este generat de un sistem de parametri ai lui A. Un sistem de parametri care generează idealul maximal al unui inel local regulat se numeşte *sistem regulat de parametri*.

Lema 4.6. *Fie $b_1, \ldots, b_t \in J$ şi $F := E/(b_1E + \cdots + b_tE)$. Atunci $s(F) \geq s(E) - t$, cu egalitate dacă şi numai dacă $b_1, \ldots, b_t$ fac parte dintr-un sistem de parametri ai lui F.*

Demonstraţie. Dacă $c_1, \ldots, c_{s(F)}$ este un sistem de parametri ai lui F, atunci modulul

$$F/(c_1F + \cdots + c_{s(F)}F) \simeq E/(b_1E + \cdots + b_tE + c_1E + \cdots + c_{s(F)}E)$$

este de lungime finită. Prin urmare, $t + s(F) \geq s(E)$. Dacă inegalitatea precedentă devine egalitate, înseamnă că $b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_{s(F)}$ este un sistem de parametri ai lui E. Reciproc, dacă există $b_{t+1}, \ldots, b_{s(E)}$ astfel încât $b_1, \ldots, b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{s(E)}$ este sistem de parametri ai lui E, atunci

$$E/(b_1E + \cdots + b_{s(E)}E) \simeq F/(b_{t+1}F + \cdots + b_{s(E)}F)$$

este de lungime finită. Atunci $s(F) \leq s(E) - t$. □

Rezultatul următor are o importanţă deosebită. Din el rezultă imediat că orice inel semilocal noetherian are dimensiunea finită. Alte consecinţe ale sale vor fi enunţate după ce îl vom fi demonstrat.

Teorema 4.7. *(Teorema Krull-Chevalley-Samuel) Pentru A un inel semilocal noetherian cu J radicalul Jacobson şi E un A-modul finit generat au loc egalităţile* $\dim_A E = d(E) = s(E)$.

DEMONSTRAŢIE. Pentru a stabili inegalitatea $d(E) \leq s(E)$, considerăm $a_1, \ldots, a_{s(E)} \in J$ un sistem de parametri ai lui E. Atunci există numărul natural t astfel încât $J^t E \subseteq a_1 E + \cdots + a_{s(E)} E \subseteq JE$. Se foloseşte definiţia 3.7 pentru inelul $A/\mathrm{Ann}(E)$ şi se observă că funcţia Hilbert-Samuel asociată lui E şi J coincide cu funcţia Hilbert-Samuel asociată lui $E/\mathrm{Ann}(E)E$ şi $(J+\mathrm{Ann}(E))/\mathrm{Ann}(E)$. Se ştie de asemenea că gradul funcţiei Hilbert-Samuel nu depăşeşte numărul minim de generatori ai unui ideal al cărui radical coincide cu radicalul idealului în care se calculează funcţia Hilbert-Samuel.

Inegalitatea $\dim_A E \leq d(E)$ se justifică prin recurenţă după gradul $d(E)$. Pentru $d(E) = 0$, valoarea $HS_{E,J}(n)$ este aceeaşi pentru n suficient de mare, deci $l_A(J^n E/J^{n+1}E) = 0$ pentru $n \gg 0$. Aceasta înseamnă că $J^n E = J^{n+1} E$ şi, conform lemei lui Nakayama, implică $J^n E = 0$. Cu alte cuvinte, $\mathrm{Ann}(E)$ conţine J^n şi deci $\dim\, E = 0$. Fie $d(E) > 0$. Următorul pas al demonstraţiei va fi reducerea la cazul în care E este imagine omomorfă integră a inelului. Se alege P_0 un ideal prim minimal peste $\mathrm{Ann}(E)$ astfel încât $\dim\,(A/P_0) = \dim\, E$. Cum E este modul de tip finit peste un inel noetherian, există $x \in E$ al cărui anulator coincide cu P_0. Atunci $A/P_0 \simeq Ax =: F$. Deoarece $\dim\, E =$ $=\dim\, F$ (conform alegerilor făcute) şi $d(F) \leq d(E)$ (conform lemei 3.9), este suficient a justifica relaţia $\dim\, F \leq d(F)$. Vom arăta că lungimea oricărui lanţ strict ascendent de ideale prime $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_t$ este cel mult $d(F)$. Afirmaţia este evident adevărată pentru $t = 0$. Fie $t \geq 1$. Atunci există $a \in P_1 \setminus P_0$. Din

