

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x :

- (i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

(S12.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

- (i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, și $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.
- (ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

(S12.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și $\mathcal{L}_{ar}$ -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.