

## Seminar 7

### (S7.1) (Metoda reducerii la absurd)

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

**Demonstrație:** Avem

|     |                                                                                                                                       |                                         |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| (1) | $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$                                                                   | Ipoteză                                 |
| (2) | $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$                                                                | Teorema deducției                       |
| (3) | $\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ | (A3) și Propoziția 1.37.(i)             |
| (4) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$                                                                        | (MP): (2), (3)                          |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$                                                                                           | Propoziția 1.45 și Propoziția 1.39.(ii) |
| (6) | $\Gamma \vdash \psi$                                                                                                                  | (MP): (4), (5).                         |

□

**(S7.2)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- (i)  $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$ ;
- (ii)  $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ;
- (iii)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ ;
- (iv)  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ .

**Demonstrație:** Demonstrăm (i):

- (1)  $\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  (A1)
- (2)  $\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$  Teorema deducției
- (3)  $\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  (A3) și Propoziția 1.37.(i)
- (4)  $\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$  (MP): (2), (3)
- (5)  $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$  Teorema deducției.

(ii) se obține din (i) aplicând de două ori Teorema deducției:

- (1)  $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$  (S7.2).(i)
- (2)  $\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$  Teorema deducției
- (3)  $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  Teorema deducției.

Demonstrăm în continuare (iii).

- (1)  $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$  (i)
- (2)  $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$  (1) și (S7.1)
- (3)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ . Teorema deducției.

Demonstrăm (iv):

- (1)  $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$  (iii) cu  $\varphi := \neg\varphi$
- (2)  $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$  (A3)
- (3)  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$  (MP): (1), (2).

□

### (S7.3) (“Reciproca” axiomei 3)

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi). \quad (1)$$

**Demonstrație:**

- (1)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$  Propoziția 1.37.(ii)
- (2)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$  Propoziția 1.37.(ii)
- (3)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$  Propoziția 1.37.(ii)
- (4)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$  (S7.2).(iii) și Propoziția 1.39.(ii)
- (5)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$  (MP): (3), (4)
- (6)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$  (MP): (1), (5)
- (7)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$  (S7.2).(ii) și Propoziția 1.39.(ii)
- (8)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$  (MP): (2), (7)
- (9)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$  (MP): (6), (8)
- (10)  $\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$  (9) și (S7.1)
- (11)  $\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  Teorema deducției
- (12)  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  Teorema deducției.

□

(S7.4) Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi).$$

**Demonstrație:**    Avem

|      |                                                             |                                                                                          |                                      |
|------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| (1)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \psi$                                                                            | Propoziția 1.37.(ii)                 |
| (2)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\varphi$                                                                     | Propoziția 1.37.(ii)                 |
| (3)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$                                              | Propoziția 1.37.(ii)                 |
| (4)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$       | (S7.2).(iii) și Propoziția 1.39.(ii) |
| (5)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \psi \rightarrow \varphi$                                                        | (MP): (3), (4)                       |
| (6)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \varphi$                                                                         | (MP): (1), (5)                       |
| (7)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$ | (S7.2).(ii) și Propoziția 1.39.(ii)  |
| (8)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$                           | (MP): (2), (7)                       |
| (9)  | $\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ | $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$                                               | (MP): (6), (8)                       |
| (10) | $\{\psi, \neg\varphi\}$                                     | $\vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$                                                  | (9) și (S7.1).                       |

□