$$P_0 \subset \mathrm{Ann}(F/aF) = P_0 + aA \subseteq P_1$$

rezultă

$$\dim F - 1 \geq \dim(F/aF) \geq t - 1\ . \tag{13}$$

Observăm că a este nondivizor al lui zero pe F (echivalent, omotetia definită de a pe F este injectivă) şi folosim corolarul 3.10 pentru a conchide

$$d(F/aF) \leq d(F) - 1\ . \tag{14}$$

Se poate invoca ipoteza de inducţie pentru a trage concluzia

$$\dim(F/aF) \leq d(F/aF)\ . \tag{15}$$

Din relaţiile (13)–(15) rezultă $t \leq d(F)$, echivalentă cu relaţia dorită $\dim\, E \leq d(E)$.

Pentru a proba inegalitatea $s(E) \leq \dim\, E$, folosim din nou un raţionament inductiv, de această dată după dimensiunea modulului. Pentru $\dim E = 0$, inelul $A/\mathrm{Ann}(E)$ este noetherian şi zero-dimensional, deci de lungime finită. Prin urmare, $s(E) = 0$. Fie $\dim\, E \geq 1$ şi o descompunere primară redusă $\mathrm{Rad}_A(\mathrm{Ann}(E)) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, unde

Q_i sunt ideale prime numerotate astfel încât dim (A/Q_j) = dim E dacă şi numai dacă $1 \le j \le r$, pentru un anumit întreg r cuprins între 1 şi s. Cum nici unul dintre idealele Q_j nu este maximal, există $a \in J \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_r)$. De aici decurge dim $E \ge$ dim $(E/aE) + 1$. Din lema precedentă ştim $s(E) \le s(E/aE) + 1$, deci ipoteza de inducţie este îndeplinită de E/aE: $s(E/aE) \le$ dim (E/aE). Prin urmare

$$s(E) \le s(E/aE) + 1 \le \dim(E/aE) + 1 \le \dim E\ .$$

$\square$

COROLAR 4.8. *În condiţiile teoremei Krull-Chevalley-Samuel, pentru orice $a \in A$ are loc inegalitatea* $\dim E \le \dim(E/aE) + 1$*, iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă a nu aparţine nici unui ideal prim* $P \supseteq \mathrm{Ann}\,(E)$ *cu proprietatea* $\dim(E) = \dim(A/P)$.

COROLAR 4.9. *Dimensiunea unui inel semilocal este egală cu numărul minim de elemente din radicalul Jacobson care generează un ideal de definiţie al inelului.*

COROLAR 4.10. *Dacă (A, M, K) este un inel local şi noetherian, dimensiunea lui A nu depăşeşte rangul K-spaţiului vectorial M/M^2:*

$$\dim A \le \mu(M) = \mathrm{edim}\ (A)\ ,$$

cu egal dacă şi numai dacă inelul este regulat.

DEMONSTRAŢIE. Din lema lui Nakayama rezultă că un sistem de elemente $a_1, \ldots, a_d$ din M ale căror clase modulo M^2 formează o bază a K-spaţiului vectorial M/M^2 generează pe M. Apoi se aplică rezultatul precedent. $\square$

COROLAR 4.11. *Fie B un inel noetherian, P un ideal prim al său şi $n \in \mathbb{N}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(*i*) $\dim(B_P) \le n$,

(*ii*) *există $b_1, \ldots, b_n \in B$ astfel încât P este un ideal prim minimal care conţine idealul generat de aceste elemente.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă (*i*) este îndeplinită, există $b_1, \ldots, b_n \in B$ şi $s \in B \setminus P$ astfel încât $b_1/s, \ldots, b_n/s$ generează în B_P un ideal PB_P-primar. Din corespondenţa dintre idealele prime ale unui inel şi cele ale unui localizat al său rezultă condiţia (*ii*).

