

Fie φ o formulă.

Definiția 1.10

- ▶ O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. **Notăție:** $e \models \varphi$.
- ▶ φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- ▶ Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- ▶ φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ .
Notăție: $\models \varphi$.

Notăție: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 1.11

- (i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.



Propoziție

Există o mulțime numărabilă de formule φ a.î. atât φ cât și $\neg\varphi$ sunt satisfiabile.

Dem.: Demonstrăm că mulțimea $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Form}$ satisface condiția din enunț. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerăm interpretările $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci $e_1 \models \varphi_n$. Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci $e_2 \models \neg\varphi_n$.



Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.9.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k de astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$ subformule ale lui $\varphi \dots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\dots$	$e'_1(x_k)$	$\dots$	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\dots$	$e'_2(x_k)$	$\dots$	$e'^+_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\dots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\dots$	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i , $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.8.

φ este tautologie ddacă $e'^+_i(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$.



Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 1.12

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- ▶ φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. **Notăție:** $\psi \models \varphi$.
- ▶ φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$.
Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 1.13

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 1.14

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus	$\models \varphi \vee \neg \varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \models \varphi \rightarrow \psi$	(3)
contradicția	$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg \neg \varphi$	(5)
contrapозиția	$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$	(6)
negarea premisei	$\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$	(7)
modus tollens	$\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$	(9)



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ (10)

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi \quad (17)$$

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi \quad (19)$$

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad (21)$$



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \quad (34)$$

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- ▶ $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- ▶ $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.



Definiția 1.15

Pentru orice formule φ, χ, χ' , definim

$\varphi_{\chi}(\chi') :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ' .

$\varphi_{\chi}(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ** . Spunem și că $\varphi_{\chi}(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ .

- ▶ $\varphi_{\varphi}(\chi') = \chi'$.
- ▶ Dacă χ nu este subformulă a lui φ , atunci $\varphi_{\chi}(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$.

- ▶ $\chi = (v_1 \rightarrow v_2), \chi' = v_4. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- ▶ $\chi = v_1, \chi' = \neg\neg v_2. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (\neg\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4 \vee v_1. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$



Propoziția 1.16

Pentru orice formule $\varphi, \chi, \chi', \varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după formula φ . Avem următoarele cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci

$$v_\chi(\chi') = \begin{cases} \chi' & \text{dacă } \chi = v \\ v & \text{dacă } \chi \neq v. \end{cases}$$

Prin urmare, $v_\chi(\chi')$ este formulă.

- ▶ $\varphi = \neg\psi$ și $\psi_\chi(\chi')$ este formulă. Dacă χ nu apare în φ , atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$, deci este formulă. Dacă χ este subformulă a lui φ , atunci avem două cazuri:
 - (i) $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\chi(\chi') = \chi'$ este formulă.
 - (ii) χ este subformulă a lui ψ . Atunci $\varphi_\chi(\chi') = \neg\psi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.



Substituția

- $\varphi = \psi \rightarrow \theta$ și $\psi_x(x')$, $\theta_x(x')$ sunt formule. Dacă x nu apare în φ , atunci $\varphi_x(x') = \varphi$. Dacă x este subformulă a lui φ , atunci avem două cazuri:
- (i) $x = \varphi$. Rezultă că $\varphi_x(x') = x'$.
 - (ii) x este subformulă a lui ψ sau θ (e posibil să apară atât în ψ cât și în θ). Atunci

$$\varphi_x(x') = \psi_x(x') \rightarrow \theta_x(x')$$

este de asemenea formulă.



Propoziția 1.17

Pentru orice formule φ, x, x' ,

$$x \sim x' \text{ implică } \varphi \sim \varphi_x(x').$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 1.17 poate fi aplicată pentru a arăta că o formulă este tautologie.

Exemplu:

Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ , formula $\theta = (\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ este tautologie.

Dem.: Conform (28), $\neg\varphi \vee \psi \sim \varphi \rightarrow \psi$. Aplicăm Propoziția 1.17 cu $\chi = \neg\varphi \vee \psi$ și $\chi' = \varphi \rightarrow \psi$ pentru a obține că $\theta \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Pe de altă parte, $(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ este tautologie, din (1). Prin urmare, θ este tautologie. $\square$



Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Notăție

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \rightarrow \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 1.18

Fie θ o formulă și $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 1.19

Pentru orice formule φ, ψ, θ și orice variabilă $v \in V$,

- (i) $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$.
- (ii) Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\theta)$ este tautologie.
- (iii) Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\theta)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară și $a := e^+(\theta)$.

Aplicând Propoziția 1.18, rezultă că $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\varphi)$ și $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$

- (i) Deoarece $\varphi \sim \psi$, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$.
- (ii) Deoarece φ este tautologie, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 1$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$.
- (iii) Deoarece φ este nesatisfiabilă, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 0$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$.



$\top$ și $\perp$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notății

Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu $\top$ și o numim **adevărul**. Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu $\perp$ și o numim **falsul**.

- ▶ φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- ▶ φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.



Conjunții și disjunții finite

Notății

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.



Conjunții și disjunții finite

Propoziția 1.20

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- ▶ $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ dacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ dacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.21

$$\begin{aligned}\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \\ \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.



Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.22

- ▶ O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- ▶ Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶ Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- ▶ Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Notății: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

- ▶ $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.



Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.23

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. **Notăție:** $\Gamma \models \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ .
Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 1.24

- ▶ Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.
Notăție: $\Gamma \models \Delta$.
- ▶ Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.
Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.