$\vdash \varphi \to \varphi$

Propoziția 1.45

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.37.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$
(MP): (3), (4) $\square$

Teorema deducției 1.46

Fie $\Gamma \subseteq$ *Form* și $\varphi, \psi \in$ *Form*. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.39.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.37.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziția 1.37.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$	(MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \rightarrow \psi = \varphi \rightarrow \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.45, deci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.

Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$.
Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducție
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducție
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) și P. 1.37.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Câteva consecințe

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 1.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{1}$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{gathered}
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.
\end{gathered}$$

Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.37.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.37.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 1.37.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4).

Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi. \qquad (2)$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 1.47 și P. 1.39.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4). $\square$

Propoziția 1.49

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
\{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi & (3)\\
&\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) & (4)\\
&\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi & (5)\\
&\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi & (6)\\
\{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). & (7)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.50

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \tag{8}$$

Dem.: Exercițiu.

SINTAXA și SEMANTICA

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 1.51

Orice Γ-teoremă este consecință semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Conform Propoziției 1.27.(ii), $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziției 1.28.(i), obținem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$.

□

Notații

Pentru orice variabilă $v \in V$ și orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.
Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziția 1.52

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((6) din Propoziția 1.49), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(7) din Propoziția 1.49
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 1.39.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(4) din P. 1.49 și P.1.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.