Reciproc, datorită corespondenţei amintite, din condiţia (*ii*) rezultă că $(b_1, \ldots, b_n)B_P$ este ideal PB_P-primar. Se aplică din nou corolarul 4.9.
$\square$

Cazul particular $n = 1$ al rezultatului precedent este cunoscut sub numele de

TEOREMA IDEALULUI PRINCIPAL A LUI KRULL. *Un ideal prim al unui inel noetherian este de înălţime cel mult unu dacă şi numai dacă este divizor prim minimal al unui ideal principal.*

COROLAR 4.12. *Orice ideal prim minimal peste un nondivizor al lui zero are înălţimea unu.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $P \in \operatorname{Spec} A$ un ideal prim minimal peste $a \notin \mathrm{Z}(A) = \cup\{\, Q \,:\, Q \in \operatorname{Ass} A \,\}$. Din teorema idealului principal rezultă $\operatorname{ht} P \leq 1$. Dacă $\operatorname{ht} P = 0$, atunci $P \in \operatorname{Min} A \subseteq \operatorname{Ass} A$, deci P constă numai din divizori ai lui zero. Dar prin ipoteză P conţine un nondivizor al lui zero, anume a. □

COROLAR 4.13. *Într-un inel noetherian, lanţurile descrescătoare de ideale prime sunt staţionare.*

DEMONSTRAŢIE. Într-adevăr, idealul iniţial al unui astfel de lanţ este finit generat. Conform teoremei idealului principal, înălţimea acestui ideal nu depăşeşte cardinalul unui sistem de generatori, deci lanţul considerat este staţionar. □

COROLAR 4.14. *Pentru un domeniu noetherian B, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *B este inel semilocal de dimensiune cel mult* 1,
(ii) *B_f este corp pentru orice element nenul f din radicalul Jacobson al lui B,*
(iii) *există un element nenul f în B astfel ca B_f să fie corp.*

DEMONSTRAŢIE. Din (i) rezultă că $\operatorname{Spec} B = \{\, 0 \,\} \cup \operatorname{Max} B$ este o mulţime finită. Condiţia (ii) este evident îndeplinită dacă B este corp. În caz contrar, pentru f nenul din radicalul Jacobson, singurul ideal prim al lui B_f este idealul nul.

Să presupunem acum că B_f este corp, unde $f \neq 0$. Atunci f aparţine tuturor idealelor prime nenule din B. Fie $P_1, \ldots, P_n$ toate idealele prime minimale peste f. Vom arăta că fiecare dintre ele este ideal maximal în B. Dacă există $M \in \operatorname{Max} B$ şi $b \in M \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_n)$, din ipoteza integrităţii inelului B şi din corolarul 4.12 rezultă că orice ideal prim Q minimal peste bB are înălţimea 1. Prin urmare Q este minimal peste idealul fB, deci ar trebui să coincidă cu unul dintre idealele $P_1, \ldots, P_n$, ceea ce este exclus întrucât $b \in Q$, iar b nu aparţine mulţimii $P_1 \cup \ldots \cup P_n$. □

PROPOZIŢIE 4.15. *Pentru orice ideal I al unui inel noetherian B au loc relaţiile*

$$\operatorname{ht} I \leq \mu(I/I^2) \leq \mu(I) \leq \mu(I/I^2) + 1 \ .$$

Demonstraţie. Din lema lui Nakayama se obţine $\mu(I_P/I_P^2) = \mu(I_P)$ pentru orice $P \in \mathrm{V}(I)$, iar din teorema idealului principal rezultă ht $(I_P) \leq \mu(I_P)$. Cum prin localizare numărul de generatori nu creşte, se deduce ht $I \leq \mu(I/I^2)$.

Inegalitatea din mijloc este consecinţă directă a definiţiei.

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta, considerăm elemente $a_1, \ldots, a_n$ din I ale căror clase modulo I^2 formează un sistem minimal de generatori pentru B/I-modulul I/I^2. Notăm $C := B/(a_1, \ldots, a_n)B$, $L := I/(a_1, \ldots, a_n)B$ şi observăm că $L = L^2$. Vom arăta că orice ideal idempotent este principal, generat de un element idempotent.

