



Academia Română

Școala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică "Simion Stoilow"

Rezumat teză de doctorat

Probleme la limită și procese de ramificare

Conducător de doctorat : Prof. Dr. Lucian Beznea

Doctorand : Alexandra Teodor

CUPRINS

1	Introducere	2
2	Preliminarii	4
3	Problema Dirichlet liniară cu date discontinue la frontieră	5
3.1	Cadrul general	5
3.1.1	Operatorul perturbat	6
3.2	Funcție de tranziție tare Feller	6
3.3	Soluția stocastică a problemei Dirichlet liniare cu date discontinue la frontieră, bazată pe convergența controlată	7
3.3.1	Convergența controlată	7
3.3.2	Rezultatul principal	8
3.4	Cazul operatorului Laplace	8
3.5	Unicitatea soluției a problemei Dirichlet pentru operatorul $\frac{1}{2}\Delta + q$ în sensul convergenței controlate	10
4	Probleme Dirichlet semiliniare cu date discontinue la frontieră	10
4.1	Existența soluției	11
4.2	Unicitatea soluției	12
5	Probleme Dirichlet neliniare asociate unor procese de ramificare nelocală	13
5.1	Procese de ramificare nelocală	14
5.2	Ecuatii neliniare de evoluție corespunzătoare unor procese de ramificare	15
5.3	Cazul operatorului Laplace	15
5.4	Cazul operatorului de tip gradient	16

6	Apendix	19
7	Bibliografie	19

1. INTRODUCERE

În această teză studiem existența soluțiilor pentru probleme Dirichlet liniare și neliniare, cu date la frontieră generale, nu neapărat continue. Esențială este utilizarea convergenței controlate inițiate de A. Cornea, care înlocuiește convergența punctuală la data la frontieră a soluției (cf. [25] și [26]). Acest tip de convergență descrie comportamentul la frontieră a soluțiilor problemelor la limită cu date la frontieră discontinue și a fost folosit atât pentru problema Dirichlet liniară pe un domeniu euclidian în [5], cât și pentru problema Dirichlet asociată operatorului Gross-Laplace pe un spațiu Wiener abstract (în [8]), și de asemenea pentru problema Neumann pe o bilă euclidiană (vezi [17]).

În Capitolul 3 un rezultat important pentru convergența controlată este Teorema 3.4, unde este demonstrată existența soluției stocastice a problemei Dirichlet liniare cu date la frontieră discontinue asociate generatorului unui proces Markov omorât cu o funcțională multiplicativă indusă de o funcție pozitivă și Borel măsurabilă. De asemenea, cazul particular pentru operatorul Laplace este ilustrat de Corolarul 3.9, care îmbunătățește în mod esențial rezultatul principal din [5], Teorema 4.8. Oferim un rezultat de unicitate a soluției problemei Dirichlet asociate operatorului $\frac{1}{2}\Delta + q$.

Capitolul 4 tratează o ecuație eliptică semiliniară în sens slab, cu condiție Dirichlet la frontieră, care este un caz particular al problemei studiate de Chen, Williams și Zhao în [21]. Dacă D este un domeniu regulat și mărginit în \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ și data la frontieră φ este o funcție definită pe frontiera lui D , pozitivă, continuă, cu valori reale atunci autorii au demonstrat existența unei *soluții clasice slabe* care converge punctual la φ , folosind teorema de punct fix a lui Schauder și un criteriu de compactitate pentru funcții continue.

Dacă φ este discontinuă pe frontiera lui D atunci problema nu are soluție clasică

slabă, aşadar avem nevoie de un tip mai general de soluție. Strategia este de a modifica procedura din [21], pentru că lucrăm cu spații de funcții discontinue, mai exact, criteriul de compactitate menționat mai sus nu este adecvat. În schimb, folosim o ipoteza suplimentară pentru termenul neliniar care permite utilizarea teoremei de punct fix a lui Banach. Esențială este aplicarea Corolarului 3.9 din Capitolul 3 pentru comportamentul la frontieră a soluției folosind convergența controlată în loc de convergența punctuală, în cazul în care $c = 0$ pentru operatorul Laplace. Drept consecință demonstrăm de asemenea, un rezultat de unicitate și oferim o reprezentare probabilistă a soluției.

În Capitolul 5, studiem probleme Dirichlet neliniare asociate unor procese de ramificare nelocală cu mișcarea spațială dată de un proces Markov drept X cu generatorul slab L . Existența soluției problemei pentru φ date continue la frontieră a fost studiată în [41], [14], [15] (vezi de asemenea [38]), unde soluția problemei converge punctual la φ pe frontiera domeniului.

Scopul acestui capitol este dublu. Mai întâi, rezolvăm problema pentru funcții φ care sunt discontinue, înlocuind convergența punctuală la data de frontieră cu convergența controlată. Considerăm două cazuri:

- (1) L este operatorul Laplace, mai precis L este generatorul slab al mișcării browniene d -dimensionale care este o extensie a operatorului Laplace. În acest caz funcția de control este dată de o funcție armonică (cu valori reale) pe un domeniu D mărginit și regulat din \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.
- (2) L este un operator de tip gradient, generator al unui curent (flow) continuu $\phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ pe un spațiu topologic Lusin F , părăsind D în timp finit, unde D este un domeniu mărginit din F cu închiderea compactă. Aici, ca în [8], trebuie să considerăm o mulțime excepțională pentru convergența controlată la data la frontieră.

Al doilea scop este de a arată că problema are o soluție generalizată care admite o reprezentare probabilistă. Ca în [11] și [41], un instrument cheie al abordării noastre este un proces Markov de ramificare nelocală $\widehat{X} = (\widehat{X}_t, \widehat{\mathbb{P}}^\mu, \mu \in \widehat{E})$ cu spațiul stărilor mulțimea \widehat{E} a configurațiilor finite ale lui E ce descrie evoluția în timp pe D a unui sistem de particule; \widehat{X} are mișcarea spațială un proces Markov X și mecanismul de ramificare indus de un șir de nuclee Markoviene (pentru detalii vezi [11] și [13]).

Menționăm contribuția esențială a lui E.B. Dynkin în utilizarea superproceselor cu valori măsurii ca instrumente pentru rezolvarea ecuațiilor semiliniare, cea tipică fiind $\Delta u = u^\alpha$, cu $1 < \alpha \leq 2$; vezi monografiile [31], [32], de asemenea [28]. În consecință, pentru a urma procedura inițiată de E.B. Dynkin avem nevoie de un proces de ramificare nelocală \widehat{X} în loc de un superproces.

În cazul (2), urmând [19], considerăm procesul Markov de ramificare $\widehat{X}^0 = (\widehat{X}_t^0, \widehat{\mathbb{P}}^{0^\mu}, \mu \in \widehat{E})$ care are același mecanism de ramificare ca \widehat{X} dar fără mișcare spațială; \widehat{X}^0 este un proces de pură ramificare (pure branching process). Procesul cu valori măsurii \widehat{X} admite o reprezentare printr-un curent de măsurii indus de mișcarea spațială Φ (= curentul pe E obținut din ϕ prin stoparea la frontiera lui D) și \widehat{X}^0 .

