FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

19-20.01.2016

Seminar 14

(S14.1) Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \exists x\varphi \tag{1}$$
$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \wedge \forall x\psi \tag{2}$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \vee \exists x\psi \tag{3}$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \to \forall x\psi \tag{4}$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \forall x\psi \to \varphi \tag{5}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \exists x\varphi$:
$\mathcal{A} \models \exists x\varphi[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$, deoarece $x \notin FV(\varphi)$ (aplicând Propoziţia 2.25).

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \wedge \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \varphi \vee \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \models (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash\!\!\!\dashv \varphi \to \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\!\!\!\dashv \forall x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e]$.

$\square$

(S14.2) Să se axiomatizeze:

(i) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element minimal;

(ii) clasa mulţimilor strict ordonate care au un element maximal;

(iii) clasa mulţimilor strict ordonate cu proprietatea că orice element are un unic succesor.

Demonstraţie: $\mathcal{L}_{\dot<} = (\dot<)$

(i) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MINIMAL)))$, unde

$$(MINIMAL): \quad \exists x \forall y\, \neg(y \dot< x)$$

(ii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (MAXIMAL)))$, unde

$$(MAXIMAL): \quad \exists x \forall y\, \neg(x \dot< y)$$

(iii) $\mathcal{K} = Mod(Th((IREFL), (TRANZ), (SUCC)))$, unde

$$(SUCC): \quad \forall x \exists y (x \dot< y \wedge \forall z (x \dot< z \to (z = y \vee y \dot< z)))$$

$\square$

(S14.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

este validă (A2);

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\varphi \to \forall x \varphi$$

este validă (A3);

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\exists x(x = t)$$

este validă (A4).

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \to \forall x \psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x \psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x \leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 2.25, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S12.1).(iv), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x \leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 2.24, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acum e simplu, luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S14.4) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile infinite;

(ii) grafurile complete;

(iii) grafurile care au cel puţin un drum de lungime 3;

(iv) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3;

(v) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă.

Demonstraţie: $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Teoria grafurilor este $Th((IREFL), (SIM))$.

(i) Adaug mulţimea de enunţuri

$$\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 2\}.$$

Deci, $Th((IREFL), (SIM), \Gamma)$.

(ii) Adaug enunţul

$$\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \to \dot{E}(x, y)).$$

Deci, $Th((IREFL), (SIM), \varphi)$.

(iii) Adaug enunţul

$$\varphi = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_4) \right).$$

Deci, $Th((IREFL), (SIM), \varphi)$.

(iv) Adaug enunţul

$$\varphi = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} \neg(v_i = v_j) \wedge \dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1) \right).$$

Deci, $Th((IREFL), (SIM), \varphi)$.

(v) Adaug enunţul

$$\varphi = \forall x \exists y \dot{E}(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(x, z) \Rightarrow y = z).$$

Deci, $Th((IREFL), (SIM), \varphi)$.

$\square$