Fie $b_1, \ldots, b_s$ un sistem de generatori ai lui L. Egalitatea $L = L^2$ este echivalentă cu $b_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} b_j$, $i = 1, \ldots, s$, pentru nişte elemente $c_{ij} \in L$. Acest sistem este echivalent cu $\sum_{j=1}^{s} (\delta_{ij} - c_{ij}) b_j = 0$, $i = 1, \ldots, s$, unde δ_{ij} desemnează simbolulul lui Kronecker. Înmulţind cu adjuncta matricei sistemului, se găseşte în anulatorul idealului L un element de forma $1 - e$, cu $e \in L$. Relaţiile $e(1-e) \in L\mathrm{Ann}\, L = 0$ şi $(1-e)b_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$, implică $e = e^2$ şi $L = eC$.

Demonstraţia propoziţiei se încheie observând că din faptul că L este principal rezultă că I este generat de preimaginea generatorului lui L împreună cu $a_1, \ldots, a_n$. $\square$

Vom preciza comportarea dimensiunii Krull la schimbarea inelului. În demonstraţii vom folosi o construcţie prin care un inel se scufundă în inelul endomorfismelor unui modul.

Fie A un inel comutativ şi E un A-modul. Operaţiile de adunare şi compunere a morfismelor înzestrează $\mathrm{End}_A(E) := \mathrm{Hom}_A(E, E)$ cu o structură de inel necomutativ. Inelul A-endomorfismelor lui E este A-algebră via morfismul de inele $\theta : A \longrightarrow \mathrm{End}_A(E)$ definit prin $\theta(a)(x) := a \cdot x$ pentru $a \in A$ şi $x \in E$. Morfismul $\theta(a)$ este omotetia lui E determinată de a. Subinelul $\mathrm{Im}\, \theta$ al inelului A-endomorfismelor lui E este evident izomorf cu $A/\mathrm{Ann}(E)$.

Propoziţie 4.16. *Fie $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ un morfism local între inele locale noetheriene, E un A-modul de tip finit şi F un B-modul finit generat. Atunci*

$$\dim_B(E \otimes_A F) \leq \dim_A(E) + \dim_{B \otimes_A K}(F \otimes_A K)\ .$$

În particular, $\dim B \leq \dim A + \dim\, (B \otimes_A K)$.

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi cazul particular $E = A$, $F = B$.

Considerăm $a_1, \ldots, a_s \in M$ un sistem de parametri ai lui A. Idealul I generat în A de aceste elemente este M-primar, prin urmare

$\mathrm{Rad}_B(IB) = \mathrm{Rad}_B(MB)$. Aşadar,

$$\dim_B(B/IB) = \dim_B(B/MB) = \dim_B(B \otimes_A K),$$

întrucât $B/MB \simeq B \otimes_A K$ şi dimensiunea unui inel coincide cu dimensiunea redusului său, obţinut prin factorizarea radicalului lui zero.

Pe de altă parte, din lema 4.6 se cunoaşte relaţia $s(B) \leq s(A) + s(B/IB)$. Folosind teorema Krull-Chevalley-Samuel, se obţine

$$\dim B \leq \dim A + \dim(B \otimes_A K).$$

Trecem la demonstrarea cazului general. Din $\mathrm{Ann}_B(E \otimes_A F) \supseteq \mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B$ rezultă

$$\dim_B(E \otimes_A F) \leq \dim_B B/(\mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B)\ . \qquad (16)$$

Din corespondenţa dintre idealele inelului B şi cele ale imaginii sale omomorfe $B \otimes_A K$ se deduce

$$\dim_{B \otimes_A K}(F \otimes_A K) = \dim_B(F \otimes_A K),$$

iar prin definiţie

$$\dim_A(E) = \dim_A(A/\mathrm{Ann}_A(E)).$$

Cum $F \otimes_A K \simeq F \otimes_B (B \otimes_A K)$, iar F şi $B \otimes_A K$ sunt B-module finit generate, avem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Supp}_B(F \otimes_A K) &= \mathrm{Supp}_B(F) \cap \mathrm{Supp}_B(B \otimes_A K) = \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F)) \cap \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(B \otimes_A K)) = \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F)) \cap \mathrm{V}(MB) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_B(F) + MB) \\
&= \mathrm{Supp}_B(B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)).
\end{aligned}$$

