Γ-teoreme

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.40

Mulțimea $Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ a Γ-teoremelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

(i) $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) Σ este închisă la regulile de deducție, adică

- *(a)* dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$;
- *(b)* dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\forall x \varphi \in \Sigma$.

Dacă $\varphi \in Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$	$:=$	φ este Γ-teoremă
$Thm_{\mathcal{L}}$	$:=$	$Thm_{\mathcal{L}}(\emptyset)$
$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$	$:=$	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$
$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Delta$	$:=$	$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 2.41

O formulă φ se numește teoremă (logică) a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Convenție

Când $\mathcal{L}$ este clar din context, scriem Axm, Thm, $Thm(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \varphi$, $\vdash \varphi$, etc..

Reformulând condițiile din definiția Γ-teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 2.42

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, au loc următoarele proprietăți:

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$;

(iv) dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

Γ-teoreme

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme. Demonstrăm că orice Γ-teoremă are o proprietate P astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P;

(iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P, atunci ψ are proprietatea P;

(iv) demonstrăm că dacă φ are proprietatea P, atunci $\forall x\varphi$ are proprietatea P.

Γ-demonstrații

Definiția 2.43

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule θ_1, ..., θ_n a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$;

(iv) există $j < i$ și $x \in V$ a.î. $\theta_i = \forall x \theta_j$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 2.44

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 2.45

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Definiția 2.46

O mulțime Γ de formule se numește consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
Γ se numește inconsistentă dacă nu este consistentă, i.e. $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Propoziția 2.47

Pentru orice mulțime Γ de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă;

(ii) pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$;

(iii) există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Teorema de completitudine - prima versiune

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \vDash \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în 1949 o demonstrație simplificată.

Teorema de completitudine tare - prima versiune

Orice mulțime consistentă de enunțuri Γ este satisfiabilă.

Teorema de completitudine tare - a doua versiune

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi.$$

Teorii

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 2.48

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definiția 2.49

O mulțime de enunțuri Γ se numește completă dacă pentru orice enunț ψ,

$$\Gamma \vDash \psi \text{ sau } \Gamma \vDash \neg\psi.$$

Definiția 2.50

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \qquad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Observație: O $\mathcal{L}$-teorie T este completă $\iff$ pentru orice enunț φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.

Definiția 2.51

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Spunem că Γ este o mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.

Propoziția 2.52

(i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.

(ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(iii) $Th(\Gamma)$ este o teorie.

(iv) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

(i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \vDash \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.

(ii) "$\supseteq$" Conform (i) și Observației 2.49.(i).
"$\subseteq$" Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.

(iii) Pentru orice enunț φ, avem că
$Th(\Gamma) \vDash \varphi \iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$
$\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ (conform (ii)) $\iff \varphi \in Th(\Gamma)$.

(iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \vDash \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Propoziția 2.53

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ,

(i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.

(ii) Γ este teorie $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.

(iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi$ este enunț valid$\}$ este inclusă în orice teorie.

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorii

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 2.54

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 2.55

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned}(REFL) &:= \forall x (x \dot{\equiv} x)\\ (SIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \to y \dot{\equiv} x)\\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \to x \dot{\equiv} z)\end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A.
- $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează $\mathcal{K}$.
- Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y \big(x \neq y \land x \doteq y \land \forall z (z \doteq x \rightarrow (z = x \lor z = y)) \big),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \to \exists z (x \dot{<} z \land z \dot{<} y) \big).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

Exemple - Teoria grafurilor

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \to \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- modelele lui T sunt grafurile.

Exemple

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)\big),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.56

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple

Notații

- Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.
- $\exists^{\leq n} := \neg\exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.57

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\
\mathcal{A} \vDash \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.}
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.58

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.