Cardinale

- O mulțime se numește finită dacă are un număr finit de elemente. O mulțime care nu este finită se numește infinită.
- Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $\mid A \mid$ și se mai numește și cardinalul lui A.

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.
Există o definiție riguroasă în teoria mulțimilor a cardinalului unei mulțimi, datorată lui von Neumann. Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A, notat $\mid A \mid$, este tot o mulțime. Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă.

Cardinale

- $\mid A \mid = \mid B \mid$ ddacă A și B sunt echipotente.
- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $\mid \mathbb{N} \mid$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- $\mid \mathbb{R} \mid$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime A este numărabilă ddacă $\mid A \mid = \aleph_0$.
- $\mid 2^{\mathbb{N}} \mid \neq \aleph_0$.
- $\mid 2^{\mathbb{N}} \mid = \mathfrak{c}$.

Definim următoarea relație pe clasa tuturor cardinalelor: pentru orice două mulțimi A, B,

$$| A | \leq | B | \iff \text{există } f : A \to B \text{ funcție injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein

Dacă există două funcții injective $f : A \to B$ și $g : B \to A$, atunci A și B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $| A | \leq | B |$ și $| B | \leq | A |$, atunci $| A | = | B |$.

Proprietăți

- $\leq$ este o relație de ordine totală.
- $\aleph_0$ este cel mai mic cardinal transfinit.
- Orice cardinal are un unic succesor, adică pentru orice cardinal κ există un unic cardinal κ^+ a.î. $\kappa < \kappa^+$ și nu există cardinale ν a.î. $\kappa < \nu < \kappa^+$.
- Succesorul lui $\aleph_0$ se notează $\aleph_1$.

Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis (CH))

$$\text{Nu există nicio mulțime } S \text{ a.î. } \aleph_0 <| S |< \mathfrak{c}.$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- avansată de Cantor în 1878.
- prima problemă din lista lui Hilbert de 23 probleme prezentate în 1900.
- Gödel (1940) a demonstrat că (CH) este consistentă cu ZFC.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația lui (CH) este consistentă cu ZFC. Prin urmare, (CH) este independentă de ZFC.

Principiul lui Dirichlet (sau Principiul cutiei; în engleză Pigeonhole principle*)*

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui B.
Pasul inițial. Presupunem că $|B| = 1$, deci $B = \{b\}$ și $|A| > 1$. Dacă $f : A \to B$, atunci există cel puțin două elemente distincte $a_1, a_2 \in A$. Rezultă că $f(a_1) = f(a_2) = b$, deci f nu este injectivă.
Ipoteza de inducție. Fie $n \geq 1$. Presupunem că nu există funcții injective de la A la B, dacă $|A| > |B|$ și $|B| \leq n$.
Pasul de inducție.
Fie A, B a.î. $|A| > |B| = n + 1$ și $f : A \to B$. Alegem $b \in B$. Avem două cazuri:

- $| f^{-1}(b) | \geq 2$. Atunci f nu este injectivă, deoarece două elemente ale lui A au aceeași imagine prin f, și anume b.

Principiul lui Dirichlet

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B.

Dem.: (continuare)

- $| f^{-1}(b) | \leq 1$. Definim

$$g : A \setminus f^{-1}(b) \to B \setminus \{b\}, \quad g(a) = f(a).$$

Atunci $| B \setminus \{b\} | = | B | - 1 = n \geq 1$ și
$| A \setminus f^{-1}(b) \ | \geq | A | - 1 > | B | - 1 = | B \setminus \{b\} |$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concluziona că g nu este injectivă. Prin urmare, există a_1, a_2 distincte în $A \setminus f^{-1}(b)$ a.î. $g(a_1) = g(a_2)$, deci $f(a_1) = f(a_2)$. Așadar, f nu este injectivă. $\square$

Principiul lui Dirichlet

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B.

Consecință

Dacă avem un număr N de cutii și un număr $N + 1$ de obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte.

Dem.: Notăm cu A mulțimea obiectelor și cu B mulțimea cutiilor. Definim $f : A \to B$ astfel: pentru orice obiect $x \in A$, $f(x)$ este cutia în care este pus x. Deoarece $|A| = N + 1 > N = |B|$, f nu este injectivă, deci există $x, y \in A$ distincte a.î. $f(x) = f(y)$. $\square$

Consecință reformulată

Dacă $N + 1$ obiecte sunt colorate cu N culori, atunci există două obiecte monocromatice (colorate cu aceeași culoare).

Principiul lui Dirichlet

Definiție

Fie $r \in \mathbb{N}^*$ și X o mulțime. O r-colorare a lui X este o funcție $c : X \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este culoarea lui x. O submulțime $A \subseteq X$ se numește monocromatică dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Consecință

Pentru orice N-colorare a unei mulțimi X cu $N + 1$ elemente, există $x, y \in X$ a.î. mulțimea $\{x, y\}$ este monocromatică.

- enunț tipic pentru teoria Ramsey.

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este colorată cu un număr finit de culori. Ce tip de substructură este monocromatică?

sau echivalent:

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de submulțimi. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din submulțimi?

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r-colorare a lui $\mathbb{N}$ și pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există progresii aritmetice monocromatice de lungime k.

Notație: Fie Y o mulțime și $k \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $[Y]^k$ mulțimea submulțimilor lui Y cu k elemente: $[Y]^k = \{A \subseteq Y \mid |A| = k$.

Teorema Ramsey (1928)

Fie Y o mulțime infinită și $k, r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r-colorare a lui $[Y]^k$, există o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Consecință: Principiul cutiei - varianta infinită (Infinite Pigeonhole Principle)

Fie Y o mulțime infinită și $r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r-colorare a lui Y, există o submulțime infinită monocromatică B a lui Y.

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca find atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$	=	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	=	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	=	Numărul 2 este par și mâine plouă.
$p \rightarrow q$	=	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	=	Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).
Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Logica propozițională - informal

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Azi este marți, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p=*Azi este marți.* q=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \to q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este marți și nu avem curs de logică.*

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*

q = *Sunt taxiuri la gară.*

r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \to r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectori logici: $\neg$ (se citește non), $\rightarrow$ (se citește implică)
- paranteze: (,).

- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Definiția 1.2

Mulțimea *Expr* a expresiilor lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n.
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$((((v_7, v_1\neg \to (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1)), (\neg(v_1 \to v_2))$.

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i,j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ.

Formule

Definiția formulelor este un exemplu de definiție inductivă.

Definiția 1.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

(F0) Orice variabilă propozițională este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.

(F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notații: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Formule

Exemple:

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

*Citire unică (*Unique readability*)*

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 1.5

Mulțimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.