Teorema 1.53 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 1.51 pentru $\Gamma = \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \quad \{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0,1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 1.52, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

Teorema de completitudine

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.50 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Propoziția 1.54

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \iff \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad & \iff \quad \models \varphi \to \psi \text{ și } \models \psi \to \varphi \\ & \qquad \text{(conform Propoziției 1.13)} \\ & \iff \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \vdash \psi \to \varphi \\ & \qquad \text{(conform Teoremei de completitudine).} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziția 1.39.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$\Gamma \nvdash \varphi$:$\Leftrightarrow$ φ nu este Γ-teoremă
$\nvdash \varphi$:$\Leftrightarrow$ φ nu este teoremă
$\Gamma \not\models \varphi$:$\Leftrightarrow$ φ nu este consecință semantică a lui Γ
$\not\models \varphi$:$\Leftrightarrow$ φ nu este tautologie.

Definiția 1.55

Fie Γ o mulțime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Propoziția 1.56

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.51, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicție. Așadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 1.39.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$

Propoziția 1.57

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Dem.: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ și $(i) \Rightarrow (iv)$ sunt evidente.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie φ o formulă. Conform (4) din Propoziția 1.49,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. $\square$

Propoziția 1.58

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.:

(i) Avem

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\
 & & \text{P. 1.57.(iv)} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\
 & & \text{Teorema de Deducție} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\
 & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ și P.1.54.}
\end{array}
$$

(ii) Similar. □

Propoziția 1.59

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.60

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: "$\Leftarrow$" este evidentă.
"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.57.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziția 1.44, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.61

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 1.62

Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$
\begin{aligned}
\{\varphi\} \text{ este inconsistentă } &\iff \vdash \neg\varphi \\
&\qquad \text{conform Propoziției 1.58.(ii)} \\
&\iff \vDash \neg\varphi \\
&\qquad \text{conform Teoremei de completitudine} \\
&\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
&\qquad \text{conform Propoziției 1.30.(ii).}
\end{aligned}
$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 1.63 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă } \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \perp$ și, aplicând Teorema de corectitudine 1.51, rezultă că $\Gamma \vDash \perp$. Ca urmare, $e \vDash \perp$, ceea ce este o contradicție.
"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.34 pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.
Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 1.61. Din Propoziția 1.59.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.62, obținem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziției 1.31.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 1.64 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Dem.:

$$\begin{array}{lll} \Gamma \vdash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ & & \text{conform Propoziției 1.58.(i)} \\ & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & & \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ & \iff & \Gamma \vDash \varphi \\ & & \text{conform Propoziției 1.30.(i).} \end{array}$$

$\square$

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exercițiu).

Definiția 1.65

Un literal este o

- variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau
- negația unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiția 1.66

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.67

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple:

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC