FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015
Logică matematică și computațională

Examen parțial

(P1) [3 puncte] Să se demonstreze că următoarele mulțimi sunt numărabile:

(i) mulțimea formulelor ce nu conțin variabilele $v_0, \ldots, v_{100}$.

(ii) mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq m$, $f(n) = f(m)$.

(iii) mulțimea tuturor clauzelor.

Demonstrație:

(i) Notăm mulțimea din enunț cu A. Avem că $V' = \{v_n \mid n \geq 101\}$ este numărabilă, via bijecția $f : \mathbb{N} \to V'$, $f(n) = v_{n+101}$. Știm că $Form$ este numărabilă și fie $g : Form \to \mathbb{N}$ o bijecție. De asemenea, avem $V' \subseteq A \subseteq Form$, incluziuni cărora le corespund funcțiile injective $i_1 : V' \to A$ și $i_2 : A \to Form$. Atunci $i_1 \circ f : \mathbb{N} \to A$ și $g \circ i_2 : A \to \mathbb{N}$ sunt injecții, deci, aplicând Teorema Cantor-Bernstein, A este numărabilă.

(ii) Notăm mulțimea din enunț cu C. Pentru orice $m, p \in \mathbb{N}$, notăm $B_{(m,p)} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{ pentru orice } n \geq m, f(n) = p\}$. Aceste mulțimi sunt numărabile, deoarece putem găsi bijecțiile $\psi_{(m,p)} : B_{(m,p)} \to \mathbb{N}^m$, $\psi_{(m,p)}(f) := (f(0), \ldots, f(m-1))$. Mai departe, scriem:

$$C = \bigcup_{(m,p) \in \mathbb{N}^2} B_{(m,p)}$$

deci și C este numărabilă.

(iii) Notăm mulțimea din enunț cu E. Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, notăm $D_m := \{C \text{ clauză} \mid Var(C) \subseteq \{v_0, ..., v_m\}\}$. Cum $D_m \subseteq \mathcal{P}(\{v_0, ..., v_m, \neg v_0, ..., \neg v_m\})$, D_m este finită (pentru orice m). Notăm $F := \{\{v_n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, mulțime care este numărabilă, deci, aplicând (S3.4).(i), avem că pentru orice m, $D_m \cup F$ este numărabilă. Mai departe, scriem:

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (D_m \cup F)$$

deci și E este numărabilă.

(P2) [1 punct] Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se dea o definiţie recursivă a funcţiei $z_n : Form \to \mathbb{N}$ care asociază oricărei formule φ numărul de apariţii ale variabilei v_n în φ.

Demonstraţie: Se observă că $z_n : Form \to \mathbb{N}$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & z_n(v) & = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v = v_n, \\ 0, & \text{altminteri}, \end{cases} \\ (R1) & z_n((\neg\varphi)) & = z_n(\varphi), \\ (R2) & z_n((\varphi \to \psi)) & = z_n(\varphi) + z_n(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = \mathbb{N}$ şi pentru

$$\begin{array}{rl} G_0 : V \to \mathbb{N}, & G_0(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v = v_n, \\ 0, & \text{altminteri}, \end{cases} \\ G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & G_\neg(n) = n, \\ G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & G_\to(n, m) = n + m. \end{array}$$

pentru a concluziona că z_n este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2).

(P3) [1,5 puncte] Să se demonstreze:

(i) $\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi$;

(ii) $\varphi \vee \psi \sim (\varphi \to \psi) \to \psi$;

(iii) $\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)$.

Demonstraţie:

(i) Fie e o evaluare oarecare. Avem că $e \vDash \neg\varphi$ ddacă $e^+(\neg\varphi) = 1$ ddacă $e^+(\varphi) = 0$ ddacă $e^+(\varphi) \leq e^+(\neg\varphi)$ ddacă $e^+(\varphi \to \neg\varphi) = 1$ ddacă $e \vDash \varphi \to \neg\varphi$.

