

## Teorema de completitudine

### Teorema 1.53 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

**Dem.: "⇒"** Se aplică Teorema de corectitudine 1.51 pentru  $\Gamma = \emptyset$ .  
"⇐" Fie  $\varphi$  o tautologie și  $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Demonstrăm prin inducție după  $k$  următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \\ \{x_1^e, \dots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru  $k = n$ ,  $(*)$  ne dă  $\vdash \varphi$ .

**$k = 0$ .** Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Deoarece  $\varphi$  este tautologie,  $e^+(\varphi) = 1$ . Aplicând Propoziția 1.52, obținem că

$$\text{Var}(\varphi)^e = \{x_1^e, \dots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$



## Teorema de completitudine

$k \Rightarrow k + 1$ . Presupunem că (\*) este adevărată pentru  $k$  și fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Trebuie să arătăm că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ .

Considerăm evaluarea  $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$ . Așadar,  $e'(v) = e(v)$  pentru orice  $v \neq x_{n-k}$  și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

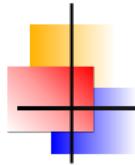
Rezultă că  $x_i^{e'} = x_i^e$  pentru orice  $i \in \{0, \dots, n-k-1\}$  și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (\*) pentru  $e$  și  $e'$ , obținem

$$\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.50 cu  $\Gamma := \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\}$  și  $\psi := x_{n-k}$  pentru a conchide că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ . □



### Propoziția 1.54

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$ . Presupunem că  $\varphi \sim \psi$ . Atunci

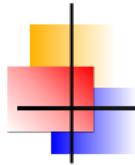
$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

**Dem.:** Observăm că

$$\begin{aligned}\varphi \sim \psi &\iff \models \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \models \psi \rightarrow \varphi \\ &\quad (\text{conform Propoziției 1.13}) \\ &\iff \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \vdash \psi \rightarrow \varphi \\ &\quad (\text{conform Teoremei de completitudine}).\end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma \vdash \varphi$ . Deoarece  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ , rezultă din Propoziția 1.39.(ii) că  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Aplicăm acum (MP) pentru a obține că  $\Gamma \vdash \psi$ .

" $\Leftarrow$ " Similar. □



## Notății

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

### Notății

$\Gamma \nvdash \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este  $\Gamma$ -teoremă

$\nvdash \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este teoremă

$\Gamma \nvDash \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este consecință semantică a lui  $\Gamma$

$\not\models \varphi$  : $\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este tautologie.



## *Mulțimi consistente*

### *Definiția 1.55*

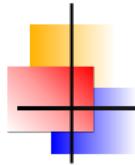
Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- ▶  $\Gamma$  este **consistentă** dacă există o formulă  $\varphi$  astfel încât  $\Gamma \not\vdash \varphi$ .
- ▶  $\Gamma$  este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică,  $\Gamma \vdash \varphi$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

### *Observație*

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule a.î.  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

- ▶ Dacă  $\Delta$  este consistentă, atunci și  $\Gamma$  este consistentă.
- ▶ Dacă  $\Gamma$  este inconsistentă, atunci și  $\Delta$  este inconsistentă.



## Mulțimi consistente

### Propoziția 1.56

- (i)  $\emptyset$  este consistentă.
- (ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

**Dem.:**

- (i) Dacă  $\vdash \perp$ , atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.51, ar rezulta că  $\models \perp$ , o contradicție. Așadar  $\not\vdash \perp$ , deci  $\emptyset$  este consistentă.
- (ii) Aplicând Propoziția 1.39.(iv) pentru  $\Gamma = \emptyset$ , obținem că  $Thm = Thm(Thm)$ , adică, pentru orice  $\varphi$ ,

$$\vdash \varphi \text{ dacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că  $Thm$  este consistentă. □

### Propoziția 1.57

Pentru o mulțime de formule  $\Gamma$  sunt echivalente:

- (i)  $\Gamma$  este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iii) Există o formulă  $\psi$  a.î.  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iv)  $\Gamma \vdash \perp$ .