Două module finit generate cu suporturile egale au aceeaşi dimensiune, astfel că

$$\dim_B(F \otimes_A K) = \dim_B(B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)). \qquad (17)$$

Acum se aplică relaţia demonstrată în cazul anterior inelelor

$$\overline{A} := A/\mathrm{Ann}_A(E) \text{ şi } \overline{B} := B/(\mathrm{Ann}_B(F) + \mathrm{Ann}_A(E)B),$$

observând că fibra lui $\overline{B}$ în idealul maximal $M\overline{A}$ este tocmai $B/(\mathrm{Ann}_B(F) + MB)$. □

Corolar 4.17. *Fie* $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ *un morfism local între inele locale noetheriene.*

a) Dacă MB *este ideal* N*-primar, atunci* $\dim B \leq \dim A$.

b) Dacă A *este domeniu de integritate, iar* $\dim B = \dim A$*, atunci* u *este morfism injectiv.*

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă din faptul că în aceste condiţii MB este ideal de definiţie pentru B.

b) Şirul de inegalităţi

$$\dim\ B \leq \dim\ A/\ker u \leq \dim\ A$$

arată că nucleul morfismului u este inclus într-un ideal prim minimal al lui A dacă $\dim B = \dim A$. □

Lema 4.18. *Un morfism de inele $u : A \longrightarrow B$ are proprietatea GD dacă şi numai dacă pentru orice ideal prim P din A şi orice divizor prim minimal Q al lui PB, urma lui Q pe Q este P.*

Demonstraţie. Să presupunem că morfismul are proprietatea GD, că P est un ideal prim din A, iar $Q \in \mathrm{Min}_B(B/PB)$. Din $PB \subseteq Q$ rezultă $P \subseteq Q \cap A$. Dacă această incluziune este strictă, proprietatea GD asigură existenţa unui ideal prim Q_1 în B conţinut strict în Q şi a cărui urmă pe A este P. Atunci $PB \subseteq Q_1$, astfel încât Q nu este prim minimal peste PB.

Reciproc, să considerăm $P_1 \subset P_2$ ideale prime în A şi $Q_2 \in \mathrm{Spec}(B)$ astfel că $P_2 = Q_2 \cap A$. Cum $P_1B \subseteq P_2B \subseteq Q_2$, se găseşte $Q_1 \in \mathrm{Min}(B/P_1B)$ conţinut în Q_2. Nu putem avea $Q_1 = Q_2$ pentru că urmele lor pe A sunt distincte. □

Propoziţie 4.19. *Un morfism plat are proprietatea GD.*

Demonstraţie. Fie $P \in \mathrm{Spec}\ A$ şi $Q \in \mathrm{Spec}\ B$ un divizor prim al lui PB (*i.e.* $Q \in \mathrm{Ass}_B(B/PB)$). Vom arăta $Q \cap A = P$. Deoarece B/PB este A/P-modul plat, putem presupune $P = 0$. Atunci orice element al lui Q este divizor al lui zero în B, iar elementele lui A nu sunt divizori ai lui zero în B, întrucât B este A-modul plat. Prin urmare, $Q \cap A = 0$. □

Corolar 4.20. *Fie $u : (A, M, K) \longrightarrow (B, N, L)$ un morfism local între inele locale noetheriene. Dacă u are proprietatea GD, atunci*

$$\dim B = \dim A + \dim(B \otimes_A K)\ .$$

Demonstraţie. Fie $s = \dim(B \otimes_A K)$ şi $N = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_s$ un lanţ maximal de ideale prime, cu $Q_s \supseteq MB$. Din relaţiile $M = N \cap A \supseteq Q_i \cap A \supseteq M$ rezultă că toate idealele Q_i stau peste M. Dacă $\dim A = \mathrm{ht}(M) = r$, există un lanţ de ideale prime $M \supset P_1 \supset \ldots \supset P_r$ în A. Conform proprietăţii GD, în B există un lanţ de ideale prime $Q_s \supset Q_{s+1} \supset \ldots \supset Q_{s+r}$ astfel încât $Q_{s+j} \cap A = P_j$, $(1 \leq j \leq r)$. Existenţa acestui lanţ de lungime $r+s$ în Spec B înseamnă $\dim B = \mathrm{ht}\, N \geq r + s$. □

Continuăm studierea comportării dimensiunii la operaţiile uzuale din algebra comutativă.

