FMI, Info, Anul I
Semestrul I, 2015/2016
Logică matematică şi computaţională
Laurenţiu Leuştean,
Alexandra Otiman, Andrei Sipoş

06-07.10.2015

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.
Demonstraţie: Presupunem prin absurd că $X \neq A$. Atunci ori există $x \in X \setminus A$, ori există $x \in A \setminus X$.
În primul caz, avem că $x \in X \subseteq B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \notin A$, avemm $x \in B \setminus X$, deci $x \notin X$, contradicţie cu $x \in X \setminus A$.
În cel de-al doilea caz, avem că $x \in A \subseteq A \cup (B \setminus X) = B \cup X$, deci $x \in B$ sau $x \in X$. Cum $x \in A \setminus X$, rezultă $x \in B$. Atunci x aparţine şi lui A, şi lui B. Dar A şi B sunt disjuncte, contradicţie. $\square$

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R? Care dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ este funcţie?
Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu este funcţie, deoarece

(i) $(a, b) \in R$ şi $(a, c) \in R$;

(ii) $(a, a) \in R^{-1}$ şi $(a, b) \in R^{-1}$;

(iii) $(a, a) \in R \circ R$ şi $(a, b) \in R \circ R$.

$\square$

(S1.3) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

(iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.
Demonstraţie:

(i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.
   (b) $B_1 = \{0\}, B_2 = \mathbb{N}^*, B_3 = \mathbb{Q}$ şi $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.
   (c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.
   (d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.
   (e) $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(ii) $C_1 = (-\infty, 0), C_2 = \{0\}, C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.

(iii) $D_2 = \{0\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \{0, 2, 3\}$, $\bigcap_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \emptyset$.

$\square$

(S1.4) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

Demonstraţie:

(i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) $\iff$
pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) $\iff$ există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

$\square$

(S1.5)

(i) Demonstraţi că orice intervale deschise (a, b), (c, d) ale lui $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

(ii) Demonstraţi că $(0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1]$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia

$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x - a) < d - c$. Adăugând c, rezultă că funcţia noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în (c, d). Definim funcţia

$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(x) = \frac{b - a}{d - c}(x - c) + a \text{ pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă uşor că f şi g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, (a, b) şi (c, d) sunt echipotente.

(ii) Ştim că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluţie directă este: se ia funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Se ia apoi funcţia $h : (0, 1] \to (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in (0, 1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0,1) \to (0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \ \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1]$ şi $(0,1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcţia $j : [0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in [0,1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \ \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0,1) \to [0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \ \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $[0,1]$ sunt echipotente.

În sfârşit, se observă uşor că funcţia $F : (0,1] \to [0,1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0,1]$ şi $[0,1)$ sunt echipotente.

$\square$