

- ▶ O mulțime se numește **finită** dacă are un număr finit de elemente. O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.
- ▶ Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și **cardinalul** lui A .

Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor. Există o definiție riguroasă în teoria mulțimilor a cardinalului unei mulțimi, datorată lui von Neumann. Pentru orice mulțime A , cardinalul lui A , notat $|A|$, este tot o mulțime. Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă.

- ▶ $|A| = |B|$ ddacă A și B sunt echipotente.
- ▶ Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și **puterea continuumului**.
- ▶ O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Definim următoarea relație pe clasa tuturor cardinalelor: pentru orice două mulțimi A, B ,

$$|A| \leq |B| \iff \text{există } f : A \rightarrow B \text{ funcție injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein

Dacă există două funcții injective $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$, atunci A și B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$, atunci $|A| = |B|$.

Proprietăți

- ▶ $\leq$ este o relație de ordine totală.
- ▶ $\aleph_0$ este cel mai mic cardinal transfinit.
- ▶ Orice cardinal are un unic succesor, adică pentru orice cardinal κ există un unic cardinal κ^+ a.î. $\kappa < \kappa^+$ și nu există cardinale ν a.î. $\kappa < \nu < \kappa^+$.
- ▶ Succesorul lui $\aleph_0$ se notează $\aleph_1$.

Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis (CH))

Nu există nicio mulțime S a.î. $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$.

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ 2^{\aleph_0} = \aleph_1. \end{array}$$

- ▶ avansată de Cantor în 1878.
- ▶ prima problemă din lista lui Hilbert de 23 probleme prezentate în 1900.
- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că (CH) este consistentă cu ZFC.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația lui (CH) este consistentă cu ZFC. Prin urmare, (CH) este independentă de ZFC.

Principiul lui Dirichlet (sau Principiul cutiei; în engleză Pigeonhole principle)

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B .

Dem.: Demonstrăm prin inducție după cardinalul lui B .

Pasul inițial. Presupunem că $|B| = 1$, deci $B = \{b\}$ și $|A| > 1$.

Dacă $f : A \rightarrow B$, atunci există cel puțin două elemente distincte $a_1, a_2 \in A$. Rezultă că $f(a_1) = f(a_2) = b$, deci f nu este injectivă.

Ipoteza de inducție. Fie $n \geq 1$. Presupunem că nu există funcții injective de la A la B , dacă $|A| > |B|$ și $|B| \leq n$.

Pasul de inducție.

Fie A, B a.î. $|A| > |B| = n + 1$ și $f : A \rightarrow B$. Alegem $b \in B$.

Avem două cazuri:

- $|f^{-1}(b)| \geq 2$. Atunci f nu este injectivă, deoarece două elemente ale lui A au aceeași imagine prin f , și anume b .

5

Principiul lui Dirichlet

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B .

Dem.: (continuare)

- $|f^{-1}(b)| \leq 1$. Definim

$$g : A \setminus f^{-1}(b) \rightarrow B \setminus \{b\}, \quad g(a) = f(a).$$

Atunci $|B \setminus \{b\}| = |B| - 1 = n \geq 1$ și

$|A \setminus f^{-1}(b)| \geq |A| - 1 > |B| - 1 = |B \setminus \{b\}|$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru a concluziona că g nu este injectivă. Prin urmare, există a_1, a_2 distincte în $A \setminus f^{-1}(b)$ a.î. $g(a_1) = g(a_2)$, deci $f(a_1) = f(a_2)$. Așadar, f nu este injectivă. $\square$

6

Principiul lui Dirichlet

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide a.î. $|A| > |B|$, atunci nu există nicio funcție injectivă de la A la B .

Consecință

Dacă avem un număr N de cutii și un număr $N + 1$ de obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte.

Dem.: Notăm cu A mulțimea obiectelor și cu B mulțimea cutiilor. Definim $f : A \rightarrow B$ astfel: pentru orice obiect $x \in A$, $f(x)$ este cutia în care este pus x . Deoarece $|A| = N + 1 > N = |B|$, f nu este injectivă, deci există $x, y \in A$ distincte a.î. $f(x) = f(y)$. $\square$

Consecință reformulată

Dacă $N + 1$ obiecte sunt colorate cu N culori, atunci există două obiecte monocromatice (colorate cu aceeași culoare).

7

Definiție

Fie $r \in \mathbb{N}^*$ și X o mulțime. O **r -colorare** a lui X este o funcție $c : X \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este **culoarea** lui x . O submulțime $A \subseteq X$ se numește **monocromatică** dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Consecință

Pentru orice N -colorare a unei mulțimi X cu $N + 1$ elemente, există $x, y \in X$ a.î. mulțimea $\{x, y\}$ este monocromatică.

- enunț tipic pentru **teoria Ramsey**.

8

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este colorată cu un număr finit de culori. Ce tip de substructură este monocromatică?

sau echivalent:

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de submulțimi. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din submulțimi?

9

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r -colorare a lui $\mathbb{N}$ și pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există progresii aritmetice monocromatice de lungime k .

Notăție: Fie Y o mulțime și $k \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $[Y]^k$ mulțimea submulțimilor lui Y cu k elemente: $[Y]^k = \{A \subseteq Y \mid |A| = k\}$.

Teorema Ramsey (1928)

Fie Y o mulțime infinită și $k, r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r -colorare a lui $[Y]^k$, există o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Consecință: Principiul cutiei - varianta infinită (Infinite Pigeonhole Principle)

Fie Y o mulțime infinită și $r \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice r -colorare a lui Y , există o submulțime infinită monocromatică B a lui Y .

10

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

11

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

12

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

$p, q, r, \dots$ sau $p_1, p_2, p_3, \dots$

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.
 $p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.
 $p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.
 $p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.
 $p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

13

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Azi este marți, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

p =Azi este marți. q =Avem curs de logică.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ =Azi este marți și nu avem curs de logică.

14

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci lon întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

p = Trenul întârzie.
 q = Sunt taxiuri la gară.
 r = lon întârzie la întâlnire.

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**

15

Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de **variabile**;
- ▶ conectori logici: $\neg$ (se citește **non**), $\rightarrow$ (se citește **implică**)
- ▶ paranteze: (,).

- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$

16

Definiția 1.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui *LP* este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui *LP*.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$

17

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui *LP*, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i,j)-subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este **(i,j)-subexpresia** lui θ .

18

Formule

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.4

Formulele lui *LP* sunt expresiile lui *LP* definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg \varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notății: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

19

Formule

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg \psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 1.5

Mulțimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

20