FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015
Logică matematică şi computaţională

Examen parţial

(P1) [3 puncte] Să se demonstreze că următoarele mulţimi sunt numărabile:

(i) mulţimea formulelor ce nu conţin variabilele $v_0, \ldots, v_{100}$.

(ii) mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq m$, $f(n) = f(m)$.

(iii) mulţimea tuturor clauzelor.

(P2) [1 punct] Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se dea o definiţie recursivă a funcţiei $z_n : Form \to \mathbb{N}$ care asociază oricărei formule φ numărul de apariţii ale variabilei v_n în φ.

(P3) [1,5 puncte] Să se demonstreze:

(i) $\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi$;

(ii) $\varphi \vee \psi \sim (\varphi \to \psi) \to \psi$;

(iii) $\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)$.

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi).$$

(P5) [1 punct] Să se aducă următoarea formulă la FND prin transformări sintactice:

$$(v_5 \wedge v_6) \to \neg(((v_6 \wedge v_7) \vee \neg v_5) \wedge (v_4 \vee v_5)).$$

(P6) [1 punct] Fie $G : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definită, pentru orice $x, y, z \in \{0,1\}$, prin:

$$G(x,y,z) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq y \leq z, \\ 0, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Să se găsească o formulă φ în FND şi una ψ în FNC cu $F_\varphi = F_\psi = G$.

(P7) [2 puncte]

(i) Găsiţi $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma)$ are 6 elemente.

(ii) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma)$ are n elemente.

(P8) [2 puncte] Fie Γ o mulţime de formule. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

(P9) [2 puncte] Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare şi $\Gamma := \{\psi \in Form \mid e \vDash \psi\}$.

(i) Demonstraţi că:

  (a) Γ este consistentă.

  (b) Pentru orice formulă φ, avem $\varphi \in \Gamma$ sau $\neg\varphi \in \Gamma$.

  (c) Pentru orice formulă φ, dacă $\Gamma \vDash \varphi$, atunci $\varphi \in \Gamma$.

(ii) Găsiţi toate modelele lui Γ.