Rezultatele originale din această teză sunt incluse în următoarele articolele indexate World of Science, în reviste cotate ISI:

- Lucian Beznea, **Alexandra Teodor**, Positive solutions to semilinear Dirichlet problems with general boundary data. *Analysis and Mathematical Physics* **14** (2024), 39, <https://doi.org/10.1007/s13324-024-00905-2>
- Lucian Beznea, Oana Lupașcu-Stamate, **Alexandra Teodor**, Nonlinear Dirichlet problem of non-local branching processes, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **547**,(2025), 129281, ISSN 0022-247X, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129281>.

2. PRELIMINARII

Scopul acestui capitol este de a introduce noțiuni preliminare care apar în această teză. Prezentăm noțiuni și rezultate fundamentale precum funcții de tranziție, rezolvante de nuclee, procese Markov drepte împreună cu teorema clasică a lui Kolmogorov de construcție a proceselor Markov, timpi de stopare, martingale (supermartingale), generatorul tare, slab, respectiv extins al unui proces Markov, funcționale multiplicative

și procesul omorât cu o funcțională multiplicativă.

3. PROBLEMA DIRICHLET LINIARĂ CU DATE DISCONTINUE LA FRONTIERĂ

3.1. Cadrul general

Fie F un spațiu topologic Luzin (adică F este homeomorf cu o submulțime Borel a unui spațiu metrizabil compact) și D un domeniu mărginit din F astfel încât $E := \overline{D}$ este o mulțime compactă. Fie $\mathcal{B}(F)$ σ -algebra Borel a lui F . Pentru $A \in \mathcal{B}(F)$, definim $\mathcal{B}(A)$ σ -algebra Borel a lui A , $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(F)|_A$, $\mathcal{B}_+(A)$ conul convex al funcțiilor numerice, pozitive și $\mathcal{B}(A)$ -măsurabile pe A iar $b\mathcal{B}_+(A)$ este mulțimea de funcții mărginite din $\mathcal{B}_+(A)$. Fie $C(A)$ spațiul de funcții continue pe A cu valori reale, $C_+(A)$ spațiul de funcții continue, pozitive pe A cu valori reale, $C_b(A)$ spațiul de funcții continue, mărginite pe A cu valori reale, $bC_+(A)$ spațiul de funcții continue pe A cu valori reale, pozitive și mărginite.

Fie $Y = (Y_t, \mathbb{P}^x, x \in F)$ o difuzie pe F , adică, un proces Markov drept cu traiectorii continue, cu spațiul stărilor F .

Fie $\tau := \inf\{t \geq 0 : Y_t \in \partial D\}$ *primul timp de intrare* în ∂D , $\tau_o := \inf\{t > 0 : Y_t \in \partial D\}$ *primul timp de atingere (hitting time)* al ∂D , și $\tau_D := \inf\{t > 0 : Y_t \notin D\}$ *primul timp de ieșire din D* . Amintim că dacă $x \in D$ atunci $\tau = \tau_o$ \mathbb{P}^x -a.s. Pentru că D este o mulțime deschisă, observăm că $\tau_o = \tau_D$.

Considerăm procesul stopat la frontiera lui D , adică, procesul $X = (X_t, \mathbb{P}^x, x \in E)$ cu spațiul stărilor E , definit ca $X_t := Y_{t \wedge \tau}$. Presupunem că $\mathbb{P}^x(\tau < \infty) = 1$ pentru orice $x \in D$.

Fie $(T_t)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție asociată lui X , adică pentru orice $f \in b\mathcal{B}_+(E)$, $T_t f(x) := \mathbb{E}^x f(X_t)$, $t \geq 0$ și L generatorul slab corespunzător (vezi Capitolul 2).

Semigrupul Feynman-Kac. Reamintim că c este o funcție măsurabilă Borel pe D , cu valori reale, pozitivă, mărginită și extinsă cu 0 pe $F \setminus D$. Fie, în continuare,

$(T_t^c)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție a procesului obținut din X prin omorârea cu o funcțională multiplicativă indusă de c , exprimată prin *semigrupul Feynman-Kac*,

$$T_t^c f(x) = \mathbb{E}^x \left\{ e^{-\int_0^t c(X_s) ds} f(X_t) \right\}, \quad f \in b\mathcal{B}_+(E), x \in E.$$

Definim nucleul P_τ^c pe F ca fiind

$$(3.1) \quad P_\tau^c f(x) := \mathbb{E}^x \left\{ e^{-\int_0^\tau c(Y_s) ds} f(Y_\tau) \right\}, \quad f \in b\mathcal{B}_+(F), x \in F.$$

În mod analog, definim nucleul $P_{\tau_0}^c$; avem $P_\tau^c f(x) = P_{\tau_0}^c f(x) = P_\tau^c(f1_{\partial D})(x)$ dacă $x \in D$. Atunci

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_t^c(f|_E)(x) = P_\tau^c f(x), \quad x \in E, f \in b\mathcal{B}_+(F).$$

3.1.1. Operatorul perturbat

Fie $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha > 0}$ rezolvanta procesului X . Notăm cu $L - c$ generatorul slab asociat lui $(T_t^c)_{t \geq 0}$.

Teorema 3.1. *Dacă L este generatorul slab al procesului X și $c \in b\mathcal{B}_+(E)$ o funcție fin continuă în raport cu \mathcal{U} , atunci $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L - c)$ și $(L - c)u = Lu - cu$.*

3.2. Funcție de tranziție tare Feller

Proprietatea tare Feller. O funcție de tranziție $(T_t)_{t \geq 0}$ pe un spațiu topologic Lusin F se numește *tare Feller* dacă $T_t f$ este o funcție continuă pe F pentru orice $f \in b\mathcal{B}_+(F)$ și $t > 0$.

Următorul rezultat arată că proprietatea tare Feller a funcției de tranziție este păstrată prin omorâre.

Lema 3.2. ([12]) *Fie $(S_t)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție a unui proces Markov drept Y pe un spațiu topologic Lusin F , $c \in b\mathcal{B}_+(F)$, și considerăm $(S_t^c)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție a procesului obținut din Y prin omorârea cu funcționala multiplicativă indusă de c . Atunci au loc următoarele afirmații:*

- (i) *Dacă $(S_t)_{t \geq 0}$ este tare Feller atunci și $(S_t^c)_{t \geq 0}$ are aceeași proprietate.*

(ii) Presupunem în plus că F este un spațiu local compact cu o bază numărabilă. Dacă $(S_t)_{t \geq 0}$ acționează pe spațiul funcțiilor continue care se anulează la infinit atunci și $(S_t^c)_{t \geq 0}$ are aceeași proprietate.

