

ACADEMIA ROMÂNĂ
Şcoala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române

REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT

ANALIZĂ STOCASTICĂ PENTRU

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

CONDUCĂTOR DE DOCTORAT: Prof. dr. Lucian Beznea

DOCTORAND: Ana-Maria Boeangiu

Bucureşti, 2026

Cuprins

1 INTRODUCERE 1

2 PRELIMINARII ASUPRA TEORIEI ANALITICE ŞI PROBABILISTE A POTENŢIALULUI 3

3 h-TRANSFORMAREA UNUI PROCES MARKOV 3

3.1 Proprietatea "tightness" a capacităţilor sub h-transformare 5

3.2 Restricţia la complementara unei mulţimi absorbante 5

3.3 Generatorul slab 6

3.4 h-transformarea şi subordonarea Bochner 6

3.5 h-transformarea pentru subordonarea Bochner a L^p-semigrupurilor 7

4 $\widehat{h}$-TRANSFORMAREA UNUI PROCES DE RAMIFICARE NELOCALĂ . . 9

4.1 Funcţii multiplicative şi nuclee de ramificare pe $\widehat{E}$ 10

4.2 Ecuaţia de evoluţie neliniară asociată $\widehat{h}$-transformării 12

5 h-TRANSFORMAREA UNEI REZOLVANTE NELINIARE 13

5.1 Operatorul V^h 14

5.2 h-transformarea şi funcţii exacte 14

5.3 h-transformarea Doob pentru operatorul Monge-Ampère 16

1 INTRODUCERE

În această teză se studiază probleme de analiză stocastică pentru ecuaţii cu derivate parţiale, induse de h-transformarea (în sensul lui J. L. Doob) a unui proces Markov. Reamintim că dacă L este generatorul procesului Markov dat, atunci generatorul procesului h-transformat este $g \mapsto \frac{1}{h}L(hg)$; vezi Corolarul 3.5 (i) pentru un enunţ mai precis.

În studiul comportamentului la frontieră a funcţiilor armonice pe un domeniu Euclidian arbitrar, R. S. Martin [48] a considerat funcţiile nucleu date prin raportul a două funcţii superarmonice. Aceasta este originea h-transformării lui Doob. Literatura de specialitate iniţială

este bogată atât din punct de vedere analitic cât şi probabilist, menţionăm doar monografiile lui P. A. Meyer [49] şi J. L. Doob [30].

Teza este organizată după cum urmează.

În Capitolul 3, intitulat *h-transformarea unui proces Markov*, se dă o demonstraţie transparentă a construcţiei procesului h-transformat, X^h (în Propoziţia 3.1) şi se deduc rezultate pentru funcţii excesive, topologie fină, redusa unei funcţii şi mulţimi polare. Procesul X^h poate fi un instrument pentru investigarea comportamentului la frontieră a câtului de forma $\frac{u}{h}$, unde $h > 0$ şi u este o funcţie armonică pe E.

În Paragraful 3.4 se demostrează că h-transformarea şi subordonarea Bochner sunt modificări compatibile ale unui proces Markov.

Paragraful 3.5 este dedicat h-transformării în cadrul spaţiilor L^p. Se arată că (Propoziţia 3.6) h-transformarea unui C_0-semigrup subordonat Bochner, de operatori sub-Markovieni pe un spaţiu L^p este funcţia de tranziţie a unui proces obţinut ca h-transformarea subordonării unui proces (Markov) drept, pe un spaţiu de stări extins.

Principalul rezultat (Teorema 4.2) este demonstrat în Capitolul 4, intitulat *$\widehat{h}$-transformarea unui proces de ramificare nelocală*. În particular, se obţine restricţia unui proces de ramificare la mulţimea configuraţiilor finite ale complementarei unei mulţimi absorbante şi se demonstrează că este tot un proces de ramificare. Ca o consecinţă, se deduce reprezentarea probabilistă pentru soluţia ecuaţiei de evoluţie neliniare cu date iniţiale la frontieră (Corolarul 4.3), completând un răspuns la o întrebare a lui P. Hsu.

Capitolul 5, intitulat *h-transformarea unei rezolvante neliniare*, începe cu câteva preliminarii despre operatorii neliniari sub-Markovieni şi proprietăţile acestora, precum principiul complet al maximului (neliniar) în sensul dezvoltat de C. Dellacherie în [29].

În Paragraful 5.1 se introduce operatorul V^h şi se evidenţiază principalele sale proprietăţi care se vor folosi în studierea operatorului Monge-Ampère real şi h-transformarea sa.

În Paragraful 5.2, intitulat *h-transformarea şi funcţii exacte*, se fixează o funcţie $k \in \mathcal{B}_+(E)$ mărginită şi de consideră semigrupul $({}^kP_t)_{t\geq 0}$ dat de formula Feynman-Kac,

$$ {}^kP_t f(x) = \mathbb{E}^x(e^{-\int_0^t k(X_s)ds} f(X_t)), \;\; x \in E, \; t \geq 0. $$

În Paragraful 5.3 considerăm operatorul real Monge-Ampère studiat în [26], ca infimumul

unei familii de operatori liniari (5.2). În plus, luând o funcţie mărginită strict convexă h definim h-transformarea sa, conform [10].

Tot în Capitolul 5 studiem h-transformarea lui Doob pentru operatori neliniari, unde h este o funcţie strict pozitivă. Ca un exemplu, considerăm operatorul Monge-Ampère pe $\mathbb{R}^d$. Mai exact, considerăm h-transformarea rezolvantei asociate operatorului Monge-Ampère şi arătăm că este rezolvanta unui operator de tip Monge-Ampère (având aproximarea cu operatori liniari ca în [26]). Se arată că aproximarea cu operatori liniari se păstrează prin h-transformarea operatorului D^2, unde D^2u este matricea hessiană a funcţiei u (Propoziţia 5.13).

2 PRELIMINARII ASUPRA TEORIEI ANALITICE ŞI PROBABILISTE A POTENŢIALULUI

Scopul acesui capitol este de a introduce noţiuni care apar în această teză. Sunt prezentate rezultate pregătitoare privind teoria analitică şi probabilistă a potenţialului, pe care le vom folosi în continuare în teză precum: nuclee, rezolvante de nuclee, funcţii excesive, topologie fină, mulţimi polare şi semipolare.

3 h-TRANSFORMAREA UNUI PROCES MARKOV

. Fie E un spaţiu topologic Luzin (E este un spaţiu homeomorf cu o submulţime Borel a unui spaţiu metric compact), înzestrat cu σ-algebra Borel $\mathcal{B}(E)$.

Fie $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ o rezolvantă sub-Markoviană de nuclee pe $(E, \mathcal{B}(E))$. Notăm cu $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ mulţimea tuturor funcţiilor $\mathcal{B}(E)$-măsurabile $\mathcal{U}$-excesive. Fie $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x, \zeta)$ un proces Markov drept pe E, având $(P_t)_{t\geq 0}$ ca funcţie de tranziţie, $P_t f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_t), t < \zeta), t \geq 0, f \in \mathcal{B}_+(E)$. Rezolvanta de nuclee $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ pe $(E, \mathcal{B}(E))$ asociată cu $(P_t)_{t\geq 0}$ este definită ca $U_\alpha f := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f dt, f \in \mathcal{B}_+(E)$.

