FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

Exerciţii suplimentare

1 Săptămâna 1

(S1) Fie A, B, C mulţimi. Demonstraţi că

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Demonstraţie: În primul rând, iau $x \in A \times (B \cup C) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B \cup C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ sau $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ cu $x = (a, y)$ sau există $a \in A$ şi $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff x \in A \times B$ sau $x \in A \times C$ $\iff x \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
Apoi, iau $x \in A \times (B \cap C) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B \cap C$ cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi y element şi al lui B, şi al lui C cu $x = (a, y) \iff$ există $a \in A$ şi $y \in B$ cu $x = (a, y)$ şi există $a \in A$ şi $y \in C$ cu $x = (a, y) \iff x \in A \times B$ şi $x \in A \times C \iff x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. $\square$

(S2) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulţimi ale unei mulţimi X şi fie $B, C \subseteq X$. Se ştie:

(i) pentru orice $i \in I$, $A_i \cap B = A_i \cap C$;

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Arătaţi că $B = C$.
Demonstraţie: Fie $x \in B$. Cum $B \subseteq X$, am $x \in X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Deci există un $i \in I$ astfel încât $x \in A_i$, de unde obţinem $x \in A_i \cap B = A_i \cap C$, ca urmare $x \in C$. Am arătat $B \subseteq C$. Analog se arată $C \subseteq B$, de unde rezultă $B = C$. $\square$

(S3) Să se arate asociativitatea compunerii relaţiilor.

Demonstraţie: Fie $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, $S \subseteq C \times D$ trei relaţii. Vrem $(R \circ Q) \circ S = R \circ (Q \circ S)$. Fie $(a, d) \in (R \circ Q) \circ S$. Atunci există $c \in C$ cu $(a, c) \in R \circ Q$ şi $(c, d) \in S$. Din faptul că $(a, c) \in R \circ Q$ avem că există $b \in B$ cu $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in Q$. Din faptul că $(b, c) \in Q$ şi $(c, d) \in S$, avem $(b, d) \in Q \circ S$. Cum $(a, b) \in R$, $(a, d) \in R \circ (Q \circ S)$. Analog se arată incluziunea inversă. □

(S4) Fie X, Y două mulţimi şi $f : X \to Y$ o funcţie. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulţimi ale lui X şi $(B_i)_{i \in J}$ o familie de submulţimi ale lui Y. Arătaţi:

(i) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$;

(ii) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ (iar dacă f este injectivă, avem "=" în loc de "⊆");

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{i \in J} B_i) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i)$;

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i \in J} B_i) = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(B_i)$.

Demonstraţie:

(i) Fie $a \in Y$. Avem:

$$\begin{aligned} a \in f(\textstyle\bigcup_{i \in I} A_i) &\Leftrightarrow \text{ există } d \in \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i \text{ a.î. } f(d) = a \\ &\Leftrightarrow \text{ există } d \in X, \text{ există } i \in I \text{ a.î. } d \in A_i, f(d) = a \\ &\Leftrightarrow \text{ există } i \in I, \text{ există } d \in A_i \text{ a.î. } f(d) = a \\ &\Leftrightarrow \text{ există } i \in I \text{ a.î. } a \in f(A_i) \\ &\Leftrightarrow a \in \textstyle\bigcup_{i \in I} f(A_i) \end{aligned}$$

(ii) Fie $a \in Y$. Avem:

$$\begin{aligned} a \in f(\textstyle\bigcap_{i \in I} A_i) &\Rightarrow \text{ există } d \in \textstyle\bigcup_{i \in I} A_i \text{ a.î. } f(d) = a \\ &\Rightarrow \text{ există } d \in X \text{ a.î. pentru orice } i \in I, d \in A_i \text{ şi } f(d) = a \\ &\Rightarrow \text{ pentru orice } i \in I, \text{ există } d \in X \text{ a.î. } d \in A_i \text{ şi } f(d) = a \\ &\Rightarrow \text{ pentru orice } i \in I, \text{ există } d \in A_i \text{ a.î. } f(d) = a \\ &\Rightarrow \text{ pentru orice } i \in I, a \in f(A_i) \\ &\Rightarrow a \in \textstyle\bigcap_{i \in I} f(A_i) \end{aligned}$$

Am demonstrat că $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

Presupunem acum că f este injectivă.

