

Seminar 11

(S11.1) Să se determine mulțimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

- (i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;
- (ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;
- (iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstrație:

- (i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.
- (ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ și $L := \neg v_4$, obținând așadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

- (iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ și $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

□

(S11.2) Derivați prin rezoluție clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulțimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstrație: Notăm:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \{v_0, v_4\} \\
C_2 &:= \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} \\
C_3 &:= \{\neg v_4, v_0, v_1\} \\
C_4 &:= \{\neg v_0, v_3\} \\
C_5 &:= \{v_0, v_1\} && (\text{rezolvent al } C_1, C_3) \\
C_6 &:= \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} && (\text{rezolvent al } C_2, C_4) \\
C_7 &:= \{v_0, \neg v_2, v_3\} && (\text{rezolvent al } C_5, C_6)
\end{aligned}$$

Avem, așadar, că secvența $(C_1, C_2, \dots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}$. $\square$

(S11.3) Să se deriveze prin rezoluție clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_2) \wedge (v_0 \rightarrow v_1)$$

Demonstrație: Înlocuind implicațiile și aplicând legile de Morgan, obținem că:

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \\
&\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),
\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ' , a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ și $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$(C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\} = C$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 și C_2 . Cum C_1 și C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem așadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ' , formulă în FNC echivalentă semantic cu φ . $\square$

(S11.4) Să se arate, folosind rezoluția, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \rightarrow v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \rightarrow v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \rightarrow v_3)$$

este nesatisfiabilă.

Demonstrație: Înlocuind implicațiile, obținem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ' . Notând:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{v_0, v_2\} \\ C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\} \\ C_3 &:= \{\neg v_1\} \\ C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\} \\ C_5 &:= \{\neg v_3\} \\ C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\} \end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned} C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2, C_3) \\ C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1, C_7) \\ C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4, C_8) \\ C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6, C_9) \\ C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5, C_{10}) \end{aligned}$$

avem că secvența $(C_1, C_2, \dots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.88, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziția 1.83, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci și φ , care este echivalentă semantic cu φ' , este nesatisfiabilă. $\square$

(S11.5) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstrație: Notând mulțimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obținem următoarea rulare:

$i := 1$
 $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$
P1.1. $x_1 := v_0$
 $T_1^1 := \{\{v_0\}\}$
 $T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$
P1.2. $U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
P1.3. $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$
P1.4. $i := 2$; goto *P2.1*
P2.1. $x_2 := v_1$
 $T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$
 $T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$
P2.2. $U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
P2.3. $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
P2.4. $i := 3$; goto *P3.1*
P3.1. $x_3 := v_2$
 $T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
 $T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$
P3.2. $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P3.3. $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P3.4. $i := 4$; goto *P4.1*
P4.1. $x_4 := v_3$
 $T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
 $T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P4.2. $U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
P4.3. $\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
P4.4. $i := 5$; goto *P5.1*
P5.1. $x_5 := v_4$
 $T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
 $T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
P5.2. $U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
P5.3. $\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
P5.4. $i := 6$; goto *P6.1*

P6.1.	$x_6 := v_5$ $T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$ $T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
P6.2.	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
P6.3.	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
P6.4.	$i := 7$; goto P7.1
P7.1.	$x_7 := v_6$ $T_7^1 := \{\{v_6\}\}$ $T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
P7.2.	$U_7 := \{\square\}$
P7.3.	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
P7.4.	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

□

(S11.6) Există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din mulțimea de clauze $\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}$? Justificați.

Demonstrație: Fie mulțimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$.

Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ și că:

$$\begin{aligned}
Res(C_1, C_1) &= \emptyset \\
Res(C_1, C_2) &= \{C_3, C_4\} \\
Res(C_1, C_3) &= \{C_1\} \\
Res(C_1, C_4) &= \{C_1\} \\
Res(C_2, C_2) &= \emptyset \\
Res(C_2, C_3) &= \{C_2\} \\
Res(C_2, C_4) &= \{C_2\} \\
Res(C_3, C_3) &= \{C_3\} \\
Res(C_3, C_4) &= \emptyset \\
Res(C_4, C_4) &= \{C_4\}
\end{aligned}$$

Am arătat, deci, că pentru orice $C'', C''' \in \mathcal{S}'$, $Res(C'', C''') \subseteq \mathcal{S}'$ (*). Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din $\mathcal{S}$ și fie aceasta $(C'_1, \dots, C'_n = \square)$. Demonstrăm prin inducție completă că pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, $C'_i \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel

de i . Din definiția derivării, avem că ori $C'_i \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C'_i \in \text{Res}(C'_j, C'_k)$. Din ipoteza de inducție completă, $C'_j, C'_k \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $\text{Res}(C'_j, C'_k) \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C'_i \in \mathcal{S}'$. Am obținut că $C'_n = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicție. Rămâne că nu există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din $\mathcal{S}$. $\square$

(S11.7) Demonstrați, folosindu-vă de proprietățile satisfacerii semantice și de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluției:

$$\{\neg v_2, v_2 \rightarrow \neg v_3, v_3 \rightarrow v_4\} \models (\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstrație: Aplicând Propoziția 1.30.(i), condiția din enunț este echivalentă cu faptul că mulțimea de formule:

$$\{\neg v_2, v_2 \rightarrow \neg v_3, v_3 \rightarrow v_4, \neg((\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă și, mai departe, din Propoziția 1.31.(i), cu faptul că formula:

$$\neg v_2 \wedge (v_2 \rightarrow \neg v_3) \wedge (v_3 \rightarrow v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obținem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$\begin{aligned} & \neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg \neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4), \\ & \neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg \neg \neg v_3 \wedge \neg \neg(\neg v_1 \vee v_2) \wedge \neg \neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4, \\ & \neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4, \\ & \neg v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4, \end{aligned}$$

ultima formulă fiind în FNC și corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstrația (prin aplicarea Propoziției 1.83). Folosim mulțimea $\mathcal{S}$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui

rulare se produce după cum urmează.

- $$\begin{aligned}
& i := 1 \\
& \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\
P1.1. \quad & x_1 := v_1 \\
& T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\
& T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\
P1.2. \quad & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\
P1.3. \quad & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\
P1.4. \quad & i := 2; \text{ goto } P2.1 \\
P2.1. \quad & x_2 := v_2 \\
& T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\
& T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\
P2.2. \quad & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.3. \quad & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.4. \quad & \square \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

Rămâne, deci, că $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. □