Presupunem că $h \in \mathcal{B}_+(E)$. Fixăm mulţimea

$$E_h := \{x \in E : 0 < h(x) < \infty\}.$$

Dacă N este un nucleu pe $(E, \mathcal{B}(E))$ considerăm nucleul N^h pe E_h definit prin

$$N^h f := \frac{1}{h} N(h\bar{f})|_{E_h},\ f \in \mathcal{B}_+(E_h),$$

unde $\bar{f}$ este extensia de la E_h la E a funcţiei f, cu zero pe $E \setminus E_h$.

Propoziţia 3.1. *Fie X un proces drept cu spaţiul stărilor E şi funcţie de tranziţie $(P_t)_{t\geqslant 0}$ şi fie $h \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, adică h este o funcţie excesivă în raport cu X. Atunci sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

(i) *Familia de nuclee $(P_t^h)_{t\geqslant 0}$ pe E_h, definită prin:*

$$P_t^h f := \frac{1}{h} P_t(h\bar{f}) \text{ pentru orice } f \in \mathcal{B}_+(E_h) \text{ şi } t \geqslant 0,$$

este funcţia de tranziţie a unui proces (Markov) drept $X^h = (X_t^h, \Omega, \mathbb{P}^{x/h})$ cu spaţiul stărilor E_h, $P_t^h f(x) = \mathbb{E}^{x/h}(f(X_t^h), t < \zeta)$, $f \in \mathcal{B}_+(E_h)$, $x \in E_h$.

(ii) *Fie $\mathcal{U}^h = (U_\alpha^h)_{\alpha>0}$ familia rezolvantă a lui $(P_t^h)_{t\geqslant 0}$ pe E_h. Dacă $\beta > 0$ atunci $\mathcal{E}(\mathcal{U}_\beta^h) = \frac{1}{h}\mathcal{E}(\mathcal{U}_\beta)|_{E_h}$.*

(iii) *Fie $M \subset E_h$, $M \in \mathcal{B}(E)$ şi $u \in \mathcal{E}(\mathcal{U}_\beta)$ cu $\beta > 0$. Atunci ${}^hR_\beta^M(\frac{u}{h}|_{E_h}) = \frac{1}{h}R_\beta^M u|_{E_h}$, unde ${}^hR_\beta^M$ reprezintă nivelul β al operatorului redus pe E_h în raport cu X^h.*

(iv) *Topologia fină pe E_h în raport cu X^h este urma pe E_h a topologiei fine pe E în raport cu X. O submulţime a lui E_h este polară, respectiv semipolară, total efilată în raport cu procesul X^h dacă şi numai dacă are aceeaşi proprietate în raport cu X.*

Procesul X^h dat de afirmaţia (i) a Propoziţiei 3.1 se numeţe *h-transformarea lui X*.

Remarca 3.2. (i) *Prima afirmaţie a Propoziţiei* 3.1 *rezultă de asemenea din [54], pag. 298. Procesul drept X^h este obţinut acolo aplicând un rezultat (Teorema (62.19)) transformării procesului X prin intermediul unei funcţionale multiplicative supermartingal. Totuşi originea acestui rezultat este mult mai veche, vezi [43] şi cap. 9 din [32], sub diverse ipoteze restrictive. Am prezentat aici o abordare mai directă, de teoria potenţialului, si am completat rezultatul de existenţă a procesului cu aspecte suplimentare.*

(ii) *În [50] este dată o interpretare a măsurii $\mathbb{P}^{x/h}$ ca o "măsură Fölmer" asociată unui supermartingal.*

3.1 Proprietatea "tightness" a capacităţilor sub h-transformare

În continuare vom folosi notaţiile din [23], Secţiunea 4.

Presupunem că $0 < h < \infty$, adică $E_h = E$. Fie λ o măsură finită (nenegativă) pe $(E, \mathcal{B})$ şi $u_0 := U_\beta(hf_0)$, unde $\beta > 0$ fixat şi $f_0 \in b\mathcal{B}_+(E)$, $f_0 > 0$, astfel încât hf_0 este de asemenea mărginită. Atunci funcţionala $M \longmapsto c_\lambda(M), M \subset E$, definită prin

$$c_\lambda(M) := \inf\{\lambda(R^G_\beta u_0) : \ G \quad \text{deschisă}, M \subset G\}$$

este o capacitate Choquet pe E, vezi de exemplu [7], Secţiunea 3.5.
Definim analog capacitatea Choquet c^h_λ în raport cu X^h astfel

$$c^h_\lambda(M) := \inf\{\lambda({}^hR^G_\beta u^h_0) : G \ \text{deschisă}, M \subset G\}, \text{unde } u^h_0 := \frac{u_0}{h}$$

. Reamintim că o capacitate c_λ se numeşte *"tight"*, dacă există un şir crescător $(K_n)_n$ de submulţimi compacte ale lui E, astfel încât $c_\lambda(E \setminus K_n) \searrow 0$. Şirul $(K_n)_n$ se numeşte "λ-nest" de compacte.

Corolar 3.3. *Procesul X posedă un "λ-nest" de compacte (adică capacitatea c_λ este "tight") dacă şi numai dacă procesul X^h are aceeaşi proprietate (adică capacitatea c^h_λ este "tight").*

3.2 Restricţia la complementara unei mulţimi absorbante

.

Fie A o mulţime (fin închisă) absorbantă. Putem presupune că v este mărginită.

Definim funcţia de tranziţie $(P'_t)_{t\geqslant 0}$ pe mulţimea $A^c := E \setminus A$ astfel:

$$P'_t f := P_t \bar{f}|_{A^c} \ \text{ pentru orice } f \in \mathcal{B}_+(A^c),$$

unde $\bar{f}$ este extensia lui f de la A^c la E, cu zero pe A, adică, $\bar{f} = f$ pe A^c şi $\bar{f} = 0$ pe A.

Propoziţia 3.4. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate.*
(i) *Familia de nuclee $(P'_t)_{t\geqslant 0}$ este funcţia de tranziţie a unui proces drept (Markov) X' cu spaţiul stărilor A^c. Mai exact, avem $X' = X^h$, unde $h = 1_{A^c}$.*

(ii) Dacă $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) este rezolvanta lui X (resp. of X') şi $\beta > 0$, atunci $\mathcal{E}(\mathcal{U}'_\beta) = \mathcal{E}(\mathcal{U}_\beta)|_{A^c}$. O funcţie $f \in \mathcal{B}_+(A^c)$ este fin continuă pe A^c în raport cu X' dacă şi numai dacă funcţia $\bar{f}$ este fin continuă pe E (în raport cu X).

Procesul X' dat de Propoziţia 3.4 îl vom numi *restricţia lui X la A^c*.

3.3 Generatorul slab

Considerăm acum generatorul slab $(L, \mathcal{D}(L))$ a lui X; cf. [6]. Mai exact, fie

$$\mathcal{B}_o := \{f \in b\mathcal{B}(E) : f \text{ este fin continuă pe } E\}$$

şi $\mathcal{D}(L)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f \in \mathcal{B}_o$, astfel încât $\left(\frac{P_t f(x) - f(x)}{t}\right)_{t,x}$ este mărginit pentru $x \in E$ şi t într-o vecinătate a lui zero, există $\lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f - f}{t}$ punctual şi limita anterioară este un element al mulţimii $\mathcal{B}_o$. Definim operatorul liniar $L : \mathcal{D}(L) \longrightarrow b\mathcal{B}(E)$ astfel:

$$Lf(x) := \lim_{t \searrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t},\ f \in \mathcal{D}(L),\ x \in E.$$

Operatorul $(L, \mathcal{D}(L))$ se numeşte *generatorul slab* al lui X şi notăm cu $(L^h, \mathcal{D}(L^h))$ generatorul slab al lui X^h.