Fie $a \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Atunci, pentru orice $i \in I$, $a \in f(A_i)$, deci pentru orice $i \in I$ există un $d_i \in A_i$ cu $f(d_i) = a$. Arătăm că toate aceste d_i-uri sunt egale. Iau $i, j \in I$ şi ştiu că $f(d_i) = a = f(d_j)$. Dar f este injectivă, deci $d_i = d_j$. Putem nota cu d, aşadar, valoarea comună a tuturor d_i-urilor. Deci există acest d, ce, din cele anterioare, pentru orice $i \in I$, am $d = d_i \in A_i$ şi $f(d) = f(d_i) = a$. Aşadar, $d \in \bigcap_{i \in I} A_i$ şi $a = f(d) \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$. Am demonstrat că $\bigcap_{i \in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i \in I} A_i)$ şi deci că $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

(iii) Fie $a \in X$. Avem:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(\textstyle\bigcup_{i \in J} B_i) \quad & \Leftrightarrow f(a) \in \textstyle\bigcup_{i \in J} B_i \\ & \Leftrightarrow \text{ există } i \in J, f(a) \in B_i \\ & \Leftrightarrow \text{ există } i \in J, a \in f^{-1}(B_i) \\ & \Leftrightarrow a \in \textstyle\bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

(iv) Fie $a \in X$. Avem:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(\textstyle\bigcap_{i \in J} B_i) \quad & \Leftrightarrow f(a) \in \textstyle\bigcap_{i \in J} B_i \\ & \Leftrightarrow \text{ pentru orice } i \in J, f(a) \in B_i \\ & \Leftrightarrow \text{ pentru orice } i \in J, a \in f^{-1}(B_i) \\ & \Leftrightarrow a \in \textstyle\bigcap_{i \in J} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

□

(S5) Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$ prin $g(x) = x^2$. Determinaţi:

(i) imaginea directă a intervalului $(0, 2)$ prin funcţia $\log_2$;

(ii) imaginea directă a intervalului $(-1, 3]$ prin funcţia g;

(iii) imaginea inversă a intervalului $(-1, 3]$ prin funcţia $\log_2$;

(iv) imaginea inversă a intervalului $(-1, 3]$ prin funcţia g.

Demonstraţie:

(i) $\log_2((0, 2)) = (-\infty, 1)$.

(ii) $g((-1, 3]) = [0, 9]$.

(iii) $\log_2^{-1}((-1, 3]) = (\frac{1}{2}, 8]$.

(iv) $g^{-1}((-1, 3]) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

□

2 Săptămâna 2

(S6) Să se demonstreze că funcţia de numărare diagonală a lui Cantor

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

este bijectivă.

Demonstraţie: Considerăm funcţia ajutătoare $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$\varphi(n) := \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prin calcul direct, obţinem, pentru orice n, că $\varphi(n+1) - \varphi(n) = n+1$, deci φ e strict crescătoare.

Cum în plus $\varphi(0) = 0$, avem că pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există un unic $n_m \in \mathbb{N}$ cu

$$\varphi(n_m) \leq m < \varphi(n_m + 1) = \varphi(n_m) + n_m + 1.$$

Din prima inegalitate, obţinem $m - \varphi(n_m) \geq 0$. Din ultima inegalitate, obţinem

$$n_m + \varphi(n_m) - m > -1,$$

deci $n_m + \varphi(n_m) - m \geq 0$.

