

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- ▶ $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- ▶ $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 1.25

- (i) $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- (ii) $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

1

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- (i) $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$, adică, pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \Delta$ implică $e \models \Gamma$.
- (ii) $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$, adică, pentru orice φ , $\Gamma \models \varphi$ implică $\Delta \models \varphi$.
- (iii) Dacă Δ este satisfiabilă, atunci Γ este satisfiabilă.
- (iv) Dacă Γ este nesatisfiabilă, atunci Δ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 1.27

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci Γ este finit satisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $\Gamma \models \varphi$.
- (iii) $\Gamma \sim Cn(\Gamma)$.

Dem.: Exercițiu ușor.

2

Propoziția 1.28

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$.

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.29

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Dem.: Exercițiu ușor.

3

Propoziția 1.30

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) $\Gamma \models \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $\Gamma \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie e un model al lui Γ . Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. □

4

Propoziția 1.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \models \psi$ dacă $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$.
- (iii) Γ este nesatisfiabilă dacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.
- (iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - (a) $\Gamma \sim \Delta$.
 - (b) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

5

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ dacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 1.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

6

Lema 1.33

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

- (1₀) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.
- (2₀) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0 , avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că **P₀** este satisfăcută. În cazul (1₀) este evident. Să considerăm cazul (2₀). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ . Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e . Rezultă că $e \models \Delta$ și, din faptul că $e \models \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

7

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ a.î. **P_n** este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

- (1 _{$n+1$}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î.
 - $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ și $e(v_{n+1}) = 0$.
 Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.
- (2 _{$n+1$}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1} , avem
 - $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ implică $e(v_{n+1}) = 1$.
 Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că **P _{$n+1$}** este satisfăcută. În cazul (1 _{$n+1$}) este evident. Să considerăm cazul (2 _{$n+1$}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ . Prin urmare, conform **P_n**, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Din (2 _{$n+1$}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. □

8

Teorema de compacitate

Teorema 1.34 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: " $\Rightarrow$ " Evident.

" $\Leftarrow$ " Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\bar{e} : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad \bar{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că $\bar{e}$ este model al lui Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î.

$Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ , putem aplica Proprietatea $\mathbf{P}_k$ pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Atunci $\bar{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziția 1.9, rezultă că $\bar{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\bar{e} \models \varphi$.

Prin urmare, $\bar{e}$ este model al lui Γ , deci Γ este satisfiabilă. $\square$

9

SINTAXA LP

10

Sistemul deductiv

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru LP .

Axiomele logice

Mulțimea Axm a **axiomelor** lui LP constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$

11

Γ -teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.35

Γ -teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.

(T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.

(T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele Γ** .

12

Notății

$Thm(\Gamma) :=$ mulțimea Γ -teoremelor $Thm := Thm(\emptyset)$
 $\Gamma \vdash \varphi \iff \varphi$ este Γ -teoremă $\vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \varphi$
 $\Gamma \vdash \Delta \iff \Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 1.36

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 1.37

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

13

O definiție alternativă a Γ -teoremelor:

Definiția 1.38

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Axm \subseteq \Sigma$;
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;
- (iii) Σ este închisă la modus ponens:
dacă $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

14

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Versiunea 1

Fie **P** o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface **P** astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea **P**;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea **P**;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea **P**, atunci ψ are proprietatea **P**.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ ;
- (iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

15

Propoziția 1.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.
- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Delta \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

16

Definiția 1.40

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

Lema 1.41

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ este o Γ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

17

Definiția 1.42

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau **demonstrație a lui φ din ipotezele Γ** este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește **lungimea** Γ -demonstrației.

Propoziția 1.43

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

Dem.: Exercițiu suplimentar.

18

Propoziția 1.44

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ , $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: " $\Leftarrow$ " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.39.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.43, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

19