3.3. Soluția stocastică a problemei Dirichlet liniare cu date discontinue la frontieră, bazată pe convergența controlată

Punct regulat pe frontieră. Un punct $x \in \partial D$ este *punct regulat pe frontieră* (regular boundary point) al lui D dacă $\mathbb{P}^x(\tau_o = 0) = 1$; vezi e.g. [30], vol. II, pagina 32, sau [24], pagina 23. Domeniul D se numește *regulat* dacă orice punct de pe frontiera ∂D este punct regulat pe frontieră al lui D .

Nucleul potențial. Notăm cu V nucleul pe F definit ca

$$Vf(x) = \mathbb{E}^x \int_0^\infty e^{-\int_0^t c(Y_s) ds} f(Y_t) dt, \quad f \in b\mathcal{B}_+(F), x \in F.$$

V se numește *nucleul potențial* al procesului pe F obținut din Y prin omorârea cu funcționala multiplicativă indusă de c .

Soluția stocastică a problemei Dirichlet liniare cu date continue la frontieră

Următorul rezultat este o versiune a of Teoremei 13.1 din [30], vol II, pagina 32. Demonstrația se bazează în mod esențial pe rezultatul din [30] menționat mai sus.

Propoziția 3.3. ([12]) Presupunem că F este un spațiu local compact cu bază numărabilă.

Fie Y un proces Markov drept cu spațiul stărilor F , având traiectorii continue, astfel încât funcția sa de tranziție $(S_t)_{t \geq 0}$ este tare Feller și acționează pe spațiul funcțiilor continue care au limita 0 la infinit și D un domeniu regulat cu închidere compactă. Considerăm în plus că nucleul potențial V este propriu, adică există o funcție $h \in \mathcal{B}_+(F)$, $h > 0$, astfel încât Vh este o funcție cu valori reale. Atunci

$$(3.3) \quad \lim_{D \ni x \rightarrow y} P_\tau^c f(x) = f(y) \text{ pentru orice } f \in b\mathcal{C}_+(\partial D) \text{ și } y \in \partial D.$$

3.3.1. Convergența controlată

Convergența controlată (cf. [25] și [26])

Fie $f : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $D_o \subset D$ și $h, k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $k \geq 0$, astfel încât $h|_{D_o}$, $k|_{D_o}$ sunt

funcții cu valori reale. Spunem că h converge la f controlat de k pe D_o (scriem $h \xrightarrow{k} f$ pe D_o) dacă pentru orice $A \subset D_o$ și $y \in \partial D \cap \bar{A}$ următoarele afirmații au loc:

(*) Dacă $\limsup_{A \ni x \rightarrow y} k(x) < \infty$ atunci $f(y) \in \mathbb{R}$ și $f(y) = \lim_{A \ni x \rightarrow y} h(x)$,

(**) Dacă $\lim_{A \ni x \rightarrow y} k(x) = \infty$ atunci $\lim_{A \ni x \rightarrow y} \frac{h(x)}{1+k(x)} = 0$.

Dacă mulțimea D_o nu este specificată, atunci $D_o = D$ și scriem h converge la f controlat de k . Cazul acesta a fost tratat în [26]. Funcția k se numește *funcție de control*.

3.3.2. Rezultatul principal

Considerăm D un domeniu regulat și mărginit din F cu închiderea compactă. Enunțăm în continuare un rezultat important de convergență controlată pentru soluția stocastică a problemei Dirichlet liniare cu date la frontieră posibil discontinu. Îl folosim apoi în mod esențial în rezolvarea problemelor Dirichlet neliniare cu date la frontieră generale (discontinue).

Teorema 3.4. ([12]) Fie λ o măsură finită pe D și $\sigma := \lambda \circ P_\tau^c$. Presupunem că (3.3) are loc și fie $\varphi \in L_+^1(\partial D, \sigma)$. Atunci există o funcție Borel măsurabilă $g : \partial D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ astfel încât $P_\tau^c \varphi \xrightarrow{k} \varphi$ pe $D_o = [k < \infty]$, unde $k := P_\tau^c g \in L^1(D, \lambda)$.

Remarca 3.5. Mulțimea $D \setminus D_o = [k = \infty]$ în Teorema 3.4 este fin închisă, λ -polară și λ -neglijabilă.

3.4. Cazul operatorului Laplace

Funcții armonice. Problema Dirichlet liniară clasică. Considerăm $F = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, D un domeniu mărginit din \mathbb{R}^d iar ∂D este frontiera lui D . O funcție $h \in C^2(D)$ (cu valori reale) se numește *armonică* pe D dacă

$$\Delta h := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = 0 \text{ pe } D.$$

Δ se numește operatorul Laplace.

3. Problema Dirichlet liniară cu date discontinue la frontieră

O soluție pentru *problema Dirichlet liniară clasică pe D cu data la frontieră* $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție armonică h definită pe D care satisface condiția la frontieră:

$$\lim_{D \ni x \rightarrow y} h(x) = \varphi(y) \text{ pentru orice } y \in \partial D.$$

În acest subcapitol $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ este mișcarea browniană d -dimensională pe \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Pentru $f : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o funcție mărginită inferior și Borel măsurabilă și $x \in D$ definim

$$H_D f(x) := \mathbb{E}^x f(Y_\tau).$$

Remarca 3.6. Conform Teoremei 3.7 din [46], pagina 106, rezultă că $H_D f$ este o funcție armonică (cu valori reale) pe D cu condiția că $H_D f$ nu este $+\infty$ peste tot pe D .

Problema Dirichlet bazată pe convergența controlată. O funcție $f : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se numește *funcție rezolutivă* dacă există o funcție armonică h pe D care converge la f controlat de o funcție k superarmonică, pozitivă și cu valori reale. Dacă f este rezolutivă, atunci soluția unică h (pentru unicitate vezi Corolarul 3.8 mai jos) se numește *soluția pe D a problemei Dirichlet cu data la frontieră f* .

Remarca 3.7. O funcție armonică h pe D este soluție pentru problema Dirichlet clasică liniară cu data la frontieră f dacă și numai dacă h converge la f controlat de o funcție mărginită k ; vezi [25], și Remarca 5.2 (ii) din [8].

Următorul corolar este o versiune a Corolarului 4.3 din [5].

Corolarul 3.8. ([18]) Dacă problema Dirichlet are o soluție atunci ea este unică. În particular, dacă u este o funcție armonică pe D care converge controlat de k la zero atunci $u = 0$ pe D .

Soluția stocastică a problemei Dirichlet liniare cu date la frontieră generale, asociate operatorului Δ

Următorul rezultat este o consecință imediată a Teoremei (3.4) care ne arată că soluția stocastică rezolvă problema Dirichlet cu date la frontieră generale în cazul operatorului Laplace. Este o îmbunătățire a rezultatului principal din [5], Teorema 4.8; pentru legătura cu rezolutivitatea pentru metoda Perron-Wiener-Brelot vezi Corolarul 2.13 din [26].