Corolar 3.5. *Fie $f \in b\mathcal{B}(E)$, $f = 0$ pe $E \backslash E_h$. Următoarele afirmaţii sunt adevărate.*
(i) Dacă $f \in \mathcal{D}(L)$ (respectiv $\frac{f}{h} \in \mathcal{D}(L^h)$) este astfel încât $\frac{f}{h}$ şi $\frac{1}{h}Lf$ sunt funcţii mărginite (respectiv $hL^h(\frac{f}{h})$) este o funcţie mărginită, atunci $\frac{f}{h} \in \mathcal{D}(L^h)$ (respectiv $f \in \mathcal{D}(L)$) şi $L^h(\frac{f}{h}) = \frac{1}{h}Lf$. În plus, X^h este soluţie pentru următoarea problemă a martingalului*:*
procesul $\left(\frac{f}{h}(X^h_t) - \int_0^t (\frac{1}{h}Lf)(X^h_s)ds\right)_{t \geq 0}$ este un martingal sub $\mathbb{P}^{x/h}$ în raport cu filtraţia lui X^h pentru orice $x \in E_h$.
(ii) Fie A o mulţime absorbantă (fin închisă). Considerăm restricţia X' a lui X la A^c şi fie $(L', \mathcal{D}(L'))$ generatorul slab al procesului X'. Atunci $f \in \mathcal{D}(L')$ dacă şi numai dacă $\bar{f} \in \mathcal{D}(L)$. Avem $L'f = L\bar{f}|_{A^c}$.

3.4 h-transformarea şi subordonarea Bochner

Considerăm $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un proces (Borel) drept Markov cu spaţiul stărilor E.

Fie $\xi = (\xi_t)_{t\geqslant 0}$ un proces stocastic cu valori reale, staţionar, având creşteri independente nenegative (numit subordinator), indus de un semigrup de convoluţie $\mu = (\mu_t)_{t\geqslant 0}$ pe $\mathbb{R}_+$.

Reamintim că *procesul subordonat prin intermediul lui* ξ este un proces drept (Markov) $X^\xi = (X_t^\xi)_{t\geqslant 0}$ cu spaţiul stărilor E, definit prin $X_t^\xi := X_{\xi_t},\ t \geqslant 0$. Funcţia sa de tranziţie este familia $(P_t^\mu)_{t\geqslant 0}$, $P_t^\mu = \int_0^\infty P_s\, \mu_t(\mathrm{d}s),\ t > 0$ şi avem $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{E}(X^\xi)$.

Familia $(P_t^\mu)_{t\geqslant 0}$ se numeşte *subordonată în sensul lui Bochner* lui $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

(3.1)

Fie $h \in \mathcal{E}(X)$. Atunci h-transformarea subordonării lui X prin intermediul lui $\xi = (\xi_t)_{t\geqslant 0}$, notată prin $X^{\xi,\mu} = (X_t^{\xi,\mu})_{t\geqslant 0}$, este un proces drept (Markov) cu spaţiul stărilor E_h, care este echivalent cu subordonarea procesului prin intermediul lui ξ a h-transformării X^h a lui X.

Afirmaţia rezultă observând faptul că pentru orice $t > 0$ avem egalitatea de nuclee $(P_t^\mu)^h = (P_t^h)^\mu$. În continuare, scriem $P_t^{\mu,h}$ în loc de $(P_t^\mu)^h$ şi $P_t^{h,\mu}$ în loc de $(P_t^h)^\mu$.

3.5 h-transformarea pentru subordonarea Bochner a L^p-semigrupurilor

Dacă m este o măsură σ-finită pe E astfel încât $m \circ P_t \leqslant m$ pentru orice $t > 0$ (o astfel de măsură se numeşte *subinvariantă*), atunci pentru orice $p \in [1, \infty)$ avem:

(3.2)

funcţia de tranzitiţie a unui proces drept (Markov) X induce un C_0-semigrup de contracţii sub-Markovian pe $L^p(E, m)$.

O reciprocă a acestui rezultat a fost demonstrată în [11] şi a fost completată în [46] pentru L^p-semigrupurile subordonate în sensul lui Bochner.

Scopul nostru în această secţiune este de a obţine o reciprocă a afirmaţiei (3.2) în cadrul $\mathbf{h}$-transformării Bochner a L^p-semigrupurilor; aceast rezultat va fi dat de Propoziţia 3.6 de mai jos.

Fie $p \in [1, \infty)$ şi $(P_t)_{t\geqslant 0}$ un semigrup de contracţii tare continuu sub-Markovian pe $L^p(E, m)$, unde m este o măsură σ-finită pe spaţiul măsurabil Luzin $(E, \mathcal{B})$.

Fie $\mathbf{h} \in L_+^p(E, m)$, astfel încât $P_t\mathbf{h} \leqslant \mathbf{h}$ pentru $t > 0$. Presupunem că $\mathbf{h} \neq 0$ şi considerăm

mulţimea $E_{\mathbf{h}} \in \mathcal{B}(E)$, astfel:

$$E_{\mathbf{h}} := [\mathbf{h} > 0].$$

Fie $m_{\mathbf{h}}$ măsura pe $(E_{\mathbf{h}}, \mathcal{B}|_{E_{\mathbf{h}}})$, având densitatea $\mathbf{h}^p$ în raport cu m, $m_{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^p \cdot m$. Pentru orice $t \geqslant 0$ fie $P_t^{\mathbf{h}}$ operatorul pe $L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}})$ definit astfel:

$$P_t^{\mathbf{h}} u := \frac{1}{\mathbf{h}} P_t(\mathbf{h}u), \quad u \in L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}}). \tag{3.3}$$

Evident $P_t^{\mathbf{h}}$ este operator de contracţii sub-Markovian pe $L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}})$ şi familia $(P_t^{\mathbf{h}})_{t\geqslant 0}$ devine un semigrup de contracţii sub-Markovian, tare continuu pe $L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}})$, numit **h**-*transformarea* L^p*-semigrupului* $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

Putem prezenta acum o versiune a afirmaţiei (3.1) pentru subordonarea Bochner şi **h**-transformarea pe spaţiile L^p:

Subordonarea Bochner şi **h***-transformarea comută. Mai exact, dacă* $\mu = (\mu_t)_{t\geqslant 0}$ *este un semigrup de convoluţie pe* $\mathbb{R}_+$*, atunci* $P_t^{\mathbf{h},\mu} = P_t^{\mu,\mathbf{h}}$ *pentru orice* $t > 0$*. Aşadar,* C_0*-semigrupurile* $(P_t^{\mathbf{h},\mu})_{t\geqslant 0}$ *şi* $(P_t^{\mu,\mathbf{h}})_{t\geqslant 0}$ *pe* $L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}})$ *coincid.*

(3.4)

Fie $(\mathcal{L}^{\mu},\ \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu}))$, respectiv $(\mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}}, \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}}))$, generatorul infinitezimal al semigrupului $(P_t^{\mu})_{t\geqslant 0}$ pe $L^p(E, m)$, respectiv al semigrupului $(P_t^{\mu,\mathbf{h}})_{t\geqslant 0}$ pe $L^p(E_{\mathbf{h}}, m_{\mathbf{h}})$. Atunci:

$$\mathbf{h} \cdot \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu})|_{E_{\mathbf{h}}} \text{ şi } \mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}} u = \frac{1}{h}\mathcal{L}^{\mu}(\mathbf{h}u)|_{E_{\mathbf{h}}} \quad \text{pentru orice } u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}}).$$

