

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.40

Mulțimea $Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ a Γ -teoremelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq \Sigma$;
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;
- (iii) Σ este închisă la regulile de deducție, adică
 - (a) dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$;
 - (b) dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\forall x\varphi \in \Sigma$.

Dacă $\varphi \in Thm_{\mathcal{L}}(\Gamma)$, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele** Γ .

Notății

- $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= φ este Γ -teoremă
- $Thm_{\mathcal{L}}$:= $Thm_{\mathcal{L}}(\emptyset)$
- $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$:= $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$
- $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Delta$:= $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 2.41

O formulă φ se numește **teoremă (logică)** a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Convenție

Când $\mathcal{L}$ este clar din context, scriem Axm , Thm , $Thm(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \varphi$, $\vdash \varphi$, etc..

Reformulând condițiile din definiția Γ -teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 2.42

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ , au loc următoarele proprietăți:

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$;
- (iv) dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**. Demonstrăm că orice Γ -teoremă are o proprietate P astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P ;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P , atunci ψ are proprietatea P ;
- (iv) demonstrăm că dacă φ are proprietatea P , atunci $\forall x\varphi$ are proprietatea P .

Definiția 2.43

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$;
- (iv) există $j < i$ și $x \in V$ a.î. $\theta_i = \forall x \theta_j$.

O $\emptyset$ -demonstrație se va numi simplu **demonstrație**.

5

Definiția 2.44

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau **demonstrație a lui φ din ipotezele Γ** este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește **lungimea** Γ -demonstrației.

Propoziția 2.45

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

6

Definiția 2.46

O mulțime Γ de formule se numește **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.

Γ se numește **inconsistentă** dacă nu este consistentă, i.e. $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ .

Propoziția 2.47

Pentru orice mulțime Γ de formule, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă;
- (ii) pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg \psi$;
- (iii) există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg \psi$.

7

Teorema de completitudine - prima versiune

Pentru orice formulă φ ,

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în 1949 o demonstrație simplificată.

Teorema de completitudine tare - prima versiune

Orice mulțime consistentă de enunțuri Γ este satisfiabilă.

Teorema de completitudine tare - a doua versiune

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

8

Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$Mod(\Gamma) :=$ clasa modelelor lui Γ .

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 2.48

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

- (i) $\Gamma \models \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.
- (iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definiția 2.49

O mulțime de enunțuri Γ se numește **completă** dacă pentru orice enunț ψ ,

$$\Gamma \models \psi \text{ sau } \Gamma \models \neg\psi.$$

Definiția 2.50

O **$\mathcal{L}$ -teorie** este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Observație: O $\mathcal{L}$ -teorie T este completă $\iff$ pentru orice enunț φ , avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.

Definiția 2.51

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , **teoria generată de Γ** este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Spunem că Γ este o mulțime de **axiome** pentru $Th(\Gamma)$.

Propoziția 2.52

- (i) $\Gamma \subseteq Th(\Gamma)$.
- (ii) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.
- (iii) $Th(\Gamma)$ este o teorie.
- (iv) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.:

- (i) Pentru orice $\varphi \in \Gamma$, avem că $\Gamma \models \varphi$, deci $\varphi \in Th(\Gamma)$.
- (ii) " $\supseteq$ " Conform (i) și Observației 2.49.(i).
" $\subseteq$ " Conform definiției lui $Th(\Gamma)$.
- (iii) Pentru orice enunț φ , avem că
 $Th(\Gamma) \models \varphi \iff Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\varphi)$
 $\iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ (conform (ii)) $\iff \varphi \in Th(\Gamma)$.
- (iv) Fie T o teorie care conține Γ și $\varphi \in Th(\Gamma)$. Din $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ și $Mod(T) \subseteq Mod(\Gamma)$ rezultă că $Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$, deci $T \models \varphi$. Deoarece T este teorie, obținem că $\varphi \in T$. Așadar, $Th(\Gamma) \subseteq T$.

Propoziția 2.53

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ ,

- (i) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Th(\Gamma) \subseteq Th(\Delta)$.
- (ii) Γ este teorie $\iff \Gamma = Th(\Gamma)$.
- (iii) $Th(\emptyset) = \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț valid}\}$ este inclusă în orice teorie.

Dem.: Exercițiu ușor.

13

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatizabilă** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatizabilă, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 2.54

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 2.55

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$ -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** $\mathcal{K}$.

14



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\equiv} = (\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\equiv)$
- $\mathcal{L}_{\equiv}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x(x \equiv x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este

$$T := Th((REFL), (SIM), (TRANZ)).$$

- T este finit axiomatizabilă;
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A .
- $\mathcal{K} = Mod(T)$, deci T axiomatizează $\mathcal{K}$.
- Spunem și că T axiomatizează clasa relațiilor de echivalență.

15



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y(x \neq y \wedge x \equiv y \wedge \forall z(z \equiv x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

16

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶ $\mathcal{L}_{\leq} = (\leq, \emptyset, \emptyset) = (\leq)$
- ▶ $\mathcal{L}_{\leq}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \leq x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

17

Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶ $\mathcal{L}_{<} = (<, \emptyset, \emptyset) = (<)$
- ▶ $\mathcal{L}_{<}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg (x < x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

18

Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

19

Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ T axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

20



Exemple - Teoria grafurilor

- ▶ $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶ $\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- ▶ T este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui T sunt grafurile.

21



Exemple

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.56

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

22



Exemple

Notății

- ▶ Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x (x = x)$.
- ▶ $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- ▶ $\exists^=n := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.57

Pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente}$$

$$\mathcal{A} \models \exists^=n \iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.58

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$ -structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

23