FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

12-13.01.2016

Seminar 13

Notaţie 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice $a, b \in A$, avem că:*

$$(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a} = (e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}$. În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \textit{dacă } v \neq x, y \\ a & \textit{dacă } v = x \\ b & \textit{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S13.1) Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$,

(i) $\neg\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(iii) $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \models \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) $\mathcal{A} \models (\neg\exists x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models (\exists x\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\neg\varphi)[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}]$ (*).

$\mathcal{A} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$ există $c \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow c}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow c}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**). Fie $a \in A$. Vrem $c \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow c}]$.

Luăm c să fie b-ul din (*). Avem, aşadar, că $\mathcal{A} \vDash \varphi[x \leftarrow a, y \leftarrow b]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$, deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem că n-ar fi aşa. Atunci, $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$ (**). Din a doua condiţie din (**), rezultă că există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$. Din (*), rezultă că $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$. Dar din prima condiţie din (**), ar rezulta că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce este o contradicţie.

$\square$

(S13.2) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x\exists y\varphi \nvDash \exists y\forall x\varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \nvDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}]$ $\iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x\dot{<}y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\text{, avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y\varphi)[e_{x\leftarrow n}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat: se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e_{y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

□