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.6. *Fie* $p \in [1, \infty)$ *şi* $(P_t)_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigrup de contracţii sub-Markovian pe* $L^p(E, m)$*, unde* $(E, \mathcal{B})$ *este spaţiu măsurabil Luzin şi* m *este o măsură* σ*-fină pe* $(E, \mathcal{B})$*, astfel încât* $\int P_t f dm \leq \int f dm$ *pentru orice* $f \in L^p(E, m)$*,* $f \geq 0$ *şi* $t > 0$*. Presupunem că există* $f \in L^p(E, m),\ f > 0$*, astfel încât* $V_\alpha f \leq 1$ *pentru orice* $\alpha > 0$*, unde* $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ *este rezolvanta de contracţii* C_0*-continuă pe* $L^p(E, m)$ *indusă de* $(P_t)_{t\geq 0}$ *,* $V_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t\, dt$*,* $\alpha > 0$*.*

Fie $\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semigrup de convoluţie pe* $\mathbb{R}_+$ *şi* ξ *procesul stocastic staţionar cu valori reale pozitive, având creşteri independente nenegative, indus de* μ*.*

Atunci există un spaţiu topologic Luzin E_1*,* $E \subset E_1$*,* $E \in \mathcal{B}_1$ *(*σ*-algebra submulţimilor*

Borel ale lui E_1), $\mathcal{B} = \mathcal{B}|_{E_1}$, şi un proces drept (Markov) X cu spaţiul stărilor E_1, astfel încât:
(i) Funcţia de tranziţie a lui X şi $(P_t)_{t\geqslant 0}$ coincid, privite ca familii de operatori pe $L^p(E_1, m_1)$, unde m_1 este o măsură pe $(E_1, \mathcal{B}_1)$ care extinde pe m cu zero pe $E_1 \setminus E$.
(ii) C_0-semigrupul $(P_t^{\mu,\mathbf{h}})_{t\geq 0}$ ($\mathbf{h}$-transformarea subordonării în sensul lui Bochner a lui $(P_t)_{t\geqslant 0}$ în raport cu μ) coincide ca familie de operatori pe $L^p(E_h, m_h)$ cu funcţia de tranziţie a lui $X^{\xi,h}$ (h-transformarea subordonării lui X prin intermediul lui ξ), unde h este o funcţie pe E_1 care este excesivă în raport cu X, este egală în clasele $L^p(E_1, m_1)$ cu $\mathbf{h}$ şi $E_h := [h > 0]$. Deci, avem

$$P_t^{\mu,\mathbf{h}} u = \mathbb{E}^{\cdot} u(X_t^{\xi,h}),\ t > 0, u \in L^p(E_h, m_h).$$

(iii) Fie ν o măsură de probabilitate pe E_h, având densitate în raport cu m_h, $\frac{d\nu}{dm_h} \in L_+^{p'}(E_h, m_h)$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, şi considerăm probabilitatea $\mathbb{P}^{\xi,\nu/h}$ a procesului $X^{\xi,h}$ cu distribuţia iniţială ν. Atunci pentru orice $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^{\mu,\mathbf{h}})$ procesul

$$u(X_t^{\xi,h}) - \int_0^t \left(\frac{1}{h}\mathcal{L}^{\mu}(\mathbf{h}u)\right)(X_s^{\xi,h})\, ds,\ \ t \geq 0,$$

este un martingal sub $\mathbb{P}^{\xi,\nu/h}$ în raport cu filtraţia procesului $X^{\xi,h}$.

4 $\widehat{h}$-TRANSFORMAREA UNUI PROCES DE RAMIFICARE NELOCALĂ

.

Spaţiul configuraţiilor finite. Spaţiul stărilor pentru un proces de ramificare discretă este mulţimea $\widehat{E}$ a sumelor finite de măsuri Dirac pe E, definite astfel:

$$\widehat{E} := \left\{ \sum_{n\leqslant n_0} \delta_{x_n} : n_0 \in \mathbb{N}^*, x_n \in E \text{ pentru orice } 1 \leqslant n \leqslant n_0 \right\} \cup \{\mathbf{0}\},$$

unde $\mathbf{0}$ este măsura zero. Mulţimea $\widehat{E}$ se identifică cu reuniunea tuturor puterilor m-simetrice $E^{(m)}$ ale lui E (adică, dacă $m \geqslant 1$ atunci $E^{(m)}$ este factorizarea produsului Cartezian E^m prin relaţia de echivalenţă indusă grupul permutărilor σ^m; vezi, [21] şi [18] pentru detalii), deci $\widehat{E} = \bigcup_{m\geqslant 0} E^{(m)}$, unde $E^{(0)} := \{\mathbf{0}\}$ (vezi, [40]).

Mulţimea $\widehat{E}$ se numeşte *spaţiul configuraţiilor finite ale lui* E şi este înzestrată cu topologia reuniunii disjuncte a spaţiilor topologice şi σ-algebra Borel corespunzătoare $\mathcal{B}(\widehat{E})$.

Remarca 4.1. *Fie N un nucleu sub-Markovian de nuclee pe $(\widehat{E}, \mathcal{B}(\widehat{E}))$. Atunci N este un nucleu de ramificare pe $\widehat{E}$ dacă şi numai dacă există un nucleu sub-Markovian $\mathbf{N}$ definit pe $\widehat{E}$ cu valori în E, astfel încât $N\widehat{\varphi} = \widehat{\mathbf{N}\widehat{\varphi}}$, pentru orice $\varphi \in b\mathcal{B}_+(E)$.*

Un proces (drept) Markov cu spaţiul stărilor $\widehat{E}$ se numeşte *proces de ramificare* dacă funcţia sa de tranziţie este formată din nuclee de ramificare. Pentru interpretarea probabilistă a acestei proprietăţi analitice de ramificare vezi, [35], pag 337.

4.1 Funcţii multiplicative şi nuclee de ramificare pe $\widehat{E}$

Pentru orice funcţie cu valori reale φ, $\mathcal{B}(E)$-măsurabilă definim *funcţia multiplicativă* $\widehat{\varphi}$: $\widehat{E} \to \mathbb{R}_+$, astfel:

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \prod_n \varphi(x_n), \text{ dacă } \mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \in \widehat{E}, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \\ 1, \quad \text{dacă } \ \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

O funcţie multiplicativă este numită de asemenea *stare coerentă* pe spaţiul configuraţiilor (vezi [37]).

Considerăm un şir de nuclee Markoviene $(K_n)_{n\geq 1}$, unde K_n este un nucleu definit pe $E^{(n)}$ cu valori în E, pentru orice $n \geq 1$ şi $(q_n)_{n\geq 1} \subseteq b\mathcal{B}(E)$, cu $\sum_{n\geq 1} q_n \leq 1$. Presupunem că $\sum_{n\geq 1} nq_n$ este o funcţie mărginită pe E.

Mecanismul de ramificare va fi nucleul sub-Markovian K definit pe $\widehat{E}$ cu valori în E, definit prin

$$Kg = \sum_{n\geq 1} q_n K_n(g|_{E^{(n)}}) \text{ pentru orice } g \in b\mathcal{B}_+(\widehat{E}).$$

Identificăm nucleul K cu perechea de şiruri $(K_n)_{n\geq 1}$ şi $(q_n)_{n\geq 1}$.

Din afirmaţia (3.2) (vezi şi (3.1) din [18]) există un nucleu de ramificare $\widehat{K}$ pe $\widehat{E}$, astfel

încât pentru orice $\varphi \in \mathcal{B}_+(E)$, $\varphi \leqslant 1$, avem

$$\widehat{K}\widehat{\varphi}|_E = \sum_{n\geq 1} q_n K_n \varphi^{(n)},$$

O funcţie multiplicativă este numită de asemenea *stare coerentă* pe spaţiul configuraţiilor (vezi [37]).