**Dem.:** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) și (i)  $\Rightarrow$  (iv) sunt evidente.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Fie  $\varphi$  o formulă. Conform (4) din Propoziția 1.49,

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că  $\Gamma \vdash \varphi$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (iii). Presupunem că  $\Gamma \vdash \perp$ . Avem că  $\perp = \neg T$ . Deoarece  $T$  este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conchide că  $\vdash T$ , deci și  $\Gamma \vdash T$ . □

### Propoziția 1.58

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

- (i)  $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este inconsistentă.
- (ii)  $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$  este inconsistentă.

**Dem.:**

(i) Avem

$$\begin{aligned}\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp \\&\text{P. 1.57.(iv)} \\&\iff \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp \\&\text{Teorema de Deducție} \\&\iff \Gamma \vdash \varphi \\&\neg\varphi \rightarrow \perp \sim \varphi \text{ și P.1.54.}\end{aligned}$$

(ii) Similar. □

### Propoziția 1.59

Fie  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o mulțime finită de formule.

- (i) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  dacă  $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$   
dacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$ .
- (ii)  $\Gamma$  este consistentă dacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă.

**Dem.:** Exercițiu.

### *Propoziția 1.60*

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este inconsistentă dacă  $\Gamma$  are o submulțime finită inconsistentă.

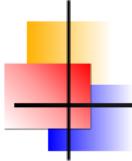
**Dem.:** " $\Leftarrow$ " este evidentă.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.57.(iv),  $\Gamma \vdash \perp$ . Aplicând Propoziția 1.44, obținem o submulțime finită  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  a lui  $\Gamma$  a.î.  $\Sigma \vdash \perp$ . Prin urmare,  $\Sigma$  este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

### *Propoziția 1.61*

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este consistentă dacă orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este consistentă.



## Consecință a Teoremei de completitudine

### Teorema 1.62

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă} \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

**Dem.:** Avem

$$\begin{aligned}\{\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\quad \text{conform Propoziției 1.58.(ii)} \\ &\iff \models \neg\varphi \\ &\quad \text{conform Teoremei de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\quad \text{conform Propoziției 1.30.(ii).}\end{aligned}$$

Așadar,  $\{\varphi\}$  este consistentă  $\iff \{\varphi\}$  este satisfiabilă.





## Teorema de completitudine tare

### Teorema 1.63 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$ ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

**Dem.**: " $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este satisfiabilă, deci are un model  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Presupunem că  $\Gamma$  nu este consistentă. Atunci  $\Gamma \vdash \perp$  și, aplicând Teorema de corectitudine 1.51, rezultă că  $\Gamma \models \perp$ . Ca urmare,  $e \models \perp$ , ceea ce este o contradicție.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este consistentă. Demonstrăm că  $\Gamma$  este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.34 pentru a conchide că  $\Gamma$  este satisfiabilă.

Fie  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o submulțime finită a lui  $\Gamma$ . Atunci  $\Sigma$  este consistentă, conform Propoziției 1.61. Din Propoziția 1.59.(ii), rezultă că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.62, obținem că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este satisfiabilă.

Deoarece, conform Propoziției 1.31.(i),  $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ , avem că  $\Sigma$  este satisfiabilă.





## Teorema de completitudine tare

*Teorema 1.64 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)*

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formulă  $\varphi$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

**Dem.:**

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ &\quad \text{conform Propoziției 1.58.(i)} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\quad \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ &\iff \Gamma \vDash \varphi \\ &\quad \text{conform Propoziției 1.30.(i).} \end{aligned}$$

□

### *Observație*

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (**exercițiu**).

### *Definiția 1.65*

Un **literal** este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este **literal pozitiv**) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este **literal negativ**).

**Exemple:**  $v_1, v_2, v_{10}$  literali pozitivi;  $\neg v_0, \neg v_{100}$  literali negativi

### *Definiția 1.66*

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală disjunctivă (FND)** dacă  $\varphi$  este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar,  $\varphi$  este în FND dacă  $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ , unde fiecare  $L_{i,j}$  este literal.

### *Definiția 1.67*

O formulă  $\varphi$  este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă  $\varphi$  este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar,  $\varphi$  este în FNC dacă  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$ , unde fiecare  $L_{i,j}$  este literal.

### *Exemple:*

- ▶  $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$  este în FNC
- ▶  $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$  este în FND
- ▶  $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$  este atât în FND cât și în FNC
- ▶  $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$  este atât în FND cât și în FNC
- ▶  $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$  nu este nici în FND, nici în FNC