



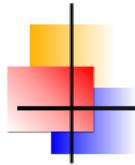
$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

Propoziția 1.45

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Dem.:

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.37.(iii). **Scriem de obicei (MP): (1), (2)**
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu φ , $\psi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4)



Teorema deducției

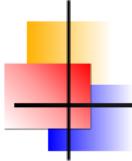
Teorema deducției 1.46

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ dacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 1.39.(i)
- (3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ Propoziția 1.37.(ii)
- (4) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (MP): (2), (3).



Teorema deducției

" \Rightarrow " Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}.$$

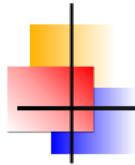
Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$ -teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ . Atunci

- (1) $\Gamma \vdash \psi$ Propoziția 1.37.(i), (ii)
- (2) $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (A1) și Propoziția 1.37.(i)
- (3) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \rightarrow \psi = \varphi \rightarrow \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.45, deci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.



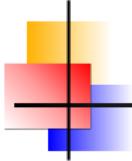
Teorema deducției

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.
Presupunem că $\psi, \psi \rightarrow \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$.
Atunci

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteza inducție
- (2) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ ipoteza inducție
- (3) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ (A2) și P. 1.37.(i)
- (4) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ (MP): (2), (3).
- (5) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ (MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$.





Câteva consecințe

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

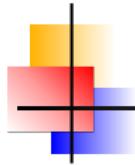
Propoziția 1.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (1)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

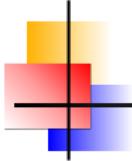


Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ Propoziția 1.37.(ii)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 1.37.(ii)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ Propoziția 1.37.(ii)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (MP): (3), (4).



Câteva consecințe

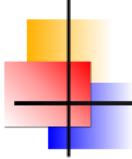
Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (2)$$

Dem.:

- | | | |
|-----|---|--|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.47 și P. 1.39.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (3), (4). □ |



Câteva consecințe

Propoziția 1.49

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi \tag{3}$$

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \tag{4}$$

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \tag{5}$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \tag{6}$$

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi). \tag{7}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.50

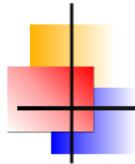
Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi. \tag{8}$$

Dem.: Exercițiu.



SINTAXA și SEMANTICA



Corectitudine

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 1.51

Orice Γ -teoremă este consecință semantică a lui Γ , adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ -teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în Σ (**exercițiu**).
- ▶ Conform Propoziției 1.27.(ii), $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- ▶ Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.

Presupunem că $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$.

Conform Propoziției 1.28.(i), obținem că $\Gamma \vDash \psi$, adică,

$$\psi \in \Sigma.$$



Notării

Pentru orice variabilă $v \in V$ și orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \dots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

Propoziția 1.52

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ ,

- (i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.
- (ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.

Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

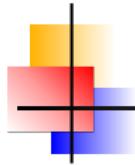
Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.

- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.

Deoarece $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ ((6) din Propoziția 1.49), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.



Sintaxă și semantică

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$ ipoteza de inducție pentru ψ

$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$ ipoteza de inducție pentru χ

$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$ $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i)

$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$ (7) din Propoziția 1.49

$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$ Propoziția 1.39.(iv).

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(4) din P. 1.49 și P.1.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i). □

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție **efectivă** a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.