PROPOZIŢIE 4.21. *Fie* (A, M, K) *un inel local, noetherian, de dimensiune* d *şi* $a_1, \ldots, a_t \in M$. *Atunci* $a_1, \ldots, a_t$ *fac parte dintr-un sistem de parametri ai lui* A *dacă şi numai dacă* $\dim(A/(a_1, \ldots, a_t)A) = = d - t$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $B := A/(a_1, \ldots, a_t)A$, $N := M/(a_1, \ldots, a_t)A$. Să presupunem că $a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_d$ este un sistem de parametri ai lui A. Atunci clasele lui $a_{t+1}, \ldots, a_d$ în B generează un ideal N-primar, prin urmare $d - t \geq \dim B$. Fie acum $b_1, \ldots, b_s$ un sistem de parametri ai lui B, în particular generatori ai unui ideal N-primar, care conţine o putere a lui N. Preimaginile lor în A împreună cu $a_1, \ldots, a_t$ generează un ideal care conţine o putere a lui M, deci este ideal M-primar. Aceasta înseamnă că $s + t \geq \dim A$.

Reciproc, fie $c_1, \ldots, c_{d-t} \in M$ ale căror clase în B generează un ideal N-primar. Ca mai sus se ajunge la concluzia că $(c_1, \ldots, c_{d-t}, a_1, \ldots, a_t)A$ este ideal M-primar. Acest ideal fiind generat de $d = \dim A$ elemente, înseamnă că $c_1, \ldots, c_{d-t}, a_1, \ldots, a_t$ este un sistem de parametri ai lui A. □

COROLAR 4.22. *Dacă* $a \in M$ *este un nondivizor al lui zero în inelul local noetherian* (A, M, K), *atunci* $\dim\,(A/aA) = \dim\,A - 1$. *În particular, a face parte dintr-un sistem de parametri.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice divizor prim minimal P al idealului aA avem $\mathrm{ht}\,P = 1$ conform corolarului 4.12. Alegem $P \in \mathrm{Min}\,(A/aA)$ astfel încât $\dim\,(A/aA) = \dim\,(A/P)$. Atunci

$$\dim A - 1 \leq \dim\,(A/aA) = \dim\,(A/P) \leq \dim\,A - \mathrm{ht}\,P = \dim\,A - 1\ .$$

□

Pentru a putea găsi dimensiunea unui inel de polinoame, vom demonstra în prealabil câteva rezultate ce prezintă interes în sine. Pentru orice ideal $I \leq A$ notăm cu $I^* := IA[X]$ extinsul său, iar cu $I^{**} := I^* + XA[X]$ idealul inelului de polinoame generat de nedeterminată şi de idealul considerat. Se observă că extinsul oricărui $P \in \mathrm{Spec}\,A$ este ideal prim întrucât $A[X]/P^* \simeq (A/P)[X]$ şi orice inel de polinoame cu coeficienţi într-un domeniu de integritate este încă inel integru. De asemenea, P^{**} este ideal prim deoarece $A[X]/P^{**} \simeq A/P$. În plus $P^{**} \cap A = P = P^* \cap A$.

