

## Bună ordonare și inducție

### *Principiul bunei ordonări*

Orice submulțime nevidă a lui  $\mathbb{N}$  are un cel mai mic element.

### *Principiul inducției*

Fie  $S \subseteq \mathbb{N}$  astfel încât:

- (i)  $0 \in S$  și
- (ii) pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , dacă  $n \in S$ , atunci  $n + 1 \in S$ .

Atunci  $S = \mathbb{N}$ .

### *Observație*

Principiul bunei ordonări și principiul inducției sunt echivalente.



## *Principiul inducției (forma tare)*

### *Principiul inducției (forma tare)*

Fie  $S \subseteq \mathbb{N}$  astfel încât:

- (i)  $0 \in S$  și
- (ii) pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , dacă  $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq S$ , atunci  $n + 1 \in S$ .

Atunci  $S = \mathbb{N}$ .

**Dem.:** Aplicăm Principiul inducției pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \dots, n\} \subseteq S\}.$$

Obținem  $S' = \mathbb{N}$ . Rezultă că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{0, \dots, n\} \subseteq S$ , deci  $n \in S$ . Prin urmare,  $S = \mathbb{N}$ . □



## *Principiul inducției*

Fie  $P : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  un predicat (o proprietate).  $P(n) = 1$  înseamnă că  $P(n)$  este adevărat.

### *Principiul inducției*

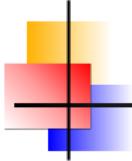
- ▶ **Pasul inițial.** Verificăm că  $P(0) = 1$ .
- ▶ **Ipoteza de inducție.** Presupunem că  $P(n) = 1$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ **Pasul de inducție.** Demonstrăm că  $P(n + 1) = 1$ .

**Concluzie:**  $P(n) = 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

### *Principiul inducției (forma tare)*

- ▶ **Pasul inițial.** Verificăm că  $P(0) = 1$ .
- ▶ **Ipoteza de inducție.** Presupunem că  $P(k) = 1$  pentru orice  $k \leq n$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ **Pasul de inducție.** Demonstrăm că  $P(n + 1) = 1$ .

**Concluzie:**  $P(n) = 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .



## *Principiul diagonalizării*

### *Principiul diagonalizării*

Fie  $R$  o relație binară pe o mulțime  $A$  și  $D \subseteq A$  definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice  $a \in A$ , definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci  $D$  este diferit de fiecare  $R_a$ .

**Dem.:** Presupunem că există  $a \in A$  astfel încât  $D = R_a$ . Sunt posibile două cazuri:

- ▶  $a \in D$ . Rezultă că  $(a, a) \notin R$ , deci  $a \notin R_a = D$ . Contradicție.
- ▶  $a \notin D$ . Rezultă că  $(a, a) \in R$ , deci  $a \in R_a = D$ . Contradicție.

Prin urmare,  $D \neq R_a$  pentru orice  $a \in A$ . □



## Argumentul diagonal al lui Cantor

### Teoremă Cantor

Nu există o bijecție între  $\mathbb{N}$  și mulțimea  $2^{\mathbb{N}}$  a părților lui  $\mathbb{N}$ , deci  $\mathbb{N}$  și  $2^{\mathbb{N}}$  nu sunt echipotente.

**Dem.:** Presupunem că există o bijecție  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ . Prin urmare,  $2^{\mathbb{N}}$  poate fi enumerată ca  $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \dots, S_n, \dots\}$ , unde  $S_i = f(i)$  pentru orice  $i \in \mathbb{N}$ . Considerăm relația binară  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definită astfel:

$$R = \{(i, j) \mid j \in f(i)\} = \{(i, j) \mid j \in S_i\}$$

și aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\},$$

$$R_i = \{j \in \mathbb{N} \mid (i, j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Deoarece  $D \subseteq \mathbb{N}$  și  $f$  este bijecție, există  $k \in \mathbb{N}$  a.î.  $D = S_k = R_k$ . Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării,  $D \neq R_i$  pentru orice  $i \in \mathbb{N}$ . Am obținut o contradicție. □



## Mulțimi numărabile

### Definiție

O mulțime  $A$  este **numărabilă** dacă este echipotentă cu  $\mathbb{N}$ .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

### Corolar

$2^{\mathbb{N}}$  nu este mulțime numărabilă.

### Propoziție

- (i) Orice submulțime infinită a lui  $\mathbb{N}$  este numărabilă.
- (ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.
- (iii)  $\mathbb{Z}$  și  $\mathbb{Q}$  sunt numărabile.
- (iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

**Dem.: Exercițiu.**

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $R \subseteq A \times A$  o relație binară pe  $A$ .

