Bună ordonare și inducție

Principiul bunei ordonări

Orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Principiul inducției

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Observație

Principul bunei ordonări și principiul inducției sunt echivalente.

Principiul inducției (forma tare)

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Aplicăm Principiul inducției pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \ldots, n\} \subseteq S\}.$$

Obținem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \ldots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Principiul inducției

Fie $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate). $P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

Principiul inducției

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției (forma tare)

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul diagonalizării

Fie R o relație binară pe o mulțime A și $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Dem.: Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a, a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicție.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a, a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicție.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. $\square$

Teoremă Cantor

Nu există o bijecție între $\mathbb{N}$ și mulțimea $2^{\mathbb{N}}$ a părților lui $\mathbb{N}$, deci $\mathbb{N}$ și $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt echipotente.

Dem.: Presupunem că există o bijecție $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots, \}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relația binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

și aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ și f este bijecție, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = S_k = R_k$. Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obținut o contradicție. $\square$

Mulțimi numărabile

Definiție

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Corolar

$2^{\mathbb{N}}$ nu este mulțime numărabilă.

Propoziție

(i) Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

(ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

(iii) $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.

(iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
  xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
  xRy și yRx implică $x = y$.
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
  xRy și yRz implică xRz.
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$,
  xRy sau yRx.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A \times A$ o relație binară pe A. R se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relația $\equiv(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel:

  $$\equiv(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

  Relația $\equiv(\text{mod } n)$ se numește congruența modulo n. Folosim notația $x \equiv y(\text{mod } n)$ pentru $(x, y) \in \equiv(\text{mod } n)$.
- Fie $f : A \to B$ o funcție. Definim relația $\ker f \subseteq A \times A$ astfel:

  $$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

  $\ker f$ se numește și nucleul lui f.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A \times A$ o relație de echivalență.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Propoziție

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$.
Aplicația $\pi : A \to A/\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A \times A$ o relație de echivalență.

Definiție

Un sistem de reprezentanți pentru $\sim$ este o submulțime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Propoziție

Fie X un sistem de reprezentanți pentru $\sim$. Atunci $A = \bigcup_{x \in X} [x]$ și $A/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Considerăm congruența modulo 2, $\equiv (\mathrm{mod}\ 2)$:
$[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$, $[1] = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}+1$;
$[2n] = [0]$ și $[2n+1] = [1]$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$; mulțimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$. Sisteme de reprezentanți: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Partiții

Fie A o mulțime nevidă.

Definiție

O partiție a lui A este o familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi nevide ale lui A care verifică proprietățile:

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pentru orice } i \neq j.$$

Partiția $(A_i)_{i\in I}$ se numește finită dacă I este finită.

Propoziție

Există o bijecție între mulțimea relațiilor de echivalență pe A si mulțimea partițiilor lui A:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiție a lui $A \mapsto$ relația de echivalență pe A definită prin: $x \sim y \Leftrightarrow$ există $i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$.
- $\sim$ relație de echivalență pe $A \mapsto$ partiția $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanți pentru $\sim$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulțime parțial (total) ordonată.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăți

- Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e \Rightarrow a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \geq e \Rightarrow a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S dacă $e \geq a$ pentru orice $a \in S$.

Proprietăți

- Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Orice minim (maxim) este element minimal (maximal). Reciproca nu este adevărată.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- majorant al lui S dacă $e \geq a$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremumul lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- infimumul lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăți

- Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S poate fi vidă.
- Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Mulțimi bine/inductiv ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de bună ordonare pe A.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma alegerii

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice*) (AC)*

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o mulțime C care conține un singur element din fiecare mulțime (A_i).

Reformulări

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.
- Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este nevid.

- formulată de Zermelo (1904)
- a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi mulțimea C sau funcția alegere f_C.

Axioma alegerii

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.
- Principiul Bunei Ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).