Ca să arătăm că f este surjectivă, luăm un $m \in \mathbb{N}$ arbitrar. Notăm:

$$i_m := m - \varphi(n_m) \in \mathbb{N}$$

$$j_m := n_m + \varphi(n_m) - m \in \mathbb{N}$$

Deci $i_m + j_m = n_m$ şi $f(i_m, j_m) = \varphi(n_m) + i_m = \varphi(n_m) + m - \varphi(n_m) = m$.

Ca să arătăm că f este injectivă, fie (i,j), (i',j') cu $m := f(i,j) = f(i',j')$. Notăm $n_1 := i+j$ şi $n_2 := i' + j'$. Avem că:

$$\varphi(n) \leq \varphi(n_1) + i = m = \varphi(n_1) + i \leq \varphi(n_1) + n_1 < \varphi(n_1) + n_1 + 1$$

şi că:

$$\varphi(n) \leq \varphi(n_2) + i' = m = \varphi(n_2) + i' \leq \varphi(n_2) + n_2 < \varphi(n_2) + n_2 + 1$$

Din proprietatea de unicitate de mai sus, obţinem $n_m = n_1 = n_2$, deci $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, de unde scoatem:

$$i = m - \varphi(n_1) = m - \varphi(n_2) = i'$$

şi:

$$j = n_1 - i = n_2 - i' = j'.$$

□

3 Săptămâna 3

(S7) Arătaţi că $\mathbb{R}$ şi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sunt echipotente.
Demonstraţie: Vom folosi teorema Cantor-Bernstein. În cele ce urmează vom nota cu χ_A funcţia caracteristică a mulţimii de numere naturale A, adică $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, dată de:

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \in A \\ 0 & \text{dacă } n \notin A. \end{cases}$$

Construim următoarea injecţie $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$:

$$\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i}.$$

Trebuie mai întâi să arătăm că funcţia ϕ e bine definită, deci că limita considerată mai sus există. Suma are doar termeni pozitivi, de unde reiese că şirul este crescător. Mai mult, pentru orice n din $\mathbb{N}$, avem:

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \leq 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 3.$$

Aşadar, şirul este mărginit. Fiind şi monoton, obţinem din teorema Weierstrass că este convergent, deci ϕ este bine definită.
Arătăm acum injectivitatea. Presupunem că $A \neq B$ şi urmărim să demonstrăm că $\phi(A) \neq \phi(B)$. Deoarece A şi B sunt diferite, există $j = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \chi_A(i) \neq \chi_B(i)\}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $\chi_A(j) = 0$ şi $\chi_B(j) = 1$. Facem următoarea notaţie:

$$a := \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i}.$$

Pentru orice $n \geq j + 1$ avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} &= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} + \frac{2 \cdot 0}{3} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \\
&\leq a + 0 + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \\
&= a + \frac{2}{3^{j+1}} \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{3^i} = a + \frac{2}{3^{j+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&< a + \frac{2}{3^{j+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = a + \frac{1}{3^j},
\end{aligned}$$

de unde

$$\phi(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_A(i)}{3^i} \leq \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{3^j}\right) = a + \frac{1}{3^j}.$$

Pentru orice $n \geq j+1$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} + \frac{2\cdot 1}{3^j} + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq a + \frac{2}{3^j}.$$

Aşadar,

$$\phi(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\chi_B(i)}{3^i} \geq \lim_{n\to\infty} (a + \frac{2}{3^j}) = a + \frac{2}{3^j} > a + \frac{1}{3^j} \geq \phi(A).$$

Deci, $\phi(A) < \phi(B)$, de unde $\phi(A) \neq \phi(B)$.
Construim acum o injecţie $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ştim din exerciţiul anterior că există $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijecţie. Definim pentru orice r real $\psi(r) := \{r \in \mathbb{N} \mid j(n) \leq r\}$. Vrem să arătăm că ψ e injectivă.
Fie r_1 şi r_2 două numere reale diferite şi presupunem că $r_1 < r_2$. Din densitatea numerelor raţionale, ştim că există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_1 < q < r_2$. Funcţia j este bijectivă, deci există m un număr natural astfel încât $j(m) = q$. Deci $j(m) \leq r_2$ şi $j(m) \not\leq r_1$, de unde $m \in \psi(r_2)$ şi $m \notin \psi(r_1)$, demonstrând astfel că $\psi(r_1) \neq \psi(r_2)$. $\square$

Definiţia 1. *Fie A o mulţime finită şi R o relaţie binară pe A. Un* **drum** *în R este un şir $(a_1, \ldots, a_n)$ (unde $n \geq 1$) a.î. $a_i R a_{i+1}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-1\}$; spunem că drumul este* **de la** a_1 **la** a_n. **Lungimea** *unui drum $(a_1, \ldots, a_n)$ este n. Drumul $(a_1, \ldots, a_n)$ este un* **ciclu** *dacă toţi a_i sunt distincţi şi de asemenea $a_n R a_i$.*

(S8) Fie A o mulţime finită şi R o relaţie binară pe A.

(i) Dacă există un drum în R de lungime mai mare strict ca $|A|$, atunci arătaţi că există un ciclu în R.

(ii) Fie $a, b \in A$. Dacă există un drum în R de la a la b, atunci arătaţi că există un drum de la a la b de lungime cel mult $|A|$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un drum în R şi $n > |A|$. Atunci, din principiul lui Dirichlet, există i şi j cu $1 \leq i < j \leq n$ astfel încât $a_i = a_j$. Dar atunci $(a_i, \ldots, a_{j-1})$ este ciclul căutat.

(ii) Presupunem că $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este cel mai scurt drum de la a la b, unde $a_1 = a$ şi $a_n = b$. Presupunem că $n > |A|$. Atunci, din principiul lui Dirichlet, există i şi j cu $1 \leq i < j \leq n$ astfel încât $a_i = a_j$. Dar dacă asta se întâmplă, înseamnă că $(a_1, a_2, \ldots a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ este alt drum de lungime mai mică, contrazicând minimalitatea drumului $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Aşadar, $n \leq |A|$.

$\square$

4 Săptămâna 6

Notaţie *Pentru orice mulţime* Γ *de formule şi orice formulă* φ, *notăm*

$$\Gamma \vDash_{fin} \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{există o submulţime finită } \Delta \textit{ a lui } \Gamma \textit{ a.î. } \Delta \vDash \varphi.$$

(S9) Demonstraţi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie: Avem că

$$\begin{aligned}
\Gamma \nvDash_{fin} \varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma,\ \Delta \nvDash \varphi \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma, \text{ există o evaluare } e_\Delta : V \to \{0,1\} \\
&\qquad\quad \text{a.î. } e_\Delta \vDash \Delta \text{ şi } e_\Delta^+(\varphi) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma, \text{ există o evaluare } e_\Delta : V \to \{0,1\} \\
&\qquad\quad \text{a.î. } e_\Delta \vDash \Delta \text{ şi } e_\Delta^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma, \text{ există o evaluare } e_\Delta : V \to \{0,1\} \\
&\qquad\quad \text{a.î. } e_\Delta \vDash \Delta \text{ şi } e_\Delta \vDash \neg\varphi \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma,\ \Delta \cup \{\neg\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}
\end{aligned}$$

Notăm

(*) Pentru orice submulţime finită Δ a lui Γ, $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(**) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este finit satisfiabilă.

Demonstrăm în continuare că (*)$\Longleftrightarrow$(**).

(*)$\Rightarrow$(**) Fie Δ o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Avem două cazuri:

(i) $\neg\varphi \notin \Delta$. Atunci $\Delta \subseteq \Gamma$, deci, din (*), $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă. În particular, Δ este satisfiabilă.

(ii) $\neg\varphi \in \Delta$. Atunci $\Delta = \Theta \cup \{\neg\varphi\}$, unde Θ este o submulţime finită a lui Γ. Atunci, conform (*), Δ este satisfiabilă.

(**)$\Rightarrow$(*) Fie Δ o submulţime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, deci e satisfiabilă.

$\square$