FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

10-11.11.2015

Seminar 6

(S6.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ ddacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ ddacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ ddacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ ddacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} e \vDash \Gamma \quad & \text{ddacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\ & \text{ddacă} \quad e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots \\ & \text{ddacă} \quad (e(v) = 0 \text{ pentru orice } v \in V) \text{ sau } (e(v) = 1 \text{ pentru orice } v \in V) \\ & \qquad\quad \text{sau (există } k \geq 1 \text{ a.î. } e(v_i) = 0 \text{ pentru orice } i < k \text{ şi } e(v_i) = 1 \text{ pentru orice } i \geq k). \end{aligned}$$

Definim $e^0 : V \to \{0, 1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \to \{0, 1\}$, $e^1(v) = 1$ şi, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \to \{0, 1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$$\begin{aligned}
e \vDash \Gamma \quad & \text{ddacă} \quad e \vDash v_0 \text{ şi } e \vDash v_n \to v_{n+1} \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 7 \\
& \text{ddacă} \quad e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \leq e(v_1) \leq e(v_2) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\
& \text{ddacă} \quad e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\}.
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \ \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S6.2) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie: Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$, deci $e(v_0) = 1$ şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 \;=\; \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \vee e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

(S6.3) Să se demonstreze Propoziţia 1.28 din curs.
Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1 \to e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) " $\Rightarrow$ " Fie e un model al lui Γ. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \to e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

" $\Leftarrow$ " Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci ca la (i) că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \land \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \land \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

$\square$

Notaţie
Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm

$$\Gamma \vDash_{fin} \varphi \quad :\iff \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \vDash \varphi.$$

Propoziţia S.1 $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ *ddacă* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *nu este finit satisfiabilă.*
Demonstraţie: Exerciţiu suplimentar. $\square$

(S6.4) Să se demonstreze Propoziţia 1.32 din curs.
Demonstraţie: Fie Γ o mulţime de formule. Trebuie să demonstrăm că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.
(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.
(V3) Pentru orice $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$, φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):
$\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.30)
ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$)
ddacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (conform Propoziţiei S.1).

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):
Γ este nesatisfiabilă ddacă $\Gamma \vDash \bot$ (conform Propoziţiei 1.29)
ddacă $\Gamma \vDash_{fin} \bot$ (conform (V3) pentru Γ şi $\bot$)
ddacă există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \bot$
ddacă există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. Δ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.29)
ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

$\square$