Fie $h \in \mathcal{B}_+(E)$, $h \leq 1$, astfel încât $K\widehat{h} \leqslant h$, şi considerăm nucleul K^h definit pe $\widehat{E_h}$ cu valori în E_h, dat de

$$K^h g := \frac{1}{h} K(\widehat{h} g) \text{ pentru orice } g \in \mathcal{B}_+(\widehat{E_h}). \tag{4.1}$$

Notaţia K^h este compatibilă cu cea anterioară N^h din Secţiunea 3, unde nucleul N este definit pe E cu valori în E. Într-adevăr, deoarece N induce un nucleu $\overline{N}$ de la $\widehat{E}$ la E, definit prin $\overline{N}g := N(g|_E)$, pentru $g \in \mathcal{B}_+(\widehat{E})$, avem $\overline{N}^h = \overline{N^h}$. Presupunem că

$$K\widehat{h} \leq h \text{ şi } \frac{1}{h}\sum_{n\geq 1} n q_n \text{ este o funcţie mărginită pe} E_h. \tag{4.2}$$

Prima condiţie implică faptul că nucleul K^h este sub-Markovian definit pe $\widehat{E}_h$ cu valori în E_h, adică, $K^h 1 \leq 1$.

Fie $\widehat{X} = (\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ procesul de ramificare cu spaţiul stărilor $\widehat{E}$ şi funcţia de tranziţie $(\widehat{H}_t)_{t\geqslant 0}$, indus de un proces Markov X cu spaţiul stărilor E, printr-un mecanism de ramificare K descris anterior, şi printr-o constantă de omorâre $c > 0$. Pentru existenţa procesului $\widehat{X}$, vezi [18]. Procesul $\widehat{X}$ are ramificare nelocală în sensul că nu este obligatoriu ca urmaşii direcţi să înceapă de la poziţia terminală a particulei părinte. Mai exact, în descrierea procesului de ramificare avem: $q_n(x)$ *este probabilitatea ca o particulă distrusă într-un punct* $x \in E$ *are exact* n *urmaşi, în timp ce* $K_{n,x}$ *(= probabilitatea indusă de nucleul markovian* K_n *în* x*) este distribuţia celor* n *urmaşi.*

Teorema de mai jos este rezultatul principal al acestei secţiuni.

Teorema 4.2. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate.*

(i) *Presupunem că* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{U}_c)$, $\varphi \leq 1$, *este astfel încât* $K\widehat{\varphi} \leq \varphi$. *Atunci funcţia* $\widehat{\varphi}$ *aparţine mulţimii* $\mathcal{E}(\widehat{\mathcal{U}})$, *adică, este excesivă în raport cu procesul de ramificare* $\widehat{X}$ *pe* $\widehat{E}$.

(ii) *Fie* $h \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$, $h \leq 1$. *Atunci* $\widehat{h}$*-transformarea procesului de ramificare* $\widehat{X}$ *este un proces de ramificare pe* $\widehat{E_h}$. *Mai exact, considerăm semigrupul de ramificare pe* $\widehat{E_h}$ *indus de*

h-transformarea procesului X^h al lui X şi nucleul sub-Markovian K^h definit pe $\widehat{E_h}$ cu valori în E_h, dat în relaţia (4.1). Atunci acest semigrup este funcţia de tranziţie a $\widehat{h}$-transformării lui $\widehat{X}$.

(iii) Fie A o submulţime absorbantă a lui E (în raport cu X) şi presupunem că pentru orice n şi $x \in A$ avem $K_{n,x}(\widehat{A^c} \cap E^{(n)}) = 0$, adică, măsura de probabilitate pe $E^{(n)}$ indusă de nucleul Markovian K_n în punctul x este concentrată pe $(\widehat{A^c})^c \cap E^{(n)}$. Atunci $\widehat{A^c}$ este complementara unei submulţimi absorbante a mulţimii $\widehat{E}$ (în raport $\widehat{X}$) şi restricţia procesului de ramificare $\widehat{X}$ la $\widehat{A^c}$ este un proces de ramificare, este indus de restricţiile procesului X şi K la A^c.

4.2 Ecuaţia de evoluţie neliniară asociată $\widehat{h}$-transformării

Evidenţiem reprezentarea probabilistă a soluţiei ecuaţiei de evoluţie neliniare asociate $\widehat{h}$-transformării folosind în principal procesele de ramificare.

Pentru $r > 0$ luăm în considerare următoarea condiţie:

$$\sum_{n\geqslant 1} r^{n-1} q_n \leqslant h \text{ şi } \frac{1}{h}\sum_{n\geqslant 1} r^{n-1} n q_n \text{ este o funcţie mărginită pe } E_h. \tag{4.3}$$

Corolar 4.3. *Fie $\varphi \in b\mathcal{B}_+(E_h)$ astfel încât condiţia (4.3) este verificată pentru un $r \geqslant \varphi$. Atunci ecuaţia integrală*

$$k_t = e^{-ct} P_t^h \varphi + c \int_0^t e^{-cs} P_s^h K^h \widehat{k_{t-s}}\, ds \text{ pentru orice } t \geqslant 0. \tag{4.4}$$

are soluţia k_t, $t \geqslant 0$, având reprezentarea probabilistă

$$k_t(x) = \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x/\widehat{h}} \widehat{\varphi}(\widehat{X}_t^{\widehat{h}}),\ t \geqslant 0,\ x \in E_h.$$

Remarca 4.4. *(i) Pentru semnificaţia membrului drept al reprezentării probabiliste de mai sus a lui k_t, a se vedea afirmaţia (i) din Remarca 4.4 din [20].*

(ii) Reamintim că operatorul neliniar asociat procesului de ramificare $\widehat{X} = (\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ este definit ca

$$\Lambda u := (L - c)u + cK\widehat{u}. \tag{4.5}$$

Acest operator este în general unul integro-diferenţial. În [21] şi [47] a fost demonstrat că

în cazul în care L este operatorul Laplace pe un domeniu Euclidian mărginit neted, atunci problema Dirichlet asociată operatorului neliniar Λ are soluţie, folosind procesul de ramificare asociat, pentru date pe frontieră subunitare. Observăm că în [22] a fost demonstrată o extindere a rezolvării, de la date subunitare la date mărginite pe frontieră, în mod analoag cu procedeul din Corolarul 4.3*, şi aceasta reprezentând răspunsul la o întrebare a lui P. Hsu.*
(iii) *Fie Λ^h operatorul neliniar asociat procesului de ramificare $\widehat{X}^{\widehat{h}}$, obţinut aplicând Teorema 4.2, astfel:*

$$\Lambda^h u := (L^h - c)u + cK^h\widehat{u},\ u \in \mathcal{D}(L^h),$$

unde L^h este generatorul slab al lui X^h.

5 h-TRANSFORMAREA UNEI REZOLVANTE NELINIARE

Fie E un spaţiu măsurabil Luzin, adică este măsurabil izomorf cu o submulţime Borel a unui spaţiu metrizabil compact, înzestrat cu σ-algebra Borel.

Considerăm $b\mathcal{B}$ mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $\mathcal{B}$-măsurabile pe $(E, \mathcal{B}_+)$, $\mathcal{B}_+$ mulţimea tuturor funcţiilor pozitive $\mathcal{B}$-măsurabile pe E şi fie $C := \frac{1}{h}b\mathcal{B}$, unde h este o funcţie strict pozitivă $\mathcal{B}$-măsurabilă pe E. Mulţimea C este o latice vectorială, generează σ-algebra $\mathcal{B}$ şi este solidă în ordine, adică oricare ar fi $v \in C$ şi $|u| \leq v$, atunci $u \in C$.