Corolarul 3.9. ([18]) Fie $D \subset \mathbb{R}^d$ un domeniu mărginit. Fie $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă Borel și mărginită inferior și presupunem că $H_D f$ nu este $+\infty$ peste tot pe D . Atunci $H_D f$ este soluția unică a problemei Dirichlet cu data la frontieră f . Mai precis, există $g \in \mathcal{B}_+(\partial D)$ astfel încât funcția $k := H_D g$ are valori reale și $H_D f$ converge la f controlat de k .

3.5. Unicitatea soluției a problemei Dirichlet pentru operatorul $\frac{1}{2}\Delta + q$ în sensul convergenței controlate

Fie J clasa Kato a funcției Green. Fie $\varphi \in b\mathcal{B}_+(\partial D)$. O funcție $u \in C(D)$ se numește *soluție slabă* a problemei Dirichlet asociate operatorului $\frac{1}{2}\Delta + q$, cu data la frontieră φ , dat fiind ca există o funcție de control superarmonică $k : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u + qu = 0 \text{ în } D \text{ în sensul slab,} \\ u \text{ converge la } \varphi \text{ controlat de } k. \end{cases}$$

Teorema 3.10. ([18]) Fie $q \in J$ și $\varphi \in b\mathcal{B}_+(\partial D)$. Dacă problema liniară Dirichlet asociată operatorului $\frac{1}{2}\Delta + q$, cu data la frontieră φ , are o soluție slabă în $C_b(D)$ atunci este unică.

4. PROBLEME DIRICHLET SEMILINIARE CU DATE DISCONTINUE LA FRONTIERĂ

Acest capitolul este bazat pe lucrarea [18] unde studiem problema Dirichlet

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u - \mathbb{F}(\cdot, u) = 0 \text{ în } D, \\ u \xrightarrow{k} \varphi \end{cases}$$

unde D este un domeniu regulat mărginit din \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, condiția la frontieră $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pozitivă, mărginită, Borel măsurabilă, cu valori reale, nu neaparat

continuă, \mathbb{F} este o funcție Borel măsurabilă cu valori reale, definită pe $D \times (0, b)$ pentru un anume $b \in (0, \infty]$ astfel încât pentru orice $x \in D$ funcția $\mathbb{F}(x, \cdot)$ este continuă pe $(0, b)$ și are loc

$$(4.2) \quad 0 \leq \mathbb{F}(x, u) \leq U(x)u$$

pentru orice $(x, u) \in D \times (0, b)$, unde U este o funcție Green-tight pozitivă pe D , fixată. Ecuația problemei este înțeleasă în sens slab, iar comportamentul soluției u la frontiera φ este ilustrat cu ajutorul convergenței controlate unde $k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ este funcția de control.

Dacă φ este o funcție definită pe ∂D , pozitivă, continuă, cu valori reale atunci problema de mai sus este un caz particular al celei studiate în [21] unde soluția u este continuă pe $E = \overline{D}$ și converge punctual la frontiera φ , adică $\lim_{D \ni x \rightarrow y} u(x) = \varphi(y)$, pentru orice $y \in \partial D$. Reamintim că în acest caz u este o soluție clasică slabă. Dacă φ este discontinuă atunci următorul rezultat ne arată ca problema nu poate avea o soluție clasică slabă. Așadar trebuie să înlocuim convergența punctuală la data la frontieră cu convergența controlată, obținând un tip de soluție mai general. O funcție $u \in C(D)$ se numește *soluție slabă* a problemei Dirichlet neliniare cu data la frontieră $\varphi \in b\mathcal{B}_+(\partial D)$, asociată operatorului $\frac{1}{2}\Delta u - \mathbb{F}(\cdot, u)$, dacă există o funcție de control $k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ superarmonică pe D astfel încât u să verifice problema (4.1).

4.1. Existența soluției

Pentru a demonstra existența soluției folosim câteva argumente din [21]. Fie $b \in (0, \infty]$ astfel încât $\|\varphi\|_\infty < b$, unde $\|\cdot\|_\infty$ este norma supremum. Ca în [21], (3.8)-(3.10), fie

$$\gamma_0 := \inf\{\varphi(x) : x \in \partial D\}, \quad \beta := c\|U\|_D,$$

și

$$\Lambda := \{u \in b\mathcal{B}_+(D) : m := e^{-\beta}\gamma_0 \leq u \leq \|\varphi\|_\infty =: \tilde{m} \text{ pe } D\}.$$

Presupunem că $\gamma_0 > 0$, deci $m = e^{-\beta}\gamma_0 > 0$. Înzestrăm pe Λ cu metrica indusă de norma supremum și în mod evident obținem un spațiu metric complet.

Considerăm o bilă B de rază R_0 centrată în origine ce conține D . Fie $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$

mişcarea browniană d -dimensională pe \mathbb{R}^d , $d \geq 3$.

Teorema 4.1. ([18]) Fie φ o funcție mărginită și Borel măsurabilă pe ∂D astfel încât $\gamma_0 > 0$. Considerăm F o este o funcție cu valori reale, Borel măsurabilă pe $D \times (0, b)$ ce satisface condiția (4.2) și presupunem că pentru orice $x \in D$ funcția $H_x : [m, \tilde{m}] \rightarrow [0, \infty)$ definită ca $H_x(y) := \frac{\mathbb{F}(x,y)}{y}$ este continuă Lipschitz pe $[m, \tilde{m}]$ cu constanta C care nu depinde de x . Presupunem că φ este așa încât

$$(4.3) \quad \|\varphi\|_\infty < \frac{d}{R_o^2 C}.$$

Atunci problema Dirichlet neliniară cu data la frontieră φ asociată operatorului $u \mapsto \frac{1}{2}\Delta u - \mathbb{F}(\cdot, u)$ are o soluție slabă $u \in C(D)$, adică ,

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u - \mathbb{F}(\cdot, u) = 0 \text{ în } D \text{ în sensul slab,} \\ u \text{ converge la } \varphi \text{ controlat de } k, \end{cases}$$

unde funcția de control este $k := H_D g = \mathbb{E}^x g(Y_\tau)$ pentru o anumă funcție $g \in \mathcal{B}_+(\partial D)$.

Remarca 4.2. (i) Demonstrația Teoremei 4.1 ne permite să evidențiem următoarea reprezentare probabilistă a soluției problemei Dirichlet neliniare (4.1). Let $v_0 \in \Lambda$ și definim relația de recurență

$$v_{n+1} := \mathbb{E}[e_{q_{v_n}}(\tau_D) \varphi(Y_{\tau_D})] \text{ pentru } n \geq 0.$$

Atunci șirul $(v_n)_{n \geq 0}$ din Λ converge uniform la soluția problemei (4.1).

(ii) Condiția (4.3) legată de "mărimea" lui φ este similară cu condiția (b) a Teoremei 1.1 din [21].

În continuare prezentăm un rezultat de unicitate a soluției problemei (4.1).

4.2. Unicitatea soluției

Teorema 4.3. ([18]) Dacă problema Dirichlet asociată operatorului $v \mapsto \frac{1}{2}\Delta v - \mathbb{F}(\cdot, v)$, cu data la frontieră $\varphi \in \mathcal{B}_+(\partial D)$, are o soluție slabă în Λ atunci ea este unică.

5. PROBLEME DIRICHLET NELINIARE ASOCIATE UNOR PROCESE DE RAMIFICARE NELOCALĂ

Acest capitol este bazat pe articolul [12]. Prezentarea care urmează a proceselor de ramificare este în conformitate cu abordările din [4], [11] și [13].

În această secțiune considerăm F un spațiu topologic Lusin și D un domeniu mărginit din F astfel încât $E := \overline{D}$ este o mulțime compactă. Fie X un proces Markov drept $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ pe $(E, \mathcal{B}(E))$ cu timp de viață ξ infinit, funcția de tranziție $(T_t)_{t \geq 0}$, $T_t f(x) = \mathbb{E}^x \{f(X_t)\}$, $f \in \mathcal{B}_+(E)$, $x \in E$, $t \geq 0$ și generatorul slab L . Procesul X reprezintă mișcarea de bază pentru sau mișcarea spațială (*spatial motion*) a particulelor între momentele de ramificare.

Considerăm problema la limită studiată în acest capitol:

$$(5.1) \quad \begin{cases} (L - c)u + c \sum_{j \geq 1} b_j B_j u^{(j)} = 0 \text{ în } D \\ u \xrightarrow{k} \varphi \end{cases}$$

unde $c \in \mathcal{B}(D)$ este o funcție cu valori reale, pozitivă, mărginită și extinsă cu 0 pe $F \setminus D$, $(b_j)_{j \geq 1}$ este un șir de funcții Borel măsurabile pozitive pe E astfel încât $\sum_{j \geq 1} b_j \leq 1$, pentru orice $j \geq 1$ B_j este un nucleu Markovian de la $E^{(j)}$, puterea simetrică de ordin j a lui E , către E și $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție Borel măsurabilă și mărginită, neapărat continuă, u este o funcție măsurabilă Borel pe E cu valori reale și pozitive care aparține domeniului lui L , astfel încât $u \leq 1$, și pentru orice $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, notăm cu $u^{(j)} : E^{(j)} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită ca $u^{(j)}(\mathbf{x}) := u(x_1) \cdot \dots \cdot u(x_j)$ pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_j) \in E^{(j)}$.

Comportamentul la frontieră al soluției u este dat de convergența controlată de k la funcția φ , unde $k : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ este o funcție L -superharmonică pe D .

O funcție Borel măsurabilă pe E cu valori reale, pozitivă ce satisface (5.1) se numește *soluție generalizată* a problemei. Presupunem că u aparține domeniului de definiție al lui $L - c$ și că ecuația este satisfăcută punctual în D .

Esențială este utilizarea unui proces de ramificare \widehat{X} cu spațiul stărilor \widehat{E} (mulțimea de configurații finite ale lui E , vezi mai jos), cu mișcarea spațială dată de procesul Markov X și cu mecanismul de ramificare generat de șirul $(B_j)_{j \geq 1}$.

În continuare ilustrăm interpretarea probabilistă a mecanismului de ramificare al procesului de ramificare \widehat{X} , mai exact modalitatea în care sunt create noi particule: dacă $j > 1$ și $x \in E$, atunci $b_j(x)$ este probabilitatea ca o particulă să fie distrusă într-un punct x și să aibă j descendenți, în timp ce probabilitatea $B_{j,x}$ indusă de nucleul Markovian B_j este distribuția celor j descendenți; amintim că $B_{j,x}$ este o măsură de probabilitate pe $E^{(j)}$ astfel încât $\int_{E^{(j)}} f dB_{j,x} = B_j f(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{B}_+(E^{(j)})$. În consecință, pentru că descendenții nu apar neapărat în punctele unde părintele a murit, astfel de ramificare se numește *nelocală*. Numai în cazul particular legat de problema (5.1) procesul de ramificare are proprietatea că descendenții pornesc mereu din punctul unde a murit părintele, pentru că în acest caz avem $B_{j,x} = \delta_x$ for all $x \in E$.

5.1. Procese de ramificare nelocală

Notăm cu $M(E)$ mulțimea de măsuri pozitive finite pe E , înzestrată cu topologia slabă, adică $\mu_n \rightarrow \mu$ dacă și numai dacă $\int_E f d\mu_n \rightarrow \int_E f d\mu$ pentru orice $f \in C(E)$ mărginită. Definim $\mathcal{M}(E)$ σ -algebra Borel corespunzătoare a lui $M(E)$.

Spațiul configurațiilor finite ale lui E . Considerăm următorul spațiu $\widehat{E} \subseteq M(E)$ de sume finite de măsuri Dirac pe E ,

$$\widehat{E} := \left\{ \sum_{i \leq i_0} \delta_{x_i} : i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \geq 1, x_i \in E \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq i_0 \right\} \cup \{\mathbf{0}\},$$

unde $\mathbf{0}$ este măsura zero (vezi [44]). Reamintim că $E^{(j)}$, puterea simetrică de ordin j , reprezintă factorizarea produsului cartezian E^j în raport cu relația de echivalență indusă de grupul de permutare σ^j . Atunci \widehat{E} se identifică cu $\widehat{E} = \bigcup_{j \geq 0} E^{(j)}$, unde $E^{(0)} := \{\mathbf{0}\}$. Mulțimea \widehat{E} se numește *spațiul configurațiilor finite* ale lui E și este înzestrat cu topologia slabă pe măsurile finite pe E și σ -algebra Borel $\mathcal{B}(\widehat{E})$ corespunzătoare.

Proces de ramificare. Un proces Markov drept cu spațiul stărilor \widehat{E} se numește *proces de ramificare* dacă pentru oricare două copii independente X_1 and X_2 ale procesului dat pe \widehat{E} , pornind din măsurile μ_1 și, respectiv, μ_2 aparținând lui \widehat{E} , $X_1 + X_2$ și procesul pornind din $\mu_1 + \mu_2$ sunt egale în distribuție.

Fie p_1 și p_2 două măsuri finite pe \widehat{E} . Convoluția $p_1 * p_2$ este o măsură finită pe \widehat{E} definită ca $\int_{\widehat{E}} p_1 * p_2(d\nu) F(\nu) := \int_{\widehat{E}} p_1(d\nu_1) \int_{\widehat{E}} p_2(d\nu_2) F(\nu_1 + \nu_2)$ pentru orice $F \in b\mathcal{B}_+(\widehat{E})$.

