FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

20-21.10.2015

Seminar 3

(S3.1) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este numărabil.

(ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

Definiţia 1. *O familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

(S3.2) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A'_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.

Definiţia 2. Reuniunea disjunctă *a unei familii de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ se notează $\coprod_{i\in I} A_i$ şi se defineşte astfel:*

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i.$$

(S3.3) Fie A, B mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

(S3.4) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabiă.

(ii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(iv) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.