

LOGICA DE ORDINUL I

1

Limbaje de ordinul I

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;
 - ▶ paranteze: $(,)$;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal $\forall$;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;
 - ▶ o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
 - ▶ o funcție aritate $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
- ▶ $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
- ▶ τ se numește **signatura** lui $\mathcal{L}$ sau **vocabularul** lui $\mathcal{L}$ sau **alfabetul** lui $\mathcal{L}$ sau **tipul de similaritate** al lui $\mathcal{L}$

2

Limbaje de ordinul I

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este
$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$
- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \dots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R, \dots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \dots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \dots$

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m :=$ mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;

$\mathcal{R}_m :=$ mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

3

Limbaje de ordinul I

Definiția 2.1

Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .

Definiția 2.2

Fie $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice i .

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i, j) -subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ ;
- ▶ Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .

4

Definiția 2.3

Mulțimea $Trm_{\mathcal{L}}$ a termenilor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice variabilă este element al lui Γ ;
- ▶ orice simbol de constantă este element al lui Γ ;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Notatii:

- ▶ Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$
- ▶ $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t .
- ▶ Scriem $t(x_1, \dots, x_n)$ dacă $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile și $Var(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definiția 2.4

Un termen t se numește **închis** dacă $Var(t) = \emptyset$.

5

Propoziția 2.5 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- ▶ dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

6

Citire unică (Unique readability)

Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $t = x$, unde $x \in V$;
- ▶ $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- ▶ $t = ft_1 \dots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ ($m \geq 1$) și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

7

Definiția 2.6

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- ▶ $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $(Rt_1 \dots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni.

Definiția 2.7

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a **formulelor** lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- ▶ orice formulă atomică este element al lui Γ ;
- ▶ Γ este închisă la $\neg$: dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\rightarrow$: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x): dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x .

8

Notății

- ▶ Formule: $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶ $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ .

Convenție

Ca și în cazul logicii propoziționale, de obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \dots t_m$ în loc de $(Rt_1 \dots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..

9

Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice;
- ▶ Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

10

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (Rt_1 \dots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

11

Conectori derivați

Conectorii $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ și **cuantificatorul existențial** $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned}\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ \exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)).\end{aligned}$$

Convenții

- ▶ Se aplică aceleași convenții ca la logica propozițională LP în privința precedenței conectorilor $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$.
- ▶ Cuantificatorii $\forall, \exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- ▶ Așadar, $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

12

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- ▶ Scriem de multe ori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ și $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- ▶ Pentru simboluri f de operații binare scriem t_1ft_2 în loc de ft_1t_2 .
- ▶ Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem t_1Rt_2 în loc de Rt_1t_2 .

13

Definiția 2.9

O $\mathcal{L}$ -**structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶ A este o mulțime nevidă;
- ▶ $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- ▶ $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- ▶ $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- ▶ A se numește **universul** structurii $\mathcal{A}$. **Notăție:** $A = |\mathcal{A}|$
- ▶ $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în $\mathcal{A}$.

14

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶ $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

15

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{<\}; <$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- ▶ $\mathcal{F} = \{+, \dot{+}, \dot{S}\}$; $+$, $\dot{+}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- ▶ $\mathcal{C} = \{0\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (<; +, \dot{+}, \dot{S}; 0)$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (<, +, \dot{+}, \dot{S}, 0)$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$<^{\mathcal{N}} = <, +^{\mathcal{N}} = +, \dot{+}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, 0^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$ -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

16

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binară

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- ▶ $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ $\mathcal{L}$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\leq$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul E în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\in$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

17

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\cdot, {}^{-1}\}$; $\cdot$ simbol binar, ${}^{-1}$ simbol unar
- ▶ $\mathcal{C} = \{e\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \cdot, {}^{-1}; e)$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\cdot, {}^{-1}, e)$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, {}^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\cdot^{\mathcal{G}} = \cdot$, ${}^{-1}^{\mathcal{G}} = {}^{-1}$, $e^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{+, -\}$; $+$ simbol binar, $-$ simbol unar;
- ▶ $\mathcal{C} = \{0\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (+, -, 0)$.

18

SEMANTICA

19

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură.

Definiția 2.10

O **interpretare** sau **evaluare** a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește **interpretarea** $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

20

Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

21

Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \neg\varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$.

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$.

22

Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{daca } v \neq x \\ a & \text{daca } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

23

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$ -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisface** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- ▶ e **nu satisface** φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. **Notăție:** $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.

Corolarul 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

24



Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

- (i) $(\varphi \vee \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \vee \psi^A(e)$;
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \wedge \psi^A(e)$;
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^A(e) = \varphi^A(e) \leftrightarrow \psi^A(e)$;
- (iv) $(\exists x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 2.15

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.