(ii) Fie e o evaluare oarecare. Presupunem întâi că $e \vDash \varphi \vee \psi$. Atunci $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1$ sau $e^+(\psi) = 1$. În primul caz,

$$e^+((\varphi \to \psi) \to \psi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \to e^+(\psi) = (1 \to e^+(\psi)) \to e^+(\psi) = e^+(\psi) \to e^+(\psi) = 1.$$

În al doilea caz,

$$e^+((\varphi \to \psi) \to \psi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \to e^+(\psi) = (e^+(\varphi) \to 1) \to 1 = 1.$$

Invers, acum, presupunem că $e^+((\varphi \to \psi) \to \psi) = 1$. Atunci, fie $e^+(\varphi \to \psi) = 0$, deci $e^+(\varphi) = 1$, fie $e^+(\psi) = 1$. În fiece caz, $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$.

(iii) Avem că ori $e^+(\psi) = 1$, ori $e^+(\psi) = 0$, i.e. $e^+(\neg\psi) = 1$. Adică ori $e^+(\varphi \to \psi) = 1$, ori $e^+(\varphi \to \neg\psi) = 1$. Deci $e^+((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)) = 1$.

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi).$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg\varphi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(2)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(3)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	(S7.3)
(4)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (3)
(5)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(S7.2).(iv)
(6)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Propoziţia 1.48 pentru (4), (5)
(7)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (2), (6)
(8)	$\{\psi \to \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	Teorema deducţiei
(10)		$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \to \neg\varphi)$	(MP): (9), (S7.3)
(11)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$.	Definiţia lui "$\wedge$".

(P5) [1 punct] Să se aducă următoarea formulă la FND prin transformări sintactice:

$$(v_5 \wedge v_6) \to \neg(((v_6 \wedge v_7) \vee \neg v_5) \wedge (v_4 \vee v_5)).$$

Demonstraţie: Avem:

$$\begin{aligned}
&(v_5 \wedge v_6) \to \neg(((v_6 \wedge v_7) \vee \neg v_5) \wedge (v_4 \vee v_5)) \\
\sim&\neg(v_5 \wedge v_6) \vee \neg(((v_6 \wedge v_7) \vee \neg v_5) \wedge (v_4 \vee v_5)) \\
\sim&\neg(v_5 \wedge v_6) \vee \neg((v_6 \vee \neg v_5) \wedge (v_7 \vee \neg v_5) \wedge (v_4 \vee v_5)) \\
\sim&\neg v_5 \vee \neg v_6 \vee \neg(v_6 \vee \neg v_5) \vee \neg(v_7 \vee \neg v_5) \vee \neg(v_4 \vee v_5) \\
\sim&\neg v_5 \vee \neg v_6 \vee (\neg v_6 \wedge \neg\neg v_5) \vee (\neg v_7 \wedge \neg\neg v_5) \vee (\neg v_4 \wedge \neg v_5) \\
\sim&\neg v_5 \vee \neg v_6 \vee (\neg v_6 \wedge v_5) \vee (\neg v_7 \wedge v_5) \vee (\neg v_4 \wedge \neg v_5) \qquad \text{(FND).}
\end{aligned}$$

(P6) [1 punct] Fie $G : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definită, pentru orice $x, y, z \in \{0,1\}$, prin:

$$G(x,y,z) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \le y \le z, \\ 0, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Să se găsească o formulă φ în FND şi una ψ în FNC cu $F_\varphi = F_\psi = G$.

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al lui G.

ε_0	ε_1	ε_2	$G(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui G şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.72 şi 1.74, că un exemplu de φ este:

$$(v_0 \land v_1 \land v_2) \lor (\neg v_0 \land v_1 \land v_2) \lor (\neg v_0 \land \neg v_1 \land v_2) \lor (\neg v_0 \land \neg v_1 \land \neg v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui G şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.73 şi 1.74, obţinem că un exemplu de ψ este:

$$(\neg v_0 \lor \neg v_1 \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1 \lor \neg v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1 \lor v_2) \land (v_0 \lor \neg v_1 \lor v_2).$$

(P7) [2 puncte]

(i) Găsiţi $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma)$ are 6 elemente.

(ii) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma)$ are n elemente.

