



LOGICA DE ORDINUL I

Un limbaj \mathcal{L} de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii \neg și \rightarrow ;
 - ▶ paranteze: $(,)$;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal \forall ;
 - ▶ o mulțime \mathcal{R} de **simboluri de relații**;
 - ▶ o mulțime \mathcal{F} de **simboluri de funcții**;
 - ▶ o mulțime \mathcal{C} de **simboluri de constante**;
 - ▶ o funcție **aritate** ari : $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
-
- ▶ \mathcal{L} este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
 - ▶ τ se numește **signatura** lui \mathcal{L} sau **vocabularul** lui \mathcal{L} sau **alfabetul** lui \mathcal{L} sau **tipul de similaritate** al lui \mathcal{L}

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui \mathcal{L} este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.
- Notăm variabilele cu x, y, z, v, \dots , simbolurile de relații cu P, Q, R, \dots , simbolurile de funcții cu f, g, h, \dots și simbolurile de constante cu c, d, e, \dots
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:
 - $\mathcal{F}_m :=$ mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;
 - $\mathcal{R}_m :=$ mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

Definiția 2.1

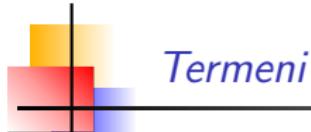
Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui \mathcal{L} este mulțimea tuturor sirurilor finite de simboluri ale lui \mathcal{L} .

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .

Definiția 2.2

Fie $\theta = \theta_0\theta_1\dots\theta_{k-1}$ o expresie a lui \mathcal{L} , unde $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice i .

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, atunci expresia $\theta_i\dots\theta_j$ se numește **(i, j)-subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k - 1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ ;
- ▶ Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .



Definiția 2.3

Mulțimea $\text{Trm}_{\mathcal{L}}$ a **termenilor** lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

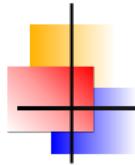
- ▶ orice variabilă este element al lui Γ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui Γ ;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Notări:

- ▶ Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$
- ▶ $\text{Var}(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t .
- ▶ Scriem $t(x_1, \dots, x_n)$ dacă x_1, \dots, x_n sunt variabile și $\text{Var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definiția 2.4

Un termen t se numește **închis** dacă $\text{Var}(t) = \emptyset$.



Termeni

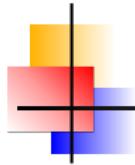
Propoziția 2.5 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.



Termeni

Citire unică (Unique readability)

Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $t = x$, unde $x \in V$;
- ▶ $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- ▶ $t = ft_1 \dots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ ($m \geq 1$) și t_1, \dots, t_m sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Definiția 2.6

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt expresiile de forma:

- ▶ $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $(Rt_1 \dots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și t_1, \dots, t_m sunt termeni.

Definiția 2.7

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a formulelor lui \mathcal{L} este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui Γ ;
- ▶ Γ este închisă la \neg : dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow : dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x): dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x .



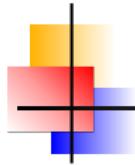
Formule

Notării

- ▶ Formule: $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶ $\text{Var}(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ .

Convenție

Ca și în cazul logicii propoziționale, de obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \dots t_m$ în loc de $(Rt_1 \dots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..



Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice;
- ▶ Γ este închisă la \neg, \rightarrow și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.



Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și t_1, \dots, t_m sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Conecțori derivați

Conecțorii \vee , \wedge , \leftrightarrow și **cuantificatorul existențial** \exists sunt introdusi prin următoarele abrevieri:

$$\varphi \vee \psi := ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

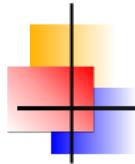
$$\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$\exists x\varphi := (\neg\forall x(\neg\varphi)).$$

Convenții

- ▶ Se aplică aceleași convenții ca la logica propozițională LP în privința precedenței conectorilor \neg , \rightarrow , \vee , \wedge , \leftrightarrow .
- ▶ Cuantificatorii \forall , \exists au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- ▶ Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.



Notății

De multe ori identificăm un limbaj \mathcal{L} cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- ▶ Scriem de multe ori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ și $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- ▶ Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 ft_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- ▶ Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 Rt_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

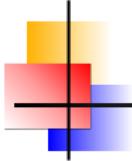
Definiția 2.9

O **L-structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶ A este o mulțime nevidă;
- ▶ $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- ▶ $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- ▶ $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- ▶ A se numește **universul** structurii \mathcal{A} . **Notatie:** $A = |\mathcal{A}|$
- ▶ $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în \mathcal{A} .



Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶ $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$



Exemple - Limbajul aritmeticii \mathcal{L}_{ar}

$$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}), \text{ unde}$$

- ▶ $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}; \dot{<} \text{ este simbol de relație binară, adică are aritatea } 2;$
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}; \dot{+}, \dot{\times} \text{ sunt simboluri de operații binare și } \dot{S} \text{ este simbol de operație unar (adică are aritatea } 1\text{);}$
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}.$

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0}).$

Exemplul natural de \mathcal{L}_{ar} -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de \mathcal{L}_{ar} -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1).$



Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- ▶ $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ \mathcal{L} -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate (A, \leq) , folosim simbolul \leq în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\leq} .
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul E în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{Graf} .
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri (A, \in) , folosim simbolul \in în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\in} .



Exemple - Limbajul grupurilor \mathcal{L}_{Gr}

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{-1}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{-1}$ simbol unar
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{-1}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{-1}, \dot{e})$.

Exemple naturale de \mathcal{L}_{Gr} -structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, \dot{-1}, e)$.

Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{-1}^{\mathcal{G}} = \dot{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

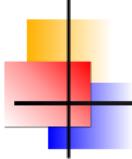
Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.



SEMANTICA



Interpretare (evaluare)

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I și \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură.

Definiția 2.10

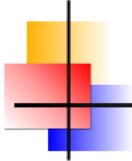
O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui \mathcal{L} în \mathcal{A} este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește **interpretarea** $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.



Interpretarea formulelor

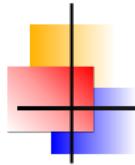
Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



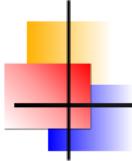
Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \neg\varphi^{\mathcal{A}}(e);$
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e).$

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0.$
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1).$



Interpretarea formulelor

Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{daca } v \neq x \\ a & \text{daca } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x\varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



Relația de satisfacere

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ **e satisfacă** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- ▶ **e nu satisfacă** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.

Corolarul 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.



Relația de satisfacere

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

- (i) $(\varphi \vee \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \vee \psi^A(e);$
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \wedge \psi^A(e);$
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \leftrightarrow \psi^A(e);$
- (iv) $(\exists x\varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 2.15

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$