FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

20-21.10.2015

Seminar 3

(S3.1) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este numărabil.

(ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

Demonstraţie:

(i) Fie A_1 şi A_2 două mulţimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots, \},\ A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, \}.$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2, \quad f(m,n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$

Se demonstrează uşor că f este bijecţie.

(ii) Demonstrăm prin inducţie după n că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi pentru orice mulţimi numărabile $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \times A_2 \ldots A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n+1$. Fie $A_1, \ldots, A_{n+1}$ mulţimi numărabile şi $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Atunci B este numărabilă, conform ipotezei de inducţie, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcţia

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \to B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecţie. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

$\square$

Definiţia 1. *O familie de mulţimi* $(A_i)_{i\in I}$ *se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice* $i, j \in I$ *cu* $i \neq j$ *avem* $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(S3.2) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A'_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.
Demonstraţie: Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcţia

$$f_i : A_i \to A'_i, \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecţie.
Presupunem prin reducere la absurd că $(A'_i)_{i\in I}$ nu este o familie disjunctă de mulţimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A'_j \cap A'_k \neq \emptyset$, deci există $x \in A'_j \cap A'_k$. Deoarece $x \in A'_j$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A'_k$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. $\square$

Definiţia 2. **Reuniunea disjunctă** *a unei familii de mulţimi* $(A_i)_{i\in I}$ *se notează* $\coprod_{i\in I} A_i$ *şi se defineşte astfel:*

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i.$$

(S3.3) Fie A, B mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că A este finită şi fie $n = |A|$. Deoarece B este infinită, are o submulţime C cu $n + 1$ elemente. Obţinem că restricţia lui f la C, definită astfel

$$f_{|C} : C \to A, \quad f_{|C}(x) = f(x)$$

este injectivă. Am obţinut o contradicţie cu Principiul lui Dirichlet.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$, unde pentru orice n avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie b_0 cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, B fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem b_1 ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum b_0 este minimul lui B, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe b_{n+1}, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că b_n fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n+1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m+1 > m$. Cum b_{m+1} este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$.

Demonstrăm acum enunţul principal. Fie $h : A \to \mathbb{N}$ o bijecţie. Atunci $B \sim g(B) \sim h(g(B))$, deci $h(g(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi B este numărabilă.

$\square$

(S3.4) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabiă.

(ii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iv) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Dacă A este finită, atunci are un număr natural de elemente n. Demonstrăm prin inducţie după acel n.

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un n şi demonstrăm pentru $n+1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

(ii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, A_n este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in N} A_n, \quad f(n,m) = a_{n,m}.$$

Se observă uşor că f este bijecţie. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = (a_{n_a}, a_{m_a})$. Inversa lui f se defineşte astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n \in N} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n\in N} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Pentru orice $i \in I$, fie $A_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k}, \ldots\}$ o enumerare a lui A_i. Definim funcţiile

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N}, \quad f(m,n) = (F(m), n)$$
$$g : I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i, \quad g(i,n) = a_{i,n}.$$

Se observă uşor că f şi g sunt bijecţii, deci $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim I \times \mathbb{N} \sim \bigcup_{i\in I} A_i$. Aşadar, $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Fie $A'_n := \{n\} \times A_n$. Atunci, conform (S3.2), $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile. Aplicăm (ii) pentru a concluziona că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ este numărabilă. Definim

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n, \quad f(a) = (n_a, a),$$

unde $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \in A_n\}$. Este evident că f este bine definită şi injectivă. De asmenea, din (S3.3).(i), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este infinită, deoarece A_0 este infinită şi incluziunea

$$j : A_0 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad j(a) = a$$

este injecţie. În sfârşit, putem aplica (S3.3).(ii) pentru a conchide că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este o mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Considerăm familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$B_n := A_{F(n)}$$

Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ şi deci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \sim \mathbb{N}$.

(iv) Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{\frac{m}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Arătăm că mulţimile ce compun această familie numărabilă sunt şi ele numărabile. Luăm pentru orice $n \in \mathbb{N}$, bijecţia $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, definită, pentru orice m, prin $f_n(m) = \frac{m}{n+1}$. Observăm acum că $\mathbb{Q}$ este reuniunea familiei, deci este şi ea numărabilă, aplicând (S3.4).(iii).

$\square$