Amintim (vezi e.g. [48]) că un nucleu sub-Markovian N pe $(\widehat{E}, \mathcal{B}(\widehat{E}))$ se numește *nucleu de ramificare* dacă pentru orice $\mu, \nu \in \widehat{E}$ avem $N_{\mu+\nu} = N_\mu * N_\nu$, unde N_μ este măsura pe \widehat{E} indusă de N și μ , adică $\int_{\widehat{E}} g dN_\mu = Ng(\mu)$ pentru orice $g \in b\mathcal{B}_+(\widehat{E})$.

Un proces Markov cu spațiul stărilor \widehat{E} este un proces de ramificare dacă și numai dacă funcția sa de tranziție este formată din nuclee de ramificare (vezi e.g. [39] și [11]; și [13] și [9]).

Pentru orice funcție \mathcal{B} -măsurabilă cu valori reale f definim funcția multiplicativă $\widehat{f} : \widehat{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ca $\widehat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \prod_{i \geq 1} f(x_i), & \text{dacă } \mathbf{x} = (x_i)_{i \geq 1} \in \widehat{E}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 1, & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$ cf. [48]. Cu alte cuvinte, $\widehat{f}|_{E^{(j)}} = f^{(j)}$ dacă $j \geq 1$ și $\widehat{f}(\mathbf{0}) = 1$.

5.2. Ecuatii neliniare de evoluție corespunzătoare unor procese de ramificare

5.3. Cazul operatorului Laplace

Fie $F = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $D \subset \mathbb{R}^d$ un domeniu mărginit regulat, și $E = \overline{D}$. Fie $Y = (Y_t, \mathbb{P}^x, x \in \mathbb{R}^d)$ mișcarea Browniană d -dimensională, τ primul timp de intrare în ∂D a mișcării Browniene.

Fie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mișcarea Browniană stopată la frontiera lui D , mai exact $X_t = Y_{t \wedge \tau}$. Reamintim că X este un proces Markov continuu. Fie $L = \Delta$, adică L este generatorul slab al mișcării Browniene d -dimensionale stopate la frontiera lui D .

Folosind tehnici din [14], [15], [41] și [11] (vezi și [13]) demonstrăm următorul rezultat.

Teorema 5.1. ([12]) Fie $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție Borel măsurabilă, mărginită, extinsă

la o funcție pe E cu zero pe D . Fie $r > 0$ astfel încât $\|\varphi\|_\infty \leq r$. Presupunem că

$$(5.2) \quad \sup_{x \in E} \sum_{j \geq 1} r^{j-1} b_j(x) \leq 1 \text{ și } \sup_{x \in E} \sum_{j \geq 1} j r^{j-1} b_j(x) < \infty.$$

Atunci există o constantă $c_0 > 0$ astfel încât dacă $c < c_0$, atunci există o funcție Borel măsurabilă $g : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ și un proces de ramificare nelocală $\widehat{X} = (\widehat{X}_t, \widehat{\mathbb{P}}^\mu, \mu \in \widehat{E})$ cu spațiul stărilor \widehat{E} (spațiul configurațiilor finite ale lui E) și mișcarea spațială X , astfel încât există

$$(5.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x} \left\{ \left(\frac{\varphi}{r} \right) (\widehat{X}_t) \right\} =: u(x) \text{ pentru orice } x \in E$$

și u este o soluție generalizată a problemei Dirichlet neliniare (5.1) cu data la frontieră φ , asociată operatorului $u \mapsto (\Delta - c)u + c \sum_{j \geq 1} b_j B_j u^{(j)}$, adică

$$(5.4) \quad \begin{cases} (\Delta - c)u + c \sum_{j \geq 1} b_j B_j u^{(j)} = 0 \text{ în } D \\ u \xrightarrow{k} \varphi, \end{cases}$$

unde k este o funcție armonică pe D , definită ca $k = H_D g$.

5.4. Cazul operatorului de tip gradient

Curent (flow) continuu la dreapta. În capitolul acesta F este un spațiu topologic Lusin, D este un domeniu mărginit al lui F , $E = \overline{D}$, și $\phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ este un *curent (flow)* continuu la dreapta pe F . Un curent continuu la dreapta pe F este o familie $\phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ de aplicații pe F (cf. [47], pagina 41; vezi de asemenea [10]) astfel încât:

- (1) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ pentru orice $s, t > 0$ și $x \in F$;
- (2) $\phi_0(x) = x$ pentru orice $x \in F$;
- (3) Pentru oricare $t > 0$ funcția $F \ni x \mapsto \phi_t(x)$ este $\mathcal{B}(F)/\mathcal{B}(F)$ -măsurabilă;
- (4) Pentru orice $x \in F$ funcția $t \mapsto \phi_t(x)$ este continuă la dreapta pe $[0, \infty)$.

Curentul continuu la dreapta ϕ poate fi privit ca un proces Markov drept determinist pe F cu timp de viață infinit, $Y = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Y_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$: $\Omega = F$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $Y_t(x) := \phi_t(x) =: \theta_t(x)$ pentru orice $x \in \Omega$, și $\mathbb{P}^x = \delta_x$. Fie $(S_t)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție a lui Y (adică lui ϕ), $S_t f(x) = f(\phi_t(x))$ pentru orice $t \geq 0$, $x \in F$, și $f \in \mathcal{B}_+(F)$. În

particular, funcția de tranziție $(S_t)_{t \geq 0}$ pe F este Markoviană.

Fie Λ generatorul slab al lui Y . Spunem de asemenea că Λ este *generatorul slab al lui ϕ* , care este un operator de ordin întâi, de tip "gradient" în sensul că domeniul $\mathcal{D}(\Lambda)$ al lui Λ este o algebra și dacă $u \in \mathcal{D}(\Lambda)$ atunci $\Lambda(u^2) = 2u\Lambda u$; cf. [6].

Fie $\tau : F \rightarrow [0, +\infty]$ primul timp de intrare în ∂D al lui ϕ , adică, $\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : \phi_t(x) \in \partial D\}$. Presupunem că τ este mărginit, atunci există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 \leq \tau(x) \leq M$ pentru orice $x \in F$. Presupunem că

$$(5.5) \quad \lim_{D \ni x \rightarrow y} \tau(x) = 0 \text{ pentru orice } y \in \partial D.$$

Considerăm Φ , curentul ϕ stopat la frontiera lui D , adică, $\Phi_t = \phi_{t \wedge \tau}$ pentru $t \geq 0$. Reiese (cf. [6] și [10]) că Φ este un curent continuu la dreapta pe E . În mod clar, procesul Markov drept determinist pe E asociat X este mai exact procesul Y stopat la frontiera lui D , $X_t = Y_{t \wedge \tau}$, $t \geq 0$. Fie $(T_t)_{t \geq 0}$ funcția de tranziția a lui X (i.e., a lui Φ), $T_t f(x) = f(\Phi_t(x))$ pentru orice $t \geq 0$, $x \in E$, și $f \in \mathcal{B}_+(E)$.

