Proprietăți

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 1.25

(i) $Mod(\emptyset) = \{0,1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.

(ii) $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

(i) $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$, adică, pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \Delta$ implică $e \vDash \Gamma$.

(ii) $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$, adică, pentru orice φ, $\Gamma \vDash \varphi$ implică $\Delta \vDash \varphi$.

(iii) Dacă Δ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.

(iv) Dacă Γ este nesatisfiabilă, atunci Δ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.27

Fie Γ o mulțime de formule.

(i) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci Γ este finit satisfiabilă.

(ii) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $\Gamma \vDash \varphi$.

(iii) $\Gamma \sim Cn(\Gamma)$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Proprietăți

Propoziția 1.28

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq$ *Form*.

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.29

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.30

Fie Γ o mulțime de formule.

(i) $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

(i) Avem că $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie e un model al lui Γ. Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\square$

Propoziția 1.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

(i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$.

(iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.

(iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $\Gamma \sim \Delta$.

(b) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

Teorema de compactitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compactitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compactitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.

Propoziția 1.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

Lema 1.33

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0,1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$\mathbf{P_n}$ Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \to \{0,1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0,1,\ldots n\}$.

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1_0) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2_0) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0, avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că $\mathbf{P_0}$ este satisfăcută. În cazul (1_0) este evident. Să considerăm cazul (2_0). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ. Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e. Rezultă că $e \vDash \Delta$ și, din faptul că $e \vDash \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ a.î. $\mathbf{P_n}$ este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ și } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1}, avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că $\mathbf{P_{n+1}}$ este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ. Prin urmare, conform $\mathbf{P_n}$, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Din (2_{n+1}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. $\square$

Teorema 1.34 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: "$\Rightarrow$" Evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\overline{e} : V \to \{0, 1\}, \quad \overline{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că $\overline{e}$ este model al lui Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ, putem aplica Proprietatea $\mathbf{P_k}$ pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Atunci $\overline{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziția 1.9, rezultă că $\overline{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\overline{e} \vDash \varphi$. Prin urmare, $\overline{e}$ este model al lui Γ, deci Γ este satisfiabilă. $\square$

SINTAXA LP

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice

Mulțimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Γ-teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiție inductivă.

Definiția 1.35

Γ-teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 1.36

O formulă φ se numește teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 1.37

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Γ-teoreme

O definiție alternativă a Γ-teoremelor:

Definiția 1.38

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

(i) $Axm \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) Σ este închisă la modus ponens:

$$\text{dacă } \varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma, \text{ atunci } \psi \in \Sigma.$$

Γ-teoreme

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie **P** o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface **P** astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea **P**;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea **P**;

(iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \to \psi$ au proprietatea **P**, atunci ψ are proprietatea **P**.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziția 1.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 1.40

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 1.41

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 1.42

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 1.43

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 1.44

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.39.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.43, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$