Dacă $f \in C$, atunci definim $\|f\|_0 := \|hf\|_\infty$, unde $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in E\}$. Atunci, $(C, \|\|_0)$ este un spaţiu Banach, şi aplicaţia $b\mathcal{B} \ni v \longmapsto \frac{1}{h}v$ este o izometrie între spaţiile $(b\mathcal{B}, \|\|_\infty)$ şi $(C, \|\|_0)$.

Fie $j : (b\mathcal{B}, \|\|_\infty) \longrightarrow (C, \|\|_0)$ o aplicaţie bijectivă definită prin $j(u) := \frac{1}{h}u$, deci $\|j(u)\|_0 = \|u\|_\infty$, oricare ar fi $u \in b\mathcal{B}$. Oricărui operator $V : C \longrightarrow C$ i se asociază operatorul $\overline{V} : b\mathcal{B} \longrightarrow b\mathcal{B}$, definit prin $\overline{V}(u) = V(j(u))$.

Lema 5.1. *Dacă V satisface principiul complet de maxim pe C, atunci $\overline{V}$ satisface principiul complet de maxim pe $b\mathcal{B}$.*

Fie $V : C \longrightarrow C$, $\alpha \in (0, 1)$ şi $c \in \mathbb{R}_+^*$. Aplicaţia V se numeşte hölderiană (de constante (α, c)) dacă pentru orice $f, g \in C$, următoarea egalitate este adevărată: $\|Vf - Vg\|_0 \leq c\,\|f - g\|_0^\alpha$.

5.1 Operatorul V^h

Introducem în continuare, operatorul V^h asociat h-transformării şi evidenţiem principalele sale proprietăţi pe care le vom folosi în secţiunea următoare în studierea operatorului real Monge-Ampère şi h- transformarea sa.

Propoziţia 5.2. *Dacă V este un operator n-omogen, u o funcţie V-dominantă şi $\alpha > 0$, atunci αu-este o funcţie V-dominantă.*

Presupunem în continuare că V este un operator n-omogen. Considerăm acum h-transformarea operatorului neliniar V, analogul cazului liniar tratat în [10].

Definim operatorul $V^h : C \longrightarrow C$, astfel:

$$V^h u := \frac{1}{h} V(h^n u), \text{ pentru orice funcţie } u \in C.$$

Teorema 5.3. (i) *Fie $V : b\mathcal{B} \longrightarrow b\mathcal{B}$ un operator hölderian compact pe $b\mathcal{B}$. Atunci V^h este un operator hölderian compact pe C.*
(ii) *Dacă operatorul V satisface principiul complet al maximului pe $b\mathcal{B}$, atunci operatorul $V^h : C \longrightarrow C$ satisface principiul complet al maximului pe C.*
(iii) *Pentru operatorul hölderian V^h pe C satisfăcând principiul complet al maximului pe C, există şi este unică o rezolvantă sub-Markoviană $\mathcal{V}^h = (V_p^h)_{p>0}$ pe C asociată cu V^h.*

5.2 h-transformarea şi funcţii exacte

Cazul liniar.

Fie $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ o rezolvantă sub-Markoviană de nuclee pe $(E, \mathcal{B})$. Presupunem că $\mathcal{U}$ este rezolvanta unui proces drept X cu spaţiul stărilor E (un spaţiu topologic Luzin). Fie $(L, \mathcal{D}(L))$ generatorul slab al lui X. Fixăm o funcţie $k \in \mathcal{B}_+(E)$ mărginită şi fie $(P_t)_{t\geq 0}$ funcţia de tranziţie a procesului X. Considerăm semigrupul $({}^kP_t)_{t\geq 0}$ dat de formula Feynman-Kac, astfel:

$${}^kP_t f(x) = \mathbb{E}^x \left(e^{-\int_0^t k(X_s)ds} f(X_t) \right), \quad x \in E, \ t \geq 0.$$

Fixăm o funcţie $h \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Propoziţia 5.4. *Fie $({}^kP_t^h)_{t\geq 0}$ funcţia de tranziţie a procesului $({}^kX)^h$ pe E_h,*

$$ {}^kP_t^h f := \frac{1}{h}{}^kP_t(h\bar{f}). $$

Fie $k' := k|_{E_h}$. Atunci procesele $({}^kX)^h$ şi ${}^{k'}(X^h)$ sunt echivalente, mai precis avem ${}^kP_t^h = {}^{k'}(P_t^h),\ t \geq 0$.

Fie A o mulţime absorbantă (fin închisă) pentru X şi $(P'_t)_{t\geq 0}$, funcţia de tranziţie pe A^c, astfel

$$ P'_t f = P_t \bar{f}|_{A^c},\ f \in \mathcal{B}_+(A^c). \tag{5.1} $$

Conform Propoziţiei 1.4 din [10]), avem că $(P'_t)_{t\geq 0}$ este funcţia de tranziţie a procesului drept $X' = X^h$ pe A^c, unde $h := 1_{A^c}$.

Corolar 5.5. *Procesele ${}^{k'}(X')$ şi $({}^kX)'$ sunt echivalente.*

Presupunem că $h > 0$ este o funcţie mărginită şi $h \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$. Fie $\mathcal{U}^h = (U_\alpha^h)_{\alpha>0}$ rezolvanta de nuclee cu nucleul iniţial $U^h = M_{\frac{1}{h}} U M_h$.

Teorema 5.6. *Dacă $l \geq 0$ este o funcţie mărginită (deci exactă) şi $\mathcal{U}'$ este rezolvanta de nuclee cu nucleul iniţial U_l, atunci $(\mathcal{U}')^h = (\mathcal{U}^h)'$.*

Cazul neliniar.

În continuare considerăm cazul neliniar pentru funcţiile exacte şi $h-$transformarea asociată. Fixăm deci o funcţie mărginită h şi presupunem că există $\alpha_0 > 0$, astfel încât $h > \alpha_0$.

Fie $\mathcal{L}$ este o algebră de funcţii reale şi mărginite pe o mulţime nevidă E. Reamintim că $\mathcal{L}_h = \frac{1}{h}\mathcal{L}$.

Fie $\mathcal{L}_0 := \{v \in \mathcal{L} : \exists\ c > 0,\ \text{ astfel încât } |v| \leq c \cdot h\} \subset \mathcal{L}$. Definim $\mathcal{L}'_h := \frac{1}{h}\mathcal{L}_0$.

În continuare, se consideră $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ rezolvanta sub-Markoviană de operatori neliniari pe $\mathcal{L}$ asociată operatorului U.

Propoziţia 5.7. *Operatorul $T := M_{\frac{1}{h}} U M_h$ este o funcţie Lipschitz pe $\mathcal{L}'_h$, dacă U este Lipschitz pe $\mathcal{L}$.*

Teorema 5.8. *Fie $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ o rezolvantă (neliniară) sub-Markoviană. Presupunem în plus că funcţia $h > 0$ este astfel încât $h \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$. Atunci $\mathcal{U}^h = (U_\alpha^h)_{\alpha>0}$, $U_\alpha^h := M_{\frac{1}{h}} U_\alpha M_h$,*

$\alpha > 0$ este o rezolvantă (neliniară) sub-Markoviană pe $\mathcal{L}_h'$ şi $M_{\frac{1}{h}} U M_h$ este operatorul iniţial al rezolvantei $\mathcal{U}^h$.

