FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

27-28.10.2015

Seminar 4

(S4.1) Să se arate că mulţimea $Form$ a formulelor logicii propoziţionale LP este numărabilă.
Demonstraţie: Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din (S3.4).(i), că Sim este numărabilă. Conform (S3.1).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S3.4).(iii) şi (S3.4).(i), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form \subseteq Expr$, obţinem că $Form$ este o submulţime infinită a unei mulţimi numărabile. Aplicăm (S3.3).(ii) pentru a conchide că $Form$ este numărabilă. $\square$

(S4.2) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice

$$s = \text{Plouă.} \qquad t = \text{Putem observa stelele.}$$

Atunci $\psi = t \to \neg s$.

(iii) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \qquad v = \text{Faci o prezentare de calitate.}$$

Atunci $\chi = v \to u$.

(iv) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice

$$w = \text{Treci examenul la logică.} \qquad z = \text{Înţelegi subiectul.}$$

Atunci $\theta = w \to z$.

□

(S4.3) Pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.

Demonstraţie: Notăm cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ dacă şi numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $l(v) = r(v) = 0$.
- $\varphi = (\neg\psi)$ şi ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$
- $\varphi = (\psi \to \chi)$ şi ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

□

$\square$

(S4.4) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.
Demonstraţie: Se observă că $Var : Form \to 2^V$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lcl} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup V(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ şi pentru

$$\begin{array}{rl} G_0 : V \to A, & G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, & G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, & G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{array}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

(S4.5) Dacă $e : V \to \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;

(ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$;

(iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi)$.

Demonstraţie:

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \to \psi) = e^+(\neg\varphi) \to e^+(\psi) = \neg e^+(\varphi) \to e^+(\psi) \overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \vee e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg x \to y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \to y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \neg e^+(\varphi \to \neg\psi) \\ &= \neg(e^+(\varphi) \to e^+(\neg\psi)) \\ &= \neg(e^+(\varphi) \to \neg e^+(\psi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $\neg(x \to \neg y) = x \wedge y$:

x	y	$\neg y$	$x \to \neg y$	$\neg(x \to \neg y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} e^+(\varphi \to \psi) \wedge e^+(\psi \to \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $(x \to y) \wedge (y \to x) = x \leftrightarrow y$:

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

(S4.6) Să se demonstreze, pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0,1\}$, că:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$