FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

2.12.2015

Seminar 9

(S9.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

(S9.2) Să se demonstreze Propoziţia 1.59 din curs.

(S9.3) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

(S9.4) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

(S9.5) Fie $a, b, c \in \{0, 1\}$. Să se arate că:

(i) dacă $b \leq c$, atunci $a \to b \leq a \to c$;

(ii) dacă $a \leq b$, atunci $b \to c \leq a \to c$.

(S9.6) Considerăm funcţiile:

$$Var^+ : Form \to 2^V$$

$$Var^- : Form \to 2^V$$

definite recursiv prin următoarele relaţii (unde $v \in V$, $\psi, \chi \in Form$ arbitrare):

$$Var^+(v) := \{v\}$$

$$Var^-(v) := \emptyset$$
$$Var^+(\neg\psi) := Var^-(\psi)$$
$$Var^-(\neg\psi) := Var^+(\psi)$$
$$Var^+(\psi \to \chi) := Var^-(\psi) \cup Var^+(\chi)$$
$$Var^-(\psi \to \chi) := Var^+(\psi) \cup Var^-(\chi)$$

(i) Definiţi riguros, cu ajutorul Principiului recursiei pe formule (Propoziţia 1.4), funcţiile Var^+ şi Var^-. **Indiciu**: încercaţi mai întâi să definiţi funcţia "compusă"

$$Var_{II} : Form \to 2^V \times 2^V,$$

ce verifică, pentru orice $\varphi \in Form$, condiţia:

$$Var_{II}(\varphi) = (Var^+(\varphi), Var^-(\varphi)).$$

(ii) Fie $\varphi \in Form$ şi $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că pentru orice $v \in Var^+(\varphi)$ avem că $e_1(v) \leq e_2(v)$, iar pentru orice $v \in Var^-(\varphi)$ avem că $e_2(v) \leq e_1(v)$. Să se arate că:

$$e_1^+(\varphi) \leq e_2^+(\varphi).$$