Semantică

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.16

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 2.17

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.18

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \Dashv\vDash \psi$

Definiția 2.19

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \Dashv\vDash \psi$ ddacă $(\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi)$ ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$
\begin{array}{rcll}
\neg\exists x\varphi & \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \forall x\neg\varphi & (1)\\
\neg\forall x\varphi & \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \exists x\neg\varphi & (2)\\
\forall x(\varphi\wedge\psi) & \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \forall x\varphi\wedge\forall x\psi & (3)\\
\forall x\varphi\vee\forall x\psi & \vDash & \forall x(\varphi\vee\psi) & (4)\\
\exists x(\varphi\wedge\psi) & \vDash & \exists x\varphi\wedge\exists x\psi & (5)\\
\exists x(\varphi\vee\psi) & \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \exists x\varphi\vee\exists x\psi & (6)\\
\forall x(\varphi\to\psi) & \vDash & \forall x\varphi\to\forall x\psi & (7)\\
\forall x(\varphi\to\psi) & \vDash & \exists x\varphi\to\exists x\psi & (8)\\
\forall x\varphi & \vDash & \exists x\varphi & (9)
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\varphi &\vDash \exists x\varphi && (10)\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi && (11)\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{H}} \forall y\forall x\varphi && (12)\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{H}} \exists y\exists x\varphi && (13)\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (14)
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \rightarrow t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.22

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \ldots, m$,

$$\vDash (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \to ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m \quad (15)$$

$$\vDash (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \to (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m). \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \vDash ((t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \vDash (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \ldots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \vDash (ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m)[e]$.

Variabile legate și libere

Definiția 2.23

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i,j)-subexpresia lui φ este o subformulă a lui φ de forma $\forall x \psi$;
- spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în ϕ;
- x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;
- x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x \varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}
$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 2.24

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.25

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$
\begin{aligned}
\varphi &\mathrel{\text{H}} \exists x\varphi && (17)\\
\varphi &\mathrel{\text{H}} \forall x\varphi && (18)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \wedge \forall x\psi && (19)\\
\forall x(\varphi \vee \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \vee \forall x\psi && (20)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \wedge \exists x\psi && (21)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \vee \exists x\psi && (22)\\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \rightarrow \forall x\psi && (23)\\
\exists x(\varphi \rightarrow \psi) &\mathrel{\text{H}} \varphi \rightarrow \exists x\psi && (24)\\
\forall x(\psi \rightarrow \varphi) &\mathrel{\text{H}} \exists x\psi \rightarrow \varphi && (25)\\
\exists x(\psi \rightarrow \varphi) &\mathrel{\text{H}} \forall x\psi \rightarrow \varphi && (26)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

Notație

Fie $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termen. Scriem

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $t^{\mathcal{A}}(e)$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Notație

Fie $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ o formulă. Scriem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

în loc de $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$, unde $e : V \to A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \ldots, e(x_n) = a_n$.

Definiția 2.27

O formulă φ se numește enunț (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 2.28

Dacă φ este un enunț, atunci

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$.
Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.25 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Exemplu

- $\vDash \exists x(x = x)$;
- $\mathcal{A} \not\vDash \neg\exists x(x = x)$ pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$.

Tautologii

Noțiunea de tautologie se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor $\neg, \rightarrow$.

Definiția 2.29

O $\mathcal{L}$-evaluare (de adevăr) este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0,1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,

- $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 2.30

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Fm_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0,1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 2.31

φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare F.

Propoziția 2.32

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. $\square$

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.33

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este model al lui Γ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Gamma$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

Definiția 2.34

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă Γ are un model.
Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Definiția 2.35

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$.

Definiția 2.36

O mulțime de formule Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$. Notație: $\Gamma \vDash \Delta$.

Propoziția 2.37

(i) $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;

(ii) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vDash \varphi$, atunci $\Delta \vDash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vDash \Delta$ și $\Delta \vDash \varphi$, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 2.38

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}}$ a axiomelor ale lui $\mathcal{L}$ constă din toate formulele de forma:

(A1) φ, dacă φ este tautologie

(A2) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$, dacă φ, ψ sunt formule și x este variabilă

(A3) $\varphi \to \forall x\varphi$, dacă φ este formulă și x este variabilă care nu apare în φ

(A4) $\exists x(x = t)$, dacă t este termen și x este variabilă care nu apare în t

(A5) $s = t \to (\varphi \to \psi)$, dacă φ și ψ sunt formule atomice și ψ se obține din φ înlocuind o apariție a lui s cu t

Definiția 2.39

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele:

- (MP) din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (modus ponens).
- (GEN) dacă x este variabilă, atunci din φ se inferă $\forall x \varphi$ (generalizarea).

$$(MP): \quad \frac{\varphi, \ \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \qquad\qquad (GEN): \quad \frac{\varphi}{\forall x \varphi}.$$