Notăm cu L generatorul slab al lui Φ . Putem observa că L coincide pe D cu restricția la D a lui Λ , generatorul slab al lui ϕ , în sensul următor. Dacă $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$ atunci $f|_E \in \mathcal{D}(L)$ și $L(f|_E) = \Lambda f$ pe D și $Lg = 0$ pe ∂D pentru oricare $g \in \mathcal{D}(L)$.

Pentru orice funcție măsurabilă Borel $f : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definim

$$H_D f(x) := \mathbb{E}^x f(\Phi_\tau) = f(\phi_{\tau(x)}(x)) \text{ pentru orice } x \in D.$$

Fie $(b_k)_{k \geq 1}$ un șir de numere pozitive astfel încât $\sum_{j \geq 1} b_j \leq 1$ și presupunem că $1 < m_1 := \sum_{j \geq 1} k b_j < \infty$. Fixăm de asemenea o funcție $c : F \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $c(x) = c_1$ pentru $x \in D$, unde c_1 este o constantă reală și $0 < c_1 \leq \frac{m_1}{m_1 - 1}$, și $c(x) = 0$ pentru $x \in F \setminus D$.

Fie $(T_t^c)_{t \geq 0}$ funcția de tranziție pe X omorâtă cu funcționala multiplicativă indusă de c , i.e., pentru $x \in E$

$$T_t^c f(x) := \mathbb{E}^x \{e^{-\int_0^t c(\Phi_s) ds} f(\Phi_t)\} = e^{-\int_0^t c(\Phi_s(x)) ds} f(\Phi_t(x)), \quad t \geq 0, \quad f \in b\mathcal{B}_+(E).$$

Pentru că c este 0 pe $F \setminus D$, avem că pentru $x \in E$, $t \geq 0$, și $f \in \mathcal{B}_+(F)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t^c(f|_E)(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^t c(\Phi_s(x)) ds} f|_E(\Phi_t(x)) = e^{-c_1 \tau(x)} f(\phi_{\tau(x)}(x)) =: P_\tau^c f(x).$$

Din (5.5) și proprietățile lui ϕ reiese că pentru orice $f \in b\mathcal{C}_+(\partial D)$ avem că

$$(5.6) \quad \lim_{D \ni x \rightarrow y} P_\tau^c f(x) = \lim_{D \ni x \rightarrow y} H_D f(x) = f(\phi_0(y)) = f(y) \text{ pentru orice } y \in \partial D.$$

Observăm că validitatea lui (5.6) înseamnă că (5.5) este o condiție care implică faptul că soluția stocastică a problemei Dirichlet pentru generatorul slab L al lui ϕ este soluția clasică, presupunând că data la frontieră este continuă.

Fie $X^0 = (X_t^0, \mathbb{P}^x, x \in E)$ procesul Markov trivial pe E pentru care orice punct este un "trap", adică, pentru orice $x \in E$, $\mathbb{P}^x(X_t^0 = x) = 1$ pentru toate $t \geq 0$, sau echivalent, orice nucleu din funcția de tranziție $(T_t^0)_{t \geq 0}$ este operatorul identitate, $T_t^0 f = f$, $t \geq 0$ și $f \in \mathcal{B}_+(E)$. Considerăm procesul de ramificare ne-local \widehat{X}^0 pe \widehat{E} pentru care mișcarea spațială este X^0 (vezi [19]); pentru că de fapt \widehat{X}^0 nu are mișcare spațială se numește *proces de ramificare pur*.

Principala presupunere este următoarea "proprietate de comutare" a curentului Φ și a mecanismului de ramificare indus de șirul $(B_j)_{j \geq 1}$: pentru orice $f \in \mathcal{B}_+(E)$, $f \leq 1$, avem că $B_j(f \circ \Phi_t)^{(j)} = B_j f^{(j)} \circ \Phi_t$, $j \geq 1$, $t \geq 0$; cf. condiției (4.5) din [19].

Următorul rezultat corespunde Teoremei 5.1 în cadrul acestui subcapitol.

Teorema 5.2. ([12]) Fie $\varphi \in b\mathcal{B}_+(\partial D)$, $r > 0$ astfel încât $\|\varphi\|_\infty < r$, și presupunem că

$$\sum_{j \geq 1} r^{j-1} b_j \leq 1 \text{ și } \sum_{j \geq 1} j r^{j-1} b_j < \infty.$$

Fixăm o măsură finită λ pe D . Presupunem că τ este mărginit pe D și satisface (5.5) iar $[0, \infty) \times E \ni (t, x) \mapsto \Phi_t(x)$ este continuă. Atunci există o funcție măsurabilă Borel $g : \partial D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, o mulțime λ -polară, λ -neglijabilă $M_o \subset D$, și un proces de ramificare nelocală $\widehat{X} = (\widehat{X}_t, \widehat{\mathbb{P}}^\mu, \mu \in \widehat{E})$ cu spațiul stărilor \widehat{E} și mișcarea spațială Φ , astfel încât există

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x} \left\{ \left(\frac{\varphi}{r} \right) (\widehat{X}_t) \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} r \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x} \left\{ \left(\frac{\varphi}{r} \right) (\Phi_t(\widehat{X}_t^0)) \right\} =: u(x) \text{ pentru orice } x \in E.$$

Funcția u este o soluție generalizată a problemei Dirichlet neliniare (5.1) cu data la frontieră φ și L , generatorul slab al lui Φ , adică

$$(5.8) \quad \begin{cases} (L - c)u + c \sum_{j \geq 1} b_j B_j u^{(j)} = 0 \text{ în } D \\ u \xrightarrow{k} \varphi \text{ pe } D \setminus M_o, \end{cases}$$

unde $k = H_{Dg}$ este λ -integrabilă și mulțimea excepțională λ -polară, λ -neglijabilă este $M_o = [k = +\infty]$.

6. APENDIX

Prezentăm noțiuni generale despre funcții armonice, hiperarmonice și superarmonice și rezultate clasice precum Teorema clasei monotone și Principiul de minim. De asemenea, prezentăm schițe de demonstrații pentru rezultate folosite de-a lungul acestei teze (vezi Remarca 1.1 din [5], Corolarul 4.3 din [5] și Teorema 2.1 din [41]).

7. BIBLIOGRAFIE

- [1] Armitage, D.H., Gardiner, S.J., *Classical Potential Theory*. Springer 2001.
- [2] Atar, R., Athreya, S., and Chen, Z.Q., Exit time, Green function and semilinear elliptic equations, *Electron. J. Probab.* **14** (2009), 50–71.
- [3] Barbu, V., Beznea, L., Measure-valued branching processes associated with Neumann nonlinear semiflows. *J. Math. Anal. Appl.* **441** (2016), 167–182.
- [4] Beznea, L., Potential-theoretical methods in the construction of measure-valued Markov branching processes. *J. Eur. Math. Soc.* **13** (2011), 685–707.

