ACADEMIA ROMÂNĂ

SCOSAAR

Anexa nr.6

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE*

TITLU: Foliații, tangențe și dinamica aplicațiilor Hénon

Domeniul de abilitare: MATEMATICĂ

Autor: TĂNASE Raluca-Elena

Punctele critice joacă un rol important în teoria sistemelor dinamice. În dinamica complexă unu-dimensională, orbitele lor influențează geometria și topologia mulțimilor polinomiale Julia. În teoria ecuațiilor diferențiale, punctele de echilibru și varietățile invariante sunt obiecte centrale pentru studiul comportamentului soluțiilor unui sistem autonom de ecuații diferențiale ordinare. În mai multe variabile complexe, noțiunea relevantă de punct critic capătă însă un caracter mai geometric. Aplicațiile Hénon complexe reprezintă o clasă specială de automorfisme polinomiale ale lui $\mathbb{C}^2$ și, fiind biholomorfisme, nu au puncte critice în sens obișnuit. Cu toate acestea, dinamica lor este complicată și prezintă numeroase fenomene coexistente: *foldings*, tangențe, tranziții între regimuri regulate și haotice, *strange attractors* și haos. Dinamica aplicațiilor Hénon complexe reprezintă un domeniu activ de cercetare, dezvoltat începând cu anii 1990 prin lucrările lui Friedland și Milnor, Benedicks și Carleson, Fornæss și Sibony, Hubbard și Oberste-Vorth, Bedford și Smillie, Lyubich etc. și continuat, mai recent, prin lucrările lui Bedford, Smillie și Ueda, Gaidashev, Radu și Yampolsky, Lyubich și Dujardin, Lyubich și Peters, Berger etc.

În studiul dinamicii aplicațiilor Hénon, atât reale, cât și complexe, se analizează adesea tangențele dintre laminații, foliații sau curbe definite dinamic, introducându-se astfel diverse noțiuni de puncte critice. Benedicks și Carleson au definit puncte critice pe curbe instabile pentru a controla hiperbolicitatea neuniformă a aplicațiilor Hénon reale. Bedford și Smillie au studiat punctele critice ale funcției Green care descrie creșterea orbitelor la infinit, restrânsă la varietățile instabile ale punctelor periodice de tip saddle, stabilind legături cu exponenții Lyapunov și cu conexitatea mulțimilor Julia. Dujardin și Lyubich au folosit tangențe din interiorul bazinelor semi-parabolice pentru a investiga bifurcațiile. Bedford, Smillie și Ueda, precum și, mai recent, Astorg și Bianchi, au considerat o noțiune de puncte critice exprimată prin tangențe între curba asimptotică și foliația puternic stabilă. Curba asimptotică a fost introdusă de Ueda ca mulțimea punctelor ale căror iterate negative converg către punctul fix semi-parabolic.

Fie U^+ mulțimea punctelor ale căror orbite scapă la infinit sub iterate pozitive ale aplicației Hénon. Frontiera topologică J^+a lui U^+ este un obiect fractal complicat, pe care aplicația Hénon se comportă haotic (în literatura de specialitate aceasta se numește *forward Julia set*). De exemplu, pentru perturbări singulare ale unui polinom pătratic hiperbolic, J^+ are dimensiune 3 și constituie frontiera unui domeniu Fatou–Bieberbach din $\mathbb{C}^2$. Există puține rezultate în literatura de specialitate care să fie valabile în deplină generalitate, pentru întreaga familie a

aplicațiilor Hénon. Un exemplu îl constituie teorema lui Hubbard și Oberste-Vorth privind structura analitică a lui U^+: mulțimea U^+ este câtul spