

Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 2.16

Spunem că φ este **adevărată** într-o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că \mathcal{A} **satisfacă** φ sau că \mathcal{A} este un **model** al lui φ .

Notație: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 2.17

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau **(logic) validă** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

1

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (1)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (2)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (3)$$

$$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (4)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \quad (5)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (6)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (7)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (8)$$

$$\forall x \varphi \models \exists x \varphi \quad (9)$$

Fie φ, ψ formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 2.18

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notație: $\varphi \equiv \psi$

Definiția 2.19

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vdash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vdash \psi$ dacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.

(ii) $\varphi \vdash \psi$ dacă ($\psi \vdash \varphi$ și $\varphi \vdash \psi$) dacă $\vdash \psi \leftrightarrow \varphi$.

2

$$\varphi \models \exists x \varphi \quad (10)$$

$$\forall x \varphi \models \varphi \quad (11)$$

$$\forall x \forall y \varphi \models \forall y \forall x \varphi \quad (12)$$

$$\exists x \exists y \varphi \models \exists y \exists x \varphi \quad (13)$$

$$\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi. \quad (14)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice termeni s, t, u ,

(i) $\models t = t$;

(ii) $\models s = t \rightarrow t = s$;

(iii) $\models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor.

3

4

Propoziția 2.22

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \dots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m \quad (15)$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m). \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \dots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m)[e]$.

Definiția 2.23

Fie $\varphi = \varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui \mathcal{L} și x o variabilă.

- ▶ spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i, j) -subexpresia lui φ este o subformulă a lui φ de forma $\forall x \psi$;
- ▶ spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este variabilă legată (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este variabilă liberă (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x \varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Notătie: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Propoziția 2.24

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice termen t ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in Var(t), \text{ atunci } t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.25

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice formulă φ ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in FV(\varphi), \text{ atunci } \mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x \varphi \quad (17)$$

$$\varphi \models \forall x \varphi \quad (18)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x \psi \quad (19)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x \psi \quad (20)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x \psi \quad (21)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x \psi \quad (22)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (23)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (24)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x \psi \rightarrow \varphi \quad (25)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x \psi \rightarrow \varphi \quad (26)$$

Dem.: Exercițiu.

9

Definiția 2.27

O formulă φ se numește **enunț** (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notație: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui \mathcal{L} .

Propoziția 2.28

Dacă φ este un enunț, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$.

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.25 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Exemplu

- ▶ $\models \exists x(x = x)$;
- ▶ $\mathcal{A} \not\models \neg \exists x(x = x)$ pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} .

11

Notație

Fie $t(x_1, \dots, x_n)$ un termen. Scriem

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de $t^{\mathcal{A}}(e)$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.

Notăție

Fie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ o formulă. Scriem

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î. $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.

10

Noțiunea de **tautologie** se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor \neg, \rightarrow .

Definiția 2.29

O **\mathcal{L} -evaluare (de adevară)** este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ ,

- ▶ $F(\neg \varphi) = \neg F(\varphi)$;
- ▶ $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 2.30

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e, \mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o \mathcal{L} -evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

12

**Definiția 2.31**

φ este **tautologie** dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice \mathcal{L} -evaluare F .

Propoziția 2.32

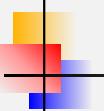
Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este \mathcal{L} -evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. \square

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

13

**Definiția 2.36**

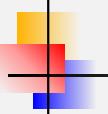
O mulțime de formule Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $\Gamma \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$. **Notăție:** $\Gamma \models \Delta$.

Propoziția 2.37

- (i) $\models \varphi$ dacă $\emptyset \models \varphi$;
- (ii) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \models \varphi$, atunci $\Delta \models \varphi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \models \Delta$ și $\Delta \models \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

15



Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.33

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} este **model** al lui Γ dacă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Gamma$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \Gamma$

Definiția 2.34

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă Γ are un model.

Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

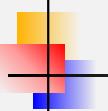
Definiția 2.35

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\Gamma \models \varphi$.

14

**Definiția 2.38**

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}}$ a **axiomelor** ale lui \mathcal{L} constă din toate formulele de forma:

- (A1) φ , dacă φ este tautologie
- (A2) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$, dacă φ, ψ sunt formule și x este variabilă
- (A3) $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$, dacă φ este formulă și x este variabilă care **nu apare în** φ
- (A4) $\exists x(x = t)$, dacă t este termen și x este variabilă care **nu apare în** t
- (A5) $s = t \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, dacă φ și ψ sunt formule atomice și ψ se obține din φ înlocuind o apariție a lui s cu t

16

Definiția 2.39

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele:

(MP) din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens**).

(GEN) dacă x este variabilă, atunci din φ se inferă $\forall x\varphi$ (**generalizarea**).

$$(MP) : \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad (GEN) : \frac{\varphi}{\forall x\varphi}.$$