Teorema 5.9. *Fie $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha>0}$ o rezolvantă neliniară cu operatorul iniţial U. Dacă definim $V := UM_h$, $h \in \mathcal{L}^+$, atunci V satisface principiul complet de maxim şi există o rezolvantă $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha>0}$ având operatorul iniţial V.*

Propoziţia 5.10. *Fie h o funcţie U-exactă de aplicaţie U_h. Fie $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha>0}$ o rezolvantă neliniară pe $\mathcal{L}$, $V_\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ având operatorul iniţial $V = UM_h$, rezolvantă dată de Teorema 5.9. Atunci, avem $V_1 = U_h M_h$.*

5.3 h-transformarea Doob pentru operatorul Monge-Ampère

În continuare, introducem rezolvanta operatorului Monge-Ampère, iar apoi vom considera h-transformarea sa.

Fie $U \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, o submulţime deschisă, nevidă, mărginită şi strict convexă şi fie λ măsura Lebesgue pe U.

Considerăm următoarele mulţimi: $\mathcal{A}(U) := \{f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : f\ \lambda-\text{măsurabilă}\}$, $\mathcal{A}^+(U) := \{f \in \mathcal{A}(U) \ : \ f \geq 0\}$, $b\mathcal{A}(U) := \{f \in \mathcal{A}(U) \ : \ f \text{ mărginită}\}$, $\mathcal{U}_0(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ convexă şi continuă pe $\overline{U}$, $f = 0$ pe $\partial U\}$, $-\mathcal{U}_0(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ concavă şi continuă pe $\overline{U}$, $f|_{\partial U} = 0\}$.

Fie $f \in b\mathcal{A}^+(U)$. Definim operatorul $T : b\mathcal{A}^+(U) \longrightarrow -\mathcal{U}_0(U)$, astfel: $Tf := -H(f \cdot \lambda, 0)$, $f \in b\mathcal{A}^+(U)$, unde $H(f \cdot \lambda, 0) = H(f \cdot \lambda, 0, U)$ este aplicaţia convexă, continuă pe $\overline{U}$, nulă pe ∂U şi cu măsura de curbură $f \cdot \lambda$.

Din [26], operatorul Monge-Ampère pe $\mathbb{R}^d$ poate fi exprimat ca infimumul unei familii de operatori liniari, astfel:

$$d(\det D^2 u(x))^{1/d} = \inf_{\det A=1} tr(A^t D^2 u(x) A), \tag{5.2}$$

dacă în plus u este strict convexă şi mărginită. Aici $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,d}}$ este o matrice simetrică, cu $\det A = 1$.

Relaţia (5.2) poate fi scrisă în termeni de operatori, astfel:

$$Mu = \frac{1}{d^d} \left(\inf_{\det A=1} tr(AD^2 uA) \right)^d. \tag{5.3}$$

Fie h o funcţie strict pozitivă, mărginită strict convexă. Atunci, pentru orice funcţie u care este mărginită şi strict convexă, dacă $hu \in C^2(U)$, definim $M^h u$ astfel: $M^h u := \dfrac{1}{h^d} M(hu)$.

Propoziţia 5.11. *Dacă M este operatorul Monge-Ampère satisfăcând relaţia* (5.3)*, atunci operatorul h-transformat M^h are reprezentarea*

$$M^h u := \frac{1}{d^d} \left(\inf_{\det A = 1} tr(A D_h^2 u A) \right)^d, \tag{5.4}$$

unde u este o funcţie mărginită strict convexă şi $D_h^2(u) := \frac{1}{h} D^2(hu)$.

Remarca 5.12. (i) *Aproximarea operatorului M^h din* (5.4) *este analoagă formulei* (5.3) *pentru operatorul Monge-Ampère. Putem spune că în acest sens M^h este încă un operator Monge-Ampère, având aproximarea cu operatori liniari* (5.4)*.*

(ii) *Operatorul M^h are aproximarea cu operatori liniari analoagă cu cea valabilă pentru M, înlocuind matricea hessiană D cu D_h.*

Fie Φ o funcţie pozitivă astfel încât $\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(\epsilon) = \infty$ şi $\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \Phi(\epsilon) = 0$. Pentru orice $x \in \Omega$ (fixat), matricea

$$A^* := \det D^2 u(x)^{\frac{1}{2d}} D^2 u(x)^{-\frac{1}{2}}$$

are determinantul egal cu 1 şi satisface relaţia $A^\star \leq \Phi(\epsilon) I$ pentru ϵ suficient de mic.

Următorul rezultat este o completare care arată că aproximarea cu operatori liniari se păstrează prin h-transformarea operatorului D^2.

Propoziţia 5.13. *Presupunem că $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ şi că toate valorile proprii ale matricei $D^2 u$ sunt pozitive (observăm că, în acest caz, funcţia u este strict convexă) şi fie h o funcţie strict convexă, astfel încât funcţiile $\frac{u}{h}$ şi, respectiv $\frac{1}{h} D^2 u$ sunt mărginite.*

Atunci pentru ϵ suficient de mic avem

$$d \det \left[D_h^2 \left(\frac{u}{h} \right)(x) \right]^{\frac{1}{d}} = \inf_{\det A = 1} tr \left[A^t D_h^2 \left(\frac{u}{h} \right)(x) A \right] \tag{5.5}$$

$$= \inf_{\det A = 1, A \leq \Phi(\epsilon) I} tr \left[A^t D_h^2 \left(\frac{u}{h} \right)(x) A \right].$$

Bibliografie

[1] Andreasson, R., Hultgren, J, Jonsson M., Mazzon, E., McCleerey, N. (2025). Regularity of the solution to a real Monge–Ampère equation on the boundary of a simplex, Preprint https://arxiv.org/abs/2403.01620.

[2] Athreya, K. B. (2000). Change of measures for Markov chains and LlogL theorem for branching processes, *Bernoulli* **6**, 323–338.

[3] Barbu, V. and Beznea, L. (2016). Measure-valued branching processes associated with Newmann nonlinear semiflows, *J. Math. Anal. Appl.* **441**, 167-182.

[4] Badiane, P., Zeriahi, A. (2023). The eigenvalue problem for the complex Monge–Ampère operator, *J Geom Anal.* **33**, 367, https://doi.org/10.1007/s12220-023-01407-6

[5] Beznea, L. (2011). Potential theoretical methods in the construction of measure-valued branching processes, *J. European Math. Soc.* **13**, 685–707.

[6] Beznea, L., Bezzarga, M., Cîmpean, I. (2024). Continuous flows driving Markov processes and multiplicative Lp-semigroups, arXiv:2411.09407 (2024)

[7] Beznea, L. and Boboc, N. (2004) *Potential Theory and Right Processes.* (Mathematics and Its Applications, vol. **572**), Kluwer Academic Publishers/Springer.

[8] Beznea, L. and Boboc, N. (2005). On the tightness of capacities associated with sub-Markovian resolvents, *Bull. London Math. Soc.* **37**, 899–907.

[9] Beznea, L and Boboc, N. (1999). Feyel's techniques on the supermedian functionals and strongly supermedian functions, *Potential Analysis* **10**, 347–372.

[10] Beznea, L., **Boeangiu, A.-M.**, Lupaşcu-Stamate, O. (2020). h-transform of Doob and non-local branching processes, *Analysis and Mathematical Physics* **10**, no. 4, 47.

[11] Beznea, L., Boboc, N. and Röckner, M. (2006). Quasi-regular Dirichlet forms and L^p-resolvents on measurable spaces, *Potential Analysis* **25**, 269–282.