-
- [5] Beznea, L., The stochastic solution of the Dirichlet problem and controlled convergence. *Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*. **10** (2011), 115–136.
- [6] Beznea, L., Bezzarga, M., Cîmpean, I., *Continuous flows driving Markov processes and multiplicative L^p -semigroups* (2024). arXiv preprint arxiv.org/abs/2411.09407.
- [7] Beznea, L., Boboc, N., *Potential Theory and Right Processes*, Mathematics and its Applications, Springer Series, vol. 572, Kluwer, 2004.
- [8] Beznea, L., Cornea, A., Röckner, M., Potential theory of infinite dimensional Lévy processes, *J. Funct. Anal.* **261** (2011), 2845–2876.
- [9] Beznea, L., Deaconu, M., and Lupaşcu, O., Branching processes for the fragmentation equation, *Stoch. Processes and their Appl.* **125** (2015), 1861–1885.
- [10] Beznea, L., Ionescu, I.R., Lupaşcu-Stamate, O., Random multiple-fragmentation and flow of particles on a surface. *J. Evol. Equ.* **21** (2021), 4773–4797.
- [11] Beznea, L., Lupaşcu, O., Measure-valued discrete branching Markov processes. *Transactions of the AMS* **368** (2016), 153–5176.
- [12] Beznea, L., Lupaşcu-Stamate, O., **Teodor, A.**, Nonlinear Dirichlet problem of non-local branching processes, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **547**,(2025), 129281, ISSN 0022-247X,
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129281>.
- [13] Beznea, L., Lupaşcu-Stamate, O., Vrabie, C. I., Stochastic solutions to evolution equations of non-local branching processes. *Nonlinear Anal.* **200** (2020), 112021.
<https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112021>
- [14] Beznea, L., Oprina, A.-G., Nonlinear PDEs and measure-valued branching type processes; *J. Math. Anal. Appl.* **384** (2011), 16–32.
- [15] Beznea, L., Oprina, A.-G., Bounded and L^p -weak solutions for nonlinear equations of measure-valued branching processes. *Nonlinear Anal.* **107** (2014), 34–46.

-
- [16] Beznea, L., Pascu, M.N., and Pascu, N.R., An equivalence between the Dirichlet and the Neumann problem for the Laplace operator, *Potential Analysis* **44** (2016), 655–672.
- [17] Beznea, L., Pascu, M.N., and Pascu, N.R., Connections between the Dirichlet and the Neumann problem for continuous and integrable boundary data. In: *Stochastic Analysis and Related Topics* (Progress in Probability **72**, Birkhäuser), Springer 2017, pp. 85–97.
- [18] Beznea, L., **Teodor, A.**, Positive solutions to semilinear Dirichlet problems with general boundary data. *Analysis and Mathematical Physics* **14** (2024), 39, <https://doi.org/10.1007/s13324-024-00905-2>
- [19] Beznea, L., Vrabie, C.I., Continuous flows driving branching processes and their nonlinear evolution equations. *Adv. Nonlinear Anal.* **11** (2022), 921–936.
- [20] Blumenthal, R.M., Gettoor, R.K., *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.
- [21] Chen, Z.Q., Williams, R.J., and Zhao, Z., On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations with Dirichlet boundary conditions, *Math. Ann.* **298** (1994), 543–556.
- [22] Chung, K.L., *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, Springer-Verlag, 1982.
- [23] Chung, K.L., Doubly-Feller process with multiplicative functional. In: *Seminar on Stochastic Processes, 1985* (Progr. Probab. Statist. **12**), Birkhäuser Boston, 1986, pp. 63–78.
- [24] Chung, K.L., Zhao, Z., *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer-Verlag, 1995.
- [25] Cornea, A., Résolution du problème de Dirichlet et comportement des solutions à la frontière à l'aide des fonctions de contrôle, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math.* **320** (1995), 159–164.

-
- [26] Cornea, A., Applications of controlled convergence in analysis. In: *Analysis and Topology*, World Sci. Publishing, (1998), pp. 957–275.
- [27] Dacorogna, B., *Introduction to Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2004.
- [28] Dawson, D., Book review of *Diffusions, superdiffusions and partial differential equations*, by E. B. Dynkin. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41** (2004), 245–252.
- [29] Dellacherie, C., Meyer, P.-A., *Probabilités et potentiel*. Hermann, Paris, 1987.
- [30] Dynkin, E.B., *Markov Processes*, vol. I and II. Springer, Berlin, 1965.
- [31] Dynkin, E.B., *Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **50**, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
- [32] Dynkin, E.B., *Superdiffusions and Positive Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. (University Lecture Series, vol. 34), Amer. Math. Soc., Providence, 2004.
- [33] Ethier, S.N., and Kurtz, T. G., *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley & Sons 1986.
- [34] Fitzsimmons, P.J., Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes, *Israel J. Math.* **64** (1988), 337–361.
- [35] Hansen, W., *Brownian motion and potential theory*, Lecture Notes, Prague, 2005
- [36] Hirata, K., On the existence of positive solutions of singular nonlinear elliptic equations with Dirichlet boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 885–891.
- [37] Hirsch, F., Yor, M., On temporally completely monotone functions for Markov processes, *Probab. Surveys*, **9** (2012), 253–286.
- [38] Hsu, P., Branching Brownian motion and the Dirichlet problem of a nonlinear equation. In: *Seminar on Stochastic Processes, 1986* (Progr. Probab. Statist. **13**), Birkhäuser, Boston, 1987, pp. 71–83.

- [39] Li, Z., *Measure-Valued Branching Markov Processes*, Second Edition. Springer, 2022.
- [40] Lukeš, J., Malý, J., Netuka, I., Spurný, J., *Integral Representation Theory: Applications to Convexity, Banach Spaces and Potential Theory*, de Gruyter, 2010.
- [41] Lupaşcu, O., Stănciulescu, V., Numerical solution for the non-linear Dirichlet problem of a branching process, *Complex Anal. Oper. Theory* **11** (2017), 1895–1904.
- [42] Meyer, P.A., Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, *Annales de l'inst. Fourier* **12** (1962), 125–230.
- [43] Nagasawa, M., A probabilistic approach to non-linear Dirichlet problem. In: *Séminaire de probabilités (Strasbourg)* **10** (1976), pp. 184–193.
- [44] N. Ikeda, M. Nagasawa, and S. Watanabe, Branching Markov processes I, II, III *Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), 233–278
- [45] Øksendal, B., *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications* (Fifth Edition, Corrected Printing), Springer-Verlag, 2002.
- [46] Port, S.C., Stone, C.J., *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, Academic Press, 1978.
- [47] Sharpe, M., *General Theory of Markov Processes*, Academic Press, 1988.
- [48] Silverstein, M.L., Markov processes with creation of particles, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verwandte Geb.* **9** (1968), 235–257.