FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

2.12.2015

Seminar 9

(S9.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$.

Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S7.2).(ii) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	(S7.3) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S7.2).(iii) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(A1) şi Propoziţia 1.37.(i)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S7.2).(ii) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S7.1).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S7.2).(iii) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S7.2).(ii) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S7.1).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Rightarrow$":

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(5)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi$	(S9.1).(i)
(6)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi$	(S9.1).(ii)
(8)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Leftarrow$":

(1)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(2) şi Propoziţia 1.39.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi)$	(S9.1).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

(S9.2) Să se demonstreze Propoziţia 1.59 din curs.
Demonstraţie:

(i) Observăm mai întâi că ultima echivalenţă (între a doua şi a treia afirmaţie) este o instanţă a Teoremei deducţiei. E suficient, deci, să arătăm faptul că prima afirmaţie este echivalentă cu a treia. Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 1$.

Pentru $n = 1$, enunţul este tautologic.

Fie $n \geq 1$. Presupunem adevărată concluzia pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$.

Avem:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi &\Leftrightarrow \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \psi && \text{(din Teorema deducţiei)}\\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \psi && \text{(din ipoteza de inducţie)}\\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n, \varphi_{n+1}\} \vdash \psi && \text{(din Teorema deducţiei)}\\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \varphi_{n+1}\} \vdash \psi. && \text{(din (S9.1).(iv))}\end{aligned}$$

(ii) Avem că:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.57)}\\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \nvdash \bot && \text{(din punctul (i))}\\ &\Leftrightarrow \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \text{ este consistentă.} && \text{(din Propoziţia 1.57)}\end{aligned}$$

□

(S9.3) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Avem că:

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.44)}\\ &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi && \text{(din Propoziţia 1.59.(i))}\\ &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi && \text{(din Teorema de completitudine (slabă))}\\ &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.31.(ii))}\\ &\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi. && \text{(din Teorema de compacitate - versiunea 3)}\end{aligned}$$

□

(S9.4) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Vrem să arătăm că o mulţime de formule este consistentă dacă şi numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Avem că:

$$\begin{aligned}\Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.57)}\\ &\Leftrightarrow \Gamma \nvDash \bot && \text{(din Teorema de completitudine tare - versiunea 2)}\\ &\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziţia 1.29)}\end{aligned}$$

□

(S9.5) Fie $a, b, c \in \{0, 1\}$. Să se arate că:

(i) dacă $b \leq c$, atunci $a \rightarrow b \leq a \rightarrow c$;

(ii) dacă $a \leq b$, atunci $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$.

Demonstraţie:

(i) Dacă $a = 1$, atunci:

$$a \rightarrow b = 1 \rightarrow b = b \leq c = 1 \rightarrow c = a \rightarrow c.$$

Dacă $a = 0$, atunci:

$$a \rightarrow b = 0 \rightarrow b = 1 \leq 1 = 0 \rightarrow c = a \rightarrow c.$$

(ii) Dacă $c = 0$, atunci:

$$b \rightarrow c = b \rightarrow 0 = \neg b \leq \neg a = a \rightarrow 0 = a \rightarrow c.$$

Dacă $c = 1$, atunci:

$$b \rightarrow c = b \rightarrow 1 = 1 \leq 1 = a \rightarrow 1 = a \rightarrow c.$$

$\square$

(S9.6) Considerăm funcţiile:

$$Var^+ : Form \to 2^V$$

$$Var^- : Form \to 2^V$$

definite recursiv prin următoarele relaţii (unde $v \in V$, $\psi, \chi \in Form$ arbitrare):

$$Var^+(v) := \{v\}$$

$$Var^-(v) := \emptyset$$

$$Var^+(\neg\psi) := Var^-(\psi)$$

$$Var^-(\neg\psi) := Var^+(\psi)$$

$$Var^+(\psi \to \chi) := Var^-(\psi) \cup Var^+(\chi)$$

$$Var^-(\psi \to \chi) := Var^+(\psi) \cup Var^-(\chi)$$

(i) Definiţi riguros, cu ajutorul Principiului recursiei pe formule (Propoziţia 1.4), funcţiile Var^+ şi Var^-. **Indiciu**: încercaţi mai întâi să definiţi funcţia "compusă"

