



Γ -teoreme

Fie Γ o mulțime de formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 2.40

Mulțimea $Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ a Γ -teoremelor lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq \Sigma$;
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;
- (iii) Σ este închisă la regulile de deducție, adică
 - (a) dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$;
 - (b) dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\forall x \varphi \in \Sigma$.

Dacă $\varphi \in Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele Γ** .

Notării

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= φ este Γ -teoremă

$Thm_{\mathcal{L}}$:= $Thm_{\mathcal{L}}(\emptyset)$

$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Delta$:= $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 2.41

O formulă φ se numește **teoremă (logică)** a lui \mathcal{L} dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Convenție

Când \mathcal{L} este clar din context, scriem Axm , Thm , $Thm(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \varphi$, $\vdash \varphi$, etc..

Reformulând condițiile din definiția Γ -teoremelor folosind notația \vdash , obținem

Propoziția 2.42

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ , au loc următoarele proprietăți:

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$;
- (iv) dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**. Demonstrăm că orice Γ -teoremă are o proprietate P astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P ;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P , atunci ψ are proprietatea P ;
- (iv) demonstrăm că dacă φ are proprietatea P , atunci $\forall x\varphi$ are proprietatea P .

Definiția 2.43

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$;
- (iv) există $j < i$ și $x \in V$ a.î. $\theta_i = \forall x \theta_j$.

O \emptyset -demonstrație se va numi simplu demonstrație.



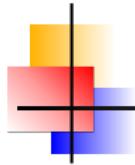
Γ -demonstrații

Definiția 2.44

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ -demonstrației.

Propoziția 2.45

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o Γ -demonstrație a lui φ .



Mulțimi consistente

Definiția 2.46

O mulțime Γ de formule se numește **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.

Γ se numește **inconsistentă** dacă nu este consistentă, i.e. $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ .

Propoziția 2.47

Pentru orice mulțime Γ de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă;
- (ii) pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$;
- (iii) există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.



Teorema de completitudine

Teorema de completitudine - prima versiune

Pentru orice formulă φ ,

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

- ▶ Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- ▶ Henkin a dat în 1949 o demonstrație simplificată.

Teorema de completitudine tare - prima versiune

Orice mulțime consistentă de enunțuri Γ este satisfiabilă.

Teorema de completitudine tare - a doua versiune

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 2.48

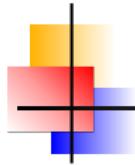
Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

- (i) $\Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.
- (iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definiția 2.49

O mulțime de enunțuri Γ se numește **completă** dacă pentru orice enunț ψ ,

$$\Gamma \models \psi \text{ sau } \Gamma \models \neg\psi.$$

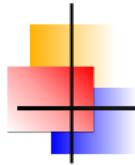


Definiția 2.50

O **\mathcal{L} -teorie** este o mulțime T de enunțuri ale lui \mathcal{L} care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Observație: O \mathcal{L} -teorie T este completă \iff pentru orice enunț φ , avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.



Definiția 2.51

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , **teoria generată de Γ** este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Spunem că Γ este o mulțime de **axiome** pentru $Th(\Gamma)$.

I Propoziția 2.52

- (i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.
- (ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.
- (iii) $Th(\Gamma)$ este o teorie.
- (iv) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

- (i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.
- (ii) " \supseteq " Conform (i) și Observației 2.49.(i).
" \subseteq " Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.
- (iii) Pentru orice enunț φ , avem că

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) \models \varphi &\iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi) \\ &\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \text{ (conform (ii))} \iff \varphi \in Th(\Gamma). \end{aligned}$$
- (iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Propoziția 2.53

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ ,

- (i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.
- (ii) Γ este teorie $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.
- (iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț valid}\}$ este inclusă în orice teorie.

Dem.: Exercițiu ușor.

- ▶ O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $Th(\Gamma)$.
- ▶ Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 2.54

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 2.55

O clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** \mathcal{K} .



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde \equiv este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(REFL) \quad := \quad \forall x(x \dot{\equiv} x)$$

$$(SIM) \quad := \quad \forall x \forall y(x \dot{\equiv} y \rightarrow y \dot{\equiv} x)$$

$$(TRANZ) \quad := \quad \forall x \forall y \forall z(x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \rightarrow x \dot{\equiv} z)$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ Fie \mathcal{K} clasa structurilor (A, \equiv) , unde \equiv este relație de echivalență pe A .
- ▶ $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează \mathcal{K} .
- ▶ Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge x \dot{=} y \wedge \forall z (z \dot{=} x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.



Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde \leq este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(REFL) := \forall x(x \dot{\leq} x)$$

$$(ANTISIM) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.



Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned}(IREFL) \quad &:= \quad \forall x \neg(x \dot{<} x) \\(TRANZ) \quad &:= \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)\end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.



Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

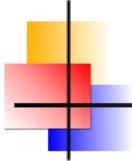
$$(TOTAL) \quad := \quad \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.



Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

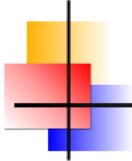
$$(DENS) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.



Exemple - Teoria grafurilor

- ▶ $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶ \mathcal{L}_{Graf} -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) \quad := \quad \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

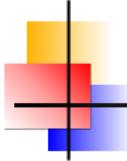
$$(SIM) \quad := \quad \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt grafurile.



Exemple

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.56

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.



Exemple

Notării

- ▶ Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.
- ▶ $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- ▶ $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.57

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \models \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.}\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.58

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.