LEMA 4.23. *Fie $A[X]$ inelul de polinoame într-o nedeterminată peste un inel noetherian A. Pentru orice ideal $I \leq A$ avem*

$$\mathrm{ht}\,(IA[X]) = \mathrm{ht}\,(I)\ ,\ \mathrm{ht}\,\big((I,X)A[X]\big) = \mathrm{ht}\,(I) + 1\ .$$

DEMONSTRAŢIE. Cum $A[X]$ este A-modul plat, fiind liber, rezultă că morfismul $A \longrightarrow A[X]$ are proprietăţile LO şi GD (*cf.* demonstraţia propoziţiei 4.19). De aici rezultă uşor că dacă P este un divizor prim minimal al lui I, atunci P^* este un divizor prim minimal al lui I^*, iar P^{**} este un divizor prim minimal al lui I^{**}. Reciproc, dacă Q este un divizor prim minimal al lui I^*, resp. I^{**}, atunci $P := Q \cap A$ este un divizor prim minimal al lui I şi $Q = P^*$, resp. $Q = P^{**}$. Conchidem că este suficient să demonstrăm lema pentru $I = P$ ideal prim.

Pentru orice lanţ strict ascendent $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_t$ de ideale prime din A, extensiile formează un lanţ ascendent $P_0^* \subset P_1^* \subset \ldots \subset P_t^*$ fără repetiţii (deoarece $P_i^* \cap A = P_i$). De aici decurge relaţia $\mathrm{ht}\ P^* \geq$ $\geq \mathrm{ht}\ P$. Evident P^* este conţinut strict în P^{**}, deci $\mathrm{ht}\ P^{**} \geq \mathrm{ht}\ (P^*)+1$. Întrucât X este nondivizor al lui zero în $A[X]_{P^{**}}$, din corolarul 4.22 rezultă $\mathrm{ht}\ (P^{**}) = \dim A[X]_{P^{**}} = \dim\ (A[X]_{P^{**}}/(X))+1 = \dim A_P+1$ $= \mathrm{ht}\ P+1$. Prin urmare $\mathrm{ht}\ P^* \leq \mathrm{ht}\ P$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

LEMA 4.24. *Fie $A[X]$ inelul de polinoame într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un inel comutativ A şi $P \in \mathrm{Spec}\ A$. Dacă Q_1, Q_2, $Q_3 \in \mathrm{Spec}\ A[X]$ au proprietăţile $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3$ şi $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A =$ $= Q_3 \cap A = P$, atunci $Q_1 = Q_2$ sau $Q_2 = Q_3$.*

DEMONSTRAŢIE. Idealele prime din $A[X]$ care se contractă la un ideal prim P din A fixat sunt exact acele $Q \in \mathrm{Spec}\ A[X]$ care conţin P^* şi au proprietatea că preimaginea idealului Q/P^* prin compunerea morfismelor canonice

$$A/P \longrightarrow (A/P)[X] \simeq A[X]/P^*$$

este idealul nul din A/P.

Dar pentru un domeniu de integritate D de corp de fracţii K există o corespondenţă bijectivă între $\mathrm{Spec}\ K[X]$ şi mulţimea

$$\{Q \in \mathrm{Spec}\ \ D[X]\ :\ Q \cap (D \backslash \{0\}) = \emptyset\} = \{Q \in \mathrm{Spec}\ \ D[X]\ :\ Q \cap D = 0\}\ .$$

Inelul de polinoame într-o variabilă cu coeficienţi într-un corp fiind inel principal, rezultă că orice ideal prim nenul din $K[X]$ este maximal. Aceasta înseamnă că în $A[X]$ nu există lanţuri de lungime cel puţin doi formate din ideale prime cu aceeaşi urmă pe A. $\square$

TEOREMA 4.25. *Fie X o nedeterminată peste un inel noetherian A. Atunci* $\dim A[X] = \dim A + 1$.

Demonstraţie. Din lema 4.23 rezultă $\dim A[X] \geq \dim A + 1$, astfel că demonstraţia s-a încheiat pentru un inel A de dimensiune infinită.