Demonstraţie: Demonstrăm punctul (ii), i.e. pentru n nenul general.
Iau $\Gamma := \{v_k \to v_{k+1} \mid 0 \leq k \leq n-3\} \cup \{v_k \mid k \geq n-1\}$.
Definesc $f : \{1, \ldots, n\} \to Mod(\Gamma)$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, prin:

$$f(i)(v_j) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } j \geq i-1, \\ 0, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Arătăm că f este bine definită, i.e. că pentru orice i, $f(i) \vDash \Gamma$. Fie întâi k între 0 şi $n-3$. Avem că $f(i)^+(v_k \to v_{k+1}) = 1$ ddacă $f(i)(v_k) \leq f(i)(v_{k+1})$, ceea ce este adevărat pentru că $f(i)$-urile au fost definite "crescător". Acum, fie $k \geq n-1 \geq i-1$, deci $f(i)(v_k) = 1$, ceea ce ne trebuia.
Funcţia f este clar injectivă, din faptul că pentru $i < j$, am $1 = f(i)(v_{i-1}) > f(j)(v_{i-1}) = 0$.

Vrem să arătăm că f este surjectivă. Fie $e \vDash \Gamma$. Atunci $e(v_k) \leq e(v_{k+1})$, pentru orice k între 0 şi $n-3$, şi $e(v_k) = 1$, pentru $k \geq n-1$. Aşadar, e este "crescătoare", porneşte de la 0 şi atinge sigur valoarea 1, deci există un rang x de unde ia valoarea 1. Rămâne că $e = f(x+1)$. Găsind această bijecţie f, avem că $Mod(\Gamma)$ are n elemente.

(P8) [2 puncte] Fie Γ o mulţime de formule. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Demonstraţie: (i)$\Rightarrow$(ii) Fie $\varphi \in Form$. Deoarece Γ este nesatisfiabilă, avem că $Mod(\Gamma) = \emptyset$. Atunci $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$, adică $\Gamma \vDash \varphi$.
(ii)$\Rightarrow$(iii) Evident.
(iii)$\Rightarrow$(iv) Deoarece $\bot$ este nesatisfiabilă.
(iv)$\Rightarrow$(i) Presupunem că Γ are un model $e : V \to \{0,1\}$. Atunci e este model al lui $\bot$, contradicţie.

(P9) [2 puncte] Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare şi $\Gamma := \{\psi \in Form \mid e \vDash \psi\}$.

(i) Demonstraţi că:

  (a) Γ este consistentă.

  (b) Pentru orice formulă φ, avem $\varphi \in \Gamma$ sau $\neg\varphi \in \Gamma$.

  (c) Pentru orice formulă φ, dacă $\Gamma \vDash \varphi$, atunci $\varphi \in \Gamma$.

(ii) Găsiţi toate modelele lui Γ.

Demonstraţie:

(i) (a) Deoarece e este model al lui Γ, rezultă că Γ este satisfiabilă, deci consistentă.

  (b) Fie φ o formulă. Avem două cazuri:

    (1) $e^+(\varphi) = 1$, adică $e \vDash \varphi$. Prin urmare, $\varphi \in \Gamma$.
    (2) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\neg\varphi) = 1$, aşa că $e \vDash \neg\varphi$. Prin urmare, $\neg\varphi \in \Gamma$.

(c) Presupunem că $\Gamma \vDash \varphi$. Deoarece $e \vDash \Gamma$, rezultă că $e \vDash \varphi$, deci $\varphi \in \Gamma$.

(ii) Demonstrăm că e este unicul model al lui Γ. Fie $e^* : V \to \{0, 1\}$ un model arbitrar al lui Γ. Fie $v \in V$. Avem două cazuri:

(a) $e(v) = 1$, adică $v \in \Gamma$. Rezultă că $e^*(v) = 1$.

(b) $e(v) = 0$, deci $v \notin \Gamma$. Atunci, $\neg v \in \Gamma$. Rezultă că $e^*(\neg v) = 1$, deci $e^*(v) = 0$.

Aşadar, $e = e^*$.