



Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.2 (Principiul inducției pe formule)

Fie **P** o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea **P**.
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea **P**.

Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.



Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(k)$ este adevărată pentru orice $k \leq n$.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**.
Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, φ și ψ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**.



Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.3 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,
 φ are proprietatea **P** ddacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\Gamma = \text{Form}$. □

Conectorii derivați $\vee$ (se citește **sau**), $\wedge$ (se citește **și**), $\leftrightarrow$ (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.



Propoziția 1.4 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ ,
 $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 && \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 && \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\varphi \rightarrow \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 && \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\neg}(n) = n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, && G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.\end{aligned}$$



Principiul recursiei pe formule

Notăție:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.



Principiul recursiei pe formule

Propoziția 1.5 (Principiul recursiei pe formule - varianta 2)

Fie A o mulțime și funcțiile $G_0 : V \rightarrow A$,

$$G_{\neg} : A \times Form \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \times Form \times Form \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi), \varphi)$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$ pentru orice formule φ, ψ .

Dem.: Exercițiu suplimentar.



Definiția 1.6

Fie φ o formulă a lui LP . O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$



Subformule

Definiție alternativă

Mulțimea $SubForm(\varphi)$ poate fi definită și recursiv:

$$SubForm(v) = \{v\}$$

$$SubForm(\neg\varphi) = SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$$

$$SubForm(\varphi \rightarrow \psi) = SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}.$$

În acest caz,

$$SubForm : Form \rightarrow 2^{Form}, \text{ deci } A = 2^{Form},$$

și

$$G_0 : V \rightarrow A,$$

$$G_0(v) = \{v\},$$

$$G_{\neg} : A \times Form \rightarrow A,$$

$$G_{\neg}(\Gamma, \varphi) = \Gamma \cup \{\neg\varphi\},$$

$$G_{\rightarrow} : A \times A \times Form \times Form \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow}(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi) = \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}.$$



SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

1 pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.



Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 1.7

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 1.8

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- ▶ $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

Dem.: Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 1.4) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\neg}(p) = \neg p$ și $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$. □



Propoziția 1.9

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 1.9

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări
 $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.



Propoziția 1.9

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.



Propoziția 1.9

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi) \cap \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.