Din lema 4.24 se deduce $\dim A[X] \leq 2 \dim A + 1$, deci inelul de polinoame are dimensiunea finită simultan cu inelul de coeficienţi. Fie $n := \dim A[X]$ şi $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_n$ un lanţ de ideale prime din $A[X]$. Notăm $P_i := Q_i \cap A$, $i = 0, \ldots, n$ şi $j := \max\{ i : P_i = P_{i+1} \}$. Folosind din nou lema 4.24, rezultă $Q_j = P_j^*$, iar lema 4.23 implică $j = \operatorname{ht} Q_j = \operatorname{ht} P_j$. De aici obţinem

$$\dim A \geq \operatorname{ht} P_j + \dim(A/P_j) \geq \operatorname{ht} Q_j + (n-j-1) = n-1 = \dim A[X] - 1 .$$

□

Corolar 4.26. *Dacă A este inel noetherian, atunci*

$$\dim A[X_1, \ldots, X_n] = \dim A + n .$$

În particular, dimensiunea unui inel de polinoame cu coeficienţi într-un corp coincide cu numărul nedeterminatelor.

Încheiem secţiunea cu un exemplu de domeniu noetherian în care nu toate lanţurile maximale de ideale prime au aceeaşi lungime.

Exemplu. Fie K un corp şi $A := K[[X]][Y]$ inelul de polinoame în Y cu coeficienţi în inelul seriilor formale în X peste K. Idealele $M := (X, Y)A$ şi $N := (XY - 1)A$ sunt maximale în A şi au înălţimea $\operatorname{ht} M = 2$, $\operatorname{ht} N = 1$.

Într-adevăr, izomorfismul evident $A/M \simeq K$ arată că M este ideal maximal, iar $0 \subset YA \subset M$ este un lanţ saturat de ideale prime. Pe de altă parte $K[[X]]$ este domeniu local de dimensiune unu, iar X generează unicul său ideal maximal. Din corolarul 4.11 rezultă că $A/N \simeq K[[X]]_X$ este corp, încât $N \in \operatorname{Max} A$. Înălţimea lui N este unu pentru că $XY - 1$ este nondivizor al lui zero şi se poate aplica corolarul 4.12.

Exerciţii.

1. Fie P un ideal prim de înălţime n într-un inel noetherian A. Atunci există $a_1, \ldots, a_n \in A$ astfel încât :
   a) P este ideal prim minimal peste $(a_1, \ldots, a_n)A$,
   b) orice ideal prim minimal peste $(a_1, \ldots, a_k)A$, $1 \leq k \leq n$, are înălţimea k.

2. Fie K un corp, $A := K[X, Y, Z]/(XY, XZ) = K[x, y, z]$ şi $P := (y, z)A$.
   a) Să se arate că P este ideal prim.
   b) Să se calculeze $\operatorname{ht} P$ şi $\dim A$.

3. a) Să se arate că un ideal prim din $\mathbb{Z}[X]$ este generat fie de un număr natural prim, fie de un polinom neconstant şi ireductibil, fie de $p \in \mathbb{Z}$ număr prim şi $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}$ a cărui imagine în inelul $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ este polinom ireductibil.

b) Să se identifice idealele maximale ale inelului $\mathbb{Z}[X]$ printre idealele prime descrise la punctul a).

Bibliografie

[1] T. Albu, Ş. Raianu, *Lecţii de algebră comutativă*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1984.
[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, 10 vol., Hermann, Paris, 1961–1967.
[3] Al. Brezuleanu, N. Radu, *Lecţii de algebră, III, Algebra locală*, Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1982.
[4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
[5] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
[6] T. Dumitrescu, A remark on going-down, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.)*, **30(78)**(1986), 213–216.
[7] D. Eisenbud, Subrings of Artinian and Noetherian rings, *Math. Ann.*, **185**(3)(1970), 244–247.
[8] I. Kaplansky, *Fields and rings*, Univ of Chicago Press, Chicago, 1969.
[9] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Allyn & Bacon, Boston, 1970.
[10] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.
[11] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin, New York, 1980.
[12] M. Nagata, *Local rings*, Wiley, New York, 1962.
[13] N. Radu, *Inele locale*, vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1968.
[14] N. Radu, *Lecţii de algebră. Descompunere primară în inele comutative.* Ed. Univ. Bucureşti, Bucureşti, 1981.
[15] J.-P. Serre, *Algèbre locale. Multiplicités*, LNM 11, Springer, Heidelberg, 1965.
[16] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, 2 vol., Van Nonstrand, Princeton, 1958 şi 1960.