**Notație:** Scriem  $xRy$  în loc de  $(x, y) \in R$  și  $\neg(xRy)$  în loc de  $(x, y) \notin R$ .

### Definiție

- ▶  $R$  este **reflexivă** dacă  $xRx$  pentru orice  $x \in A$ .
- ▶  $R$  este **ireflexivă** dacă  $\neg(xRx)$  pentru orice  $x \in A$ .
- ▶  $R$  este **simetrică** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  
 $xRy$  implică  $yRx$ .
- ▶  $R$  este **antisimetrică** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  
 $xRy$  și  $yRx$  implică  $x = y$ .
- ▶  $R$  este **tranzitivă** dacă pentru orice  $x, y, z \in A$ ,  
 $xRy$  și  $yRz$  implică  $xRz$ .
- ▶  $R$  este **totală** dacă pentru orice  $x, y \in A$ ,  
 $xRy$  sau  $yRx$ .

### Definiție

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $R \subseteq A \times A$  o relație binară pe  $A$ .  $R$  se numește **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

### Exemple

- Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Definim relația  $\equiv(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  astfel:

$$\equiv(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

Relația  $\equiv(\text{mod } n)$  se numește **congruență modulo  $n$** . Folosim notația  $x \equiv y \pmod{n}$  pentru  $(x, y) \in \equiv(\text{mod } n)$ .

- Fie  $f : A \rightarrow B$  o funcție. Definim relația  $\ker f \subseteq A \times A$  astfel:

$$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

$\ker f$  se numește și **nucleul** lui  $f$ .

**Notății:** Vom nota relațiile de echivalență cu  $\sim$ . Scriem  $x \sim y$  dacă  $(x, y) \in \sim$  și  $x \not\sim y$  dacă  $(x, y) \notin \sim$ .



## Relații de echivalență

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $\sim \subseteq A \times A$  o relație de echivalență.

### Definiție

Pentru orice  $x \in A$ , **clasa de echivalență**  $[x]$  a lui  $x$  este definită astfel:  $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$ .

### Propoziție

- ▶  $A = \bigcup_{x \in A} [x]$ .
- ▶  $[x] = [y]$  dacă  $x \sim y$ .
- ▶  $[x] \cap [y] = \emptyset$  dacă  $x \not\sim y$  dacă  $[x] \neq [y]$ .

**Dem.:** Exercițiu.

### Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui  $A$  se numește **mulțimea cât** a lui  $A$  prin  $\sim$  și se notează  $A/\sim$ . Aplicația  $\pi : A \rightarrow A/\sim$ ,  $\pi(x) = [x]$  se numește **funcția cât**.



## Relații de echivalență

Fie  $A$  o mulțime nevidă și  $\sim \subseteq A \times A$  o relație de echivalență.

### Definiție

Un **sistem de reprezentanți** pentru  $\sim$  este o submulțime  $X \subseteq A$  care satisface: pentru orice  $a \in A$  există un unic  $x \in X$  a.î.  $a \sim x$ .

### Propoziție

Fie  $X$  un sistem de reprezentanți pentru  $\sim$ . Atunci  $A = \bigcup_{x \in X} [x]$  și  $A/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ .

**Dem.:** Exercițiu.

### Exemplu

Considerăm congruența modulo 2,  $\equiv (\text{mod } 2)$ :

$$[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}, [1] = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} + 1;$$

$[2n] = [0]$  și  $[2n + 1] = [1]$  pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ ; mulțimea cât este  $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ . Sisteme de reprezentanți:  $X = \{0, 1\}$ ,  $X = \{2, 5\}$ ,  $X = \{999, 20\}$ .

Fie  $A$  o mulțime nevidă.

### Definiție

O **partiție** a lui  $A$  este o familie  $(A_i)_{i \in I}$  de submulțimi nevide ale lui  $A$  care verifică proprietățile:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pentru orice } i \neq j.$$

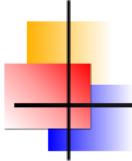
Partiția  $(A_i)_{i \in I}$  se numește **finită** dacă  $I$  este finită.

### Propoziție

Există o bijectie între mulțimea relațiilor de echivalență pe  $A$  și mulțimea partițiilor lui  $A$ :

- ▶  $(A_i)_{i \in I}$  partiție a lui  $A \mapsto$  relația de echivalență pe  $A$  definită prin:  $x \sim y \Leftrightarrow$  există  $i \in I$  a.î.  $x, y \in A_i$ .
- ▶  $\sim$  relație de echivalență pe  $A \mapsto$  partiția  $([x])_{x \in X}$ , unde  $X \subseteq A$  este un sistem de reprezentanți pentru  $\sim$ .