[12] Beznea, L., Boboc, N. and Röckner, M. (2006). Markov processes associated with L^p-resolvents and applications to stochastic differential equations on Hilbert space, *J. Evol. Equ.* **6**, 745–772.

[13] L. Beznea, L., Cornea, A. and Röckner, M. (2011). Potential theory of infinite dimensional Lévy processes, *J. Funct. Anal.* **261**, 2845–2876.

[14] Beznea, L., Deaconu, M., Lupaşcu, O. (2015). Branching processes for the fragmentation equation, *Stochastic Processes and their Applications* **125**, 1861–1885.

[15] Beznea, L., Deaconu, M., Lupaşcu, O. (2016). Stochastic equation of fragmentation and branching processes related to avalanches. *Journal of Statistical Physics* **162**, 824–841.

[16] Beznea, L., Deaconu, M., Lupaşcu-Stamate, O. (2019). Numerical approach for stochastic differential equations of fragmentation; application to avalanches, *Mathematics and Computers in Simulation* **160**, 111–125.

[17] Beznea, L., Ionescu, I. R., Lupaşcu-Stamate, O. (2021). Random multiple-fragmentation and flow of particles on a surface, *Journal of Evolution Equations* **21**, 1–25 DOI:10.1007/s00028-021-00732-z

[18] Beznea, L. and Lupaşcu, O. (2016). Measure-valued discrete branching Markov processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**, 5153–5176.

[19] Beznea, L., Lupaşcu, O., Oprina, A.-G. (2012). A unifying construction for measure-valued continuous and discrete branching processes, In: *Complex Analysis and Potential Theory*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 47–59.

[20] Beznea, L., Lupaşcu, O. and Vrabie, C. I. (2020). Stochastic solutions to evolution equations of non-local branching processes, *Nonlinear Anal.* **200** http://doi.org/10.1016/j.na.2020.112021

[21] Beznea, L. and Oprina, A.-G. (2011), Nonlinear PDEs and measure-valued branching type processes, *J. Math. Anal. Appl.* **384**, 16–32.

[22] Beznea, L. and Oprina, A.-G. (2014). Bounded and L^p-week solutions for nonlinear equations of measure-valued branching processes., *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **107**, 34–46.

[23] Beznea, L. and Röckner, M. (2011). From resolvents to càdlàg processes through compact excessive functions and applications to singular SDE on Hilbert spaces, *Bull. Sci. Math.* **135**, 844–870.

[24] Beznea, L. and Röckner, M. (2011). Applications of compact superharmonic functions: path regularity and tightness of capacities, *Complex Anal. Oper. Theory* **5**, 731–741.

[25] Ben Saad, H. (1984). Generalisations des noyaux V_h et applications, *Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris, Lecture Notes in Math.*, **1061** Springer Verlag, pp. 15-39

[26] Blanc, P., Charro, F., Manfredi, J. J. and Rossi, J. D. (2020). A nonlinear mean value property for the Monge–Ampère equation. *J. Convex Anal.* **28** (2021), 353–386.

[27] Blocki, Z., Thorbiornson, J. (1998). On the fundamental solution for the real Monge-Ampère operator, *Math. Scand.* **83**, 309–319.

[28] **Boeangiu, A.-M.**, Popescu, A. (2026). Pure branching and total mass process, *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*. **27**, 11–18.

[29] Dellacherie, C. (1992). Une version non linéaire du théorème de Hunt, In: *Potential theory (Nagoya, 1990)*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, pp. 25–32.

[30] Doob, J. L. (2001). *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag (reprint of the 1984 edition).

[31] Dynkin, E. B. (2002). *Diffusions, superdiffusions and partial differential equations*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. **50**.

[32] Dynkin, E. B. (1965). *Markov Processes*, Vol. I, Springer.

[33] Dynkin, E. B., Kuznetsov, S. E. and Skorokhod, A, V. (1994) Branching measure-valued processes, *Probab. Theory Relat. Fields* **99**, 55-96.

[34] Fang, R., Li, Z. (2019). A conditioned continuous-state branching process with applications, *Statistics & Probability Letters* **152**, 43–49.

[35] Fitzsimmons, P. J. (1988). Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes, *Israel J. Math.* **64**, 337–361.

[36] Fitzsimmons, P. J., Getoor, R. K. (2009). Potential Theory of Moderate Markov Dual Processes, *Potential Anal.* **31**, 275–310.

[37] Finkelshtein, D., Kondratiev, Y. and Oliveira, M. J. (2012). Glauber dynamics in the continuum via generating functionals evolution, *Complex Anal. Oper. Theory* **6**, 923–945.

[38] Haiducu, M., Udrea, C. (2014). Perturbation with functions of the Monge Ampère operator, *Proceedings of the Roumanian Academy, Series A*, **15**, 115-122

[39] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S. (1966). Transformation of branching Markov processes, *Proc. Japan Acad.* **42**, 719–724.

[40] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S. (1968). Branching Markov processes I, II, *J. Math. Kyoto Univ.* **8**, 233–278, 365–410.

[41] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S. (1969). Branching Markov processes III, *J. Math. Kyoto Univ.* **9**, 95–160.

[42] Klebaner, F. C., Rosler, U., Sagitov, S. (2007). Transformations of Galton-Watson processes and linear fractional reproduction, *Adv. Appl. Prob.* **39**, 1036–1053.

[43] Kunita, H. and Watanabe, T. (1963). Notes on transformations of Markov processes connected with multiplicative functionals, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **17**, 181–191.

[44] Kunita, H. and Watanabe, T. (1965). processes and Martin boundaries part I, *Illinois J. Math.* **9**, 485–526.

[45] Lions, P. L. (1983). *Sur les equations de Monge Ampère*, *Manuscripta Math.* **41**, 1-43

[46] Lupaşcu, O. (2014). Subordination in the sense of Bochner of L^p-semigroups and associated Markov processes, *Acta Mathematica Sinica, English Series* **30**, 187–196.

[47] Lupaşcu, O. and Stănciulescu, V. (2017). Numerical solution for the non-linear Dirichlet problem of a branching process, *Complex Analysis and Op. Th.* **8**, 1895–1904.

[48] Martin, R. S. (1941). Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**, 137–172.

[49] Meyer, P. A. (1968). *Processus de Markov: la frontière de Martin*, Lecture Notes in Mathematics , Vol. **7**7, Springer.

[50] Meyer, P. A. (1972). La mesure de H. Föllmer en théorie des surmartingales, in: *Séminaire de probabilités (Strasbourg)* **6**, pp. 118–129.

[51] Neilan, M., Salgado, A. J., Zhang, W. (2020). Chapter 2 - The Monge–Ampère equation, Editor(s): Andrea Bonito, Ricardo H. Nochetto, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, Volume 21.

[52] Overbeck, L. (1994). Martin boundary of some branching processes, *Annales de l 'I.H.P* **30**, 181–195.

[53] Penisson, S. (2011). Continuous-time multitype branching processes conditioned on very late extinction, *ESAIM: Probability and Statistics* **15**, 417–442.

[54] Sharpe, M. (1988). *General Theory of Markov Processes*, Academic Press, Boston.

[55] Silverstein, M. L. (1968). Markov processes with creation of particles, *Z. Warsch. verw. Geb.* **9**, 235–257.

[56] Teodor, A. (2026). *Teză de doctorat*. SCOSAAR, Academia Română.

[57] Udrea, C. (2002). Funcţii convexe. Elemente de teorie neliniară a potenţialului, *Editura Tehnică, Bucureşti*.