$$Var_{II} : Form \to 2^V \times 2^V,$$

ce verifică, pentru orice $\varphi \in Form$, condiţia:

$$Var_{II}(\varphi) = (Var^+(\varphi), Var^-(\varphi)).$$

(ii) Fie $\varphi \in Form$ şi $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că pentru orice $v \in Var^+(\varphi)$ avem că $e_1(v) \leq e_2(v)$, iar pentru orice $v \in Var^-(\varphi)$ avem că $e_2(v) \leq e_1(v)$. Să se arate că:

$$e_1^+(\varphi) \leq e_2^+(\varphi).$$

Demonstraţie:

(i) Considerăm funcţiile $G_0 : V \to 2^V \times 2^V$, $G_\neg : 2^V \times 2^V \to 2^V \times 2^V$, $G_\to : (2^V \times 2^V) \times (2^V \times 2^V) \to 2^V \times 2^V$, definite, pentru orice $v \in V$ şi $A, B, C, D \subseteq V$, prin:

$$G_0(v) := (\{v\}, \emptyset)$$

$$G_\neg(A, B) := (B, A)$$

$$G_\to((A, B), (C, D)) := (B \cup C, A \cup D)$$

Atunci Var_{II} va fi funcţia asociată via Propoziţia 1.4 lui G_0, $G_\neg$ şi $G_\to$.

Mai departe, considerăm funţiile $\pi_1, \pi_2 : 2^V \times 2^V \to 2^V$, definite, pentru orice $A, B \subseteq V$, prin:

$$\pi_1(A, B) := A$$

$$\pi_2(A, B) := B$$

Atunci putem defini $Var^+ := \pi_1 \circ Var_{II}$ şi $Var^- := \pi_2 \circ Var_{II}$.

(ii) Demonstrăm enunţul prin inducţie structurală după φ.

(a) Dacă φ este o variabilă v, avem $Var^+(\varphi) = \{v\}$ şi deci $v \in Var^+(\varphi)$. Din ipoteză, avem că $e_1(v) \leq e_2(v)$, deci $e_1^+(\varphi) \leq e_2^+(\varphi)$.

(b) Dacă φ are forma $\neg\psi$, cu $\psi \in Form$, ştim că $Var^+(\varphi) = Var^-(\psi)$ şi că $Var^-(\psi) = Var^+(\varphi)$. Fie $v \in Var^+(\psi) = Var^-(\varphi)$ şi deci, din ipoteză $e_2(v) \leq e_1(v)$. Analog, dacă $v \in Var^-(\psi)$, $e_1(v) \leq e_2(v)$. Aplicând ipoteza de inducţie pentru ψ, obţinem că $e_2^+(\psi) \leq e_1^+(\psi)$, deci $\neg e_1^+(\psi) \leq \neg e_2^+(\psi)$. Avem, aşadar, că $e_1^+(\varphi) \leq e_2^+(\varphi)$.

(c) Dacă φ are forma $\psi \to \chi$, cu $\psi, \chi \in Form$, ştim că

$$Var^+(\psi \to \chi) = Var^-(\psi) \cup Var^+(\chi)$$

şi

$$Var^-(\psi \to \chi) = Var^+(\psi) \cup Var^-(\chi).$$

Judecând asemănător punctului (b), se obţine că $e_2^+(\psi) \leq e_1^+(\psi)$ şi că $e_2^+(\psi) \leq e_1^+(\psi)$. Atunci obţinem:

$$\begin{aligned}
e_1^+(\varphi) &= e_1^+(\psi \to \chi) \\
&= e_1^+(\psi) \boldsymbol{\to} e_1^+(\chi) \\
&\leq e_1^+(\psi) \boldsymbol{\to} e_2^+(\chi) && \text{(din (S9.5).(i))} \\
&\leq e_2^+(\psi) \boldsymbol{\to} e_2^+(\chi) && \text{(din (S9.5).(ii))} \\
&= e_2^+(\psi \to \chi) \\
&= e_2^+(\varphi).
\end{aligned}$$

□