FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

8-9.12.2015

Seminar 10

(S10.1) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \lor \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \land v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \lor v_1) \land v_1) \lor v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \lor v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \land \neg v_1) \lor \neg v_1 \lor v_0 &\sim ((v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1)) \lor v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1 \lor v_0) \land (\neg v_1 \lor \neg v_1 \lor v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \lor \neg v_1) \land (\neg v_1 \lor v_0) && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \lor \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$
\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}
$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$
\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3) && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}
$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S10.2) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi a funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.72 şi 1.74, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.73 şi 1.74, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.68.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

□

(S10.3) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \nvDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

□

(S10.4) Să se demonstreze Propoziţia 1.70.(i) din curs.
Demonstraţie: Fie o formulă φ. Notăm $Var(\varphi) = \{x_1, ..., x_n\}$ astfel încât pentru orice $i \neq j$ avem $x_i \neq x_j$. Avem:

$$\begin{aligned}
\vDash \varphi \Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e \vDash \varphi \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \text{ şi} \\
& \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\} \text{ astfel încât pentru orice } i, e(x_i) = \varepsilon_i, \text{ avem } e^+(\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n, e^+_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n}(\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n, F_\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & F_\varphi \text{ este constantă } 1.
\end{aligned}$$

Apoi, avem că o formulă φ este nesatisfiabilă ddacă $\vDash \neg\varphi$ (Propoziţia 1.11.(ii)). Mai departe:

$$\begin{aligned}
\vDash \neg\varphi \Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e \vDash \neg\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\neg\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \neg e^+(\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \text{ şi} \\
& \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\} \text{ astfel încât pentru orice } i, e(x_i) = \varepsilon_i, \text{ avem } e^+(\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n, e^+_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n}(\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{pentru orice } (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n, F_\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & F_\varphi \text{ este constantă } 0.
\end{aligned}$$

□

(S10.5) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $Form_n$ mulţimea acelor $\varphi \in Form$ ce verifică faptul că

$$Var(\varphi) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}.$$

Calculaţi numărul de elemente al mulţimii cât $Form_n/{\sim}$.
Demonstraţie: Reamintim că pentru orice formulă φ, notăm cu $[\varphi]$ clasa de echivalenţă a lui φ, ce în cadrul nostru (mulţimea: $Form_n$; relaţia: $\sim$, de echivalenţă semantică) va fi mulţimea:

$$\{\psi \in Form_n \mid \psi \sim \varphi\}$$

De asemenea, definim:

$$Bool_n := \{f : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \mid f \text{ funcţie}\}.$$

Avem că $\{0,1\}^n$ are 2^n elemente, şi deci că mulţimea $Bool_n$, ce conţine fiecare funcţie booleană de n variabile, are 2^{2^n} elemente.
Considerăm funţia $\Psi_n : Form_n/{\sim} \to Bool_n$, definită, pentru orice $\varphi \in Form_n$, prin:

$$\Psi_n([\varphi]) := F_\varphi.$$

Din Propoziţia 1.70.(ii).(b), rezultă că Ψ_n este bine definită şi injectivă, iar din Teorema 1.72 rezultă că Ψ_n este surjectivă. Aşadar, şi $Form_n/{\sim}$ are 2^{2^n} elemente. □

(S10.6) Să se demonstreze Propoziţia 1.68.(ii) din curs.
Demonstraţie: Considerăm $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Atunci:

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi &= \neg \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\
&\sim \bigwedge_{i=1}^{n} \neg \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) && \text{(conform Propoziţiei 1.21)} \\
&\sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) && \text{(conform Propoziţiei 1.21)} \\
&\sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^{c} \right),
\end{aligned}
$$

unde $L_{i,j}^{c}$ este definit precum în curs. □