**Dem.:** Exercițiu.



## *Relații de ordine*

### *Definiție*

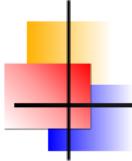
Fie  $A$  o mulțime nevidă. O relație binară  $R$  pe  $A$  este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

**Notății:** Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu  $\leq$ , iar relațiile de ordine strictă cu  $<$ .

### *Definiție*

Dacă  $\leq$  este o relație de ordine parțială (totală) pe  $A$ , spunem că  $(A, \leq)$  este **mulțime parțial (total) ordonată**.



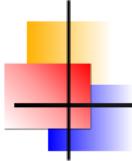
## Mulțimi parțial ordonate

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime parțial ordonată.

### Proprietăți

- ▶ Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- ▶ Relația  $<$  definită prin  $x < y \iff x \leq y$  și  $x \neq y$  este relație de ordine strictă.
- ▶ Dacă  $\emptyset \neq S \subseteq A$ , atunci  $(S, \leq)$  este mulțime parțial ordonată.

**Dem.:** Exercițiu.



## Mulțimi parțial ordonate

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime parțial ordonată și  $\emptyset \neq S \subseteq A$ .

### Definiție

Un element  $e \in S$  se numește

- ▶ **element minimal** al lui  $S$  dacă pentru orice  $a \in S$ ,  $a \leq e \Rightarrow a = e$ ;
- ▶ **element maximal** al lui  $S$  dacă pentru orice  $a \in S$ ,  $a \geq e \Rightarrow a = e$ ;
- ▶ **cel mai mic element** (sau **minim**) al lui  $S$  dacă  $e \leq a$  pentru orice  $a \in S$ ;
- ▶ **cel mai mare element** (sau **maxim**) al lui  $S$  dacă  $e \geq a$  pentru orice  $a \in S$ .

### Proprietăți

- ▶ Atât minimul, cât și maximul lui  $S$  sunt unice (dacă există).
- ▶ Orice minim (maxim) este element minimal (maximal). Reciproca nu este adevărată.
- ▶  $S$  poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

**Dem.:** Exercițiu.



## Mulțimi parțial ordonate

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime parțial ordonată și  $\emptyset \neq S \subseteq A$ .

### Definiție

Un element  $e \in A$  se numește

- ▶ **majorant** al lui  $S$  dacă  $e \geq a$  pentru orice  $a \in S$ ;
- ▶ **minorant** al lui  $S$  dacă  $e \leq a$  pentru orice  $a \in S$ ;
- ▶ **supremumul** lui  $S$ , notat  $\sup S$ , dacă  $e$  este cel mai mic majorant al lui  $S$ ;
- ▶ **infimumul** lui  $S$ , notat  $\inf S$ , dacă  $e$  este cel mai mare minorant al lui  $S$ .

### Proprietăți

- ▶ Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui  $S$  poate fi vidă.
- ▶ Atât supremumul, cât și infimumul lui  $S$  sunt unice (dacă există).



## Mulțimi bine/inductiv ordonate

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime parțial ordonată.

### Definiție

Spunem că  $(A, \leq)$  este mulțime **bine ordonată** dacă orice submulțime nevidă a lui  $A$  are minim. În acest caz,  $\leq$  se numește relație de **bună ordonare** pe  $A$ .

### Exemple

$(\mathbb{N}, <)$  este bine ordonată, dar  $(\mathbb{Z}, <)$  nu este bine ordonată.

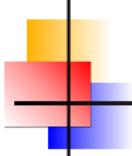
### Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

**Dem.: Exercițiu.**

### Definiție

$(A, \leq)$  se numește **inductiv ordonată** dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.



## Axioma alegerii

### Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă  $(A_i)_{i \in I}$  este o familie de mulțimi nevide, atunci există o mulțime  $C$  care conține un singur element din fiecare mulțime  $(A_i)$ .

#### Reformulări

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- ▶ Dacă  $(A_i)_{i \in I}$  este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție  $f_C$  care asociază la fiecare  $i \in I$  un element  $f_C(i) \in A_i$ .
- ▶ Dacă  $(A_i)_{i \in I}$  este o familie de mulțimi nevide, atunci  $\prod_{i \in I} A_i$  este nevid.
- ▶ formulată de Zermelo (1904)
- ▶ a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi mulțimea  $C$  sau funcția alegere  $f_C$ .



## Axioma alegerii

- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

### Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- ▶ **Lema lui Zorn** Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.
- ▶ **Principiul Bunei Ordonări:** Orice mulțime nevidă  $X$  poate fi bine ordonată (adică, pentru orice  $X$  există o relație binară  $\leq$  pe  $X$  a.î.  $(X, \leq)$  este mulțime bine ordonată).