

$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

### Propoziția 1.45

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ .

**Dem.:**

- (1)  $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$   
(A2) (cu  $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$  și Propoziția 1.37.(i))
- (2)  $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$   
(A1) (cu  $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$  și Propoziția 1.37.(i))
- (3)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   
(1), (2) și Propoziția 1.37.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4)  $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$   
(A1) (cu  $\varphi, \psi := \varphi$  și Propoziția 1.37.(i))
- (5)  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$   
(MP): (3), (4)

□<sub>1</sub>

### Teorema deducției

#### Teorema deducției 1.46

Fie  $\Gamma \subseteq Form$  și  $\varphi, \psi \in Form$ . Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ dacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

**Dem.:** " $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

- (1)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  ipoteză
- (2)  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$  Propoziția 1.39.(i)
- (3)  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$  Propoziția 1.37.(ii)
- (4)  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$  (MP): (2), (3).

2

### Teorema deducției

" $\Rightarrow$ " Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că  $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$ . O facem prin inducție după  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ -teoreme.

• Fie  $\psi$  o axiomă sau o formulă din  $\Gamma$ . Atunci

- (1)  $\Gamma \vdash \psi$  Propoziția 1.37.(i), (ii)
- (2)  $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$  (A1) și Propoziția 1.37.(i)
- (3)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  (MP): (1), (2).

Așadar  $\psi \in \Sigma$ .

• Fie  $\psi = \varphi$ . Atunci  $\varphi \rightarrow \psi = \varphi \rightarrow \varphi$  este teoremă, conform Propoziției 1.45, deci  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Așadar  $\psi \in \Sigma$ .

### Teorema deducției

• Demonstrăm acum că  $\Sigma$  este închisă la modus ponens.

Presupunem că  $\psi, \varphi \rightarrow \chi \in \Sigma$  și trebuie să arătăm că  $\chi \in \Sigma$ .

Atunci

- (1)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  ipoteza inducție
- (2)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  ipoteza inducție
- (3)  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$  (A2) și P. 1.37.(i)
- (4)  $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$  (MP): (2), (3).
- (5)  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$  (MP): (1), (4).

Așadar  $\chi \in \Sigma$ .

□

## Câteva consecințe

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

### Propoziția 1.47

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (1)$$

**Dem.:** Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \Downarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \Downarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \Downarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

5

## Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- |     |  |                      |
|-----|--|----------------------|
| (1) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$                  | Propoziția 1.37.(ii) |
| (2) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 1.37.(ii) |
| (3) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$                     | (MP): (1), (2)       |
| (4) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$    | Propoziția 1.37.(ii) |
| (5) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$                     | (MP): (3), (4).      |

6

## Câteva consecințe

### Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (2)$$

**Dem.:**

- |     |   |                           |
|-----|---|---------------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  | ipoteză                   |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.47 și P. 1.39.(ii)   |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$  | (MP): (1), (2)            |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$   | ipoteză                   |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$  | (MP): (3), (4). $\square$ |

7

## Câteva consecințe

### Propoziția 1.49

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- |   |     |
|---|-----|
| $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$                           | (3) |
| $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$      | (4) |
| $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$                  | (5) |
| $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$                  | (6) |
| $\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$ | (7) |

**Dem.:** Exercițiu.

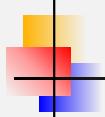
### Propoziția 1.50

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi. \quad (8)$$

**Dem.:** Exercițiu.

8



## SINTAXA și SEMANTICA

9

### Sintaxă și semantică

#### Notării

Pentru orice variabilă  $v \in V$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

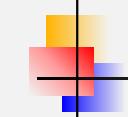
$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar,  $e^+(v^e) = 1$ .

Pentru orice mulțime  $W = \{x_1, \dots, x_k\}$  de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

11



### Corectitudine

#### Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 1.51

Orice  $\Gamma$ -teoremă este consecință semantică a lui  $\Gamma$ , adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

pentru orice  $\varphi \in Form$  și  $\Gamma \subseteq Form$ .

**Dem.: Fie**

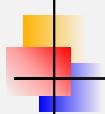
$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că  $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ . O facem prin inducție după  $\Gamma$ -teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în  $\Sigma$  (**exercițiu**).
- ▶ Conform Propoziției 1.27.(ii),  $\Gamma \subseteq \Sigma$ .
- ▶ Demonstrăm acum că  $\Sigma$  este închisă la modus ponens.  
Presupunem că  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ , adică,  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .  
Conform Propoziției 1.28.(i), obținem că  $\Gamma \models \psi$ , adică,  
 $\psi \in \Sigma$ .

□

10



### Sintaxă și semantică

12

### Sintaxă și semantică

#### Propoziția 1.52

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare. Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

- (i) Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$ .
- (ii) Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$ .

**Dem.: Prin inducție după formule.** Avem următoarele cazuri:

- ▶  $\varphi = v$ . Atunci  $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$  și  $e^+(v) = e(v)$ .  
Dacă  $e(v) = 1$ , atunci  $v^e = v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash v$ .  
Dacă  $e(v) = 0$ , atunci  $v^e = \neg v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash \neg v$ .
- ▶  $\varphi = \neg\psi$ . Atunci  $Var(\varphi) = Var(\psi)$ , deci  $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$ .  
Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $e^+(\psi) = 0$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$ , adică,  $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$ .  
Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $Var(\psi)^e \vdash \psi$ , adică,  $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$ .  
Deoarece  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  ((6) din Propoziția 1.49), putem aplica (MP) pentru a obține  $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$ .

13

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ . Atunci  $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$ , deci  $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ .
- Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$  și  $e^+(\chi) = 0$ . Avem
- |   |   |
|---|---|
| $Var(\psi)^e \vdash \psi$                               | ipoteza de inducție pentru $\psi$                                 |
| $Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$                           | ipoteza de inducție pentru $\chi$                                 |
| $Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$              | $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i) |
| $\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$ | (7) din Propoziția 1.49   |
| $Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$     | Propoziția 1.39.(iv).   |

13

Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$ , atunci fie  $e^+(\psi) = 0$ , fie  $e^+(\chi) = 1$ .

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru $\psi$
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(4) din P. 1.49 și P.1.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru $\chi$
$Var(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.39.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție **efectivă** a unei demonstrații a lui  $\varphi$  sau  $\neg\varphi$  din premizele  $Var(\varphi)^e$ .

14