

Seminar 5

(S5.1) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

- (i) $v_0 \rightarrow v_2$;
- (ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstrație:

- (i) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \rightarrow v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

- (ii) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\
&= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\
&= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\
&= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

(S5.2) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ ,

- (i) φ este tautologie dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ nu avem că } e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ nu avem că } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

□

(S5.3) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) $\psi \models \varphi$ dacă și numai dacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ dacă și numai dacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
 \psi \models \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este și model pentru } \varphi \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ dacă } e^+(\psi) = 1, \text{ atunci } e^+(\varphi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\
 &\iff \models \psi \rightarrow \varphi.
 \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
 \psi \sim \varphi &\iff \text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi) \\
 &\iff \text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi) \text{ și } \text{Mod}(\varphi) \subseteq \text{Mod}(\psi) \\
 &\iff \psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi \\
 &\stackrel{(i)}{\iff} \models \psi \rightarrow \varphi \text{ și } \models \varphi \rightarrow \psi \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \text{ și } e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \rightarrow \psi) \wedge e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
 &\iff \models \psi \leftrightarrow \varphi.
 \end{aligned}$$

□

(S5.4) Confirmați sau infirmați:

- (i) pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ și $\models \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Demonstrație:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și } e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și} \\
&\quad \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \models \varphi \text{ și } \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, și $e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ și $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 și $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

□

(S5.5) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$;
- (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$;
- (iii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$;
- (iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;
- (v) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$;
- (vi) $\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

Demonstrație: Vom folosi în demonstrații următoarele: pentru orice $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
a \rightarrow b = 1 &\iff a \leq b, \\
1 \rightarrow a &= a, & a \rightarrow 1 &= 1 \\
0 \rightarrow a &= 1, & a \rightarrow 0 &= \neg a \\
1 \wedge a &= a, & 0 \wedge a &= 0, \\
1 \vee a &= 1, & 0 \vee a &= a.
\end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\varphi) \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \chi) = 1$.

Avem că

$$1 = e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ și $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obținem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Așadar,

$$e^+(\varphi \rightarrow \chi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = 1 \text{ dacă și numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \rightarrow \chi)$	$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raționăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) &= e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = e^+((\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (1 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (1 \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (0 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare,

$$\neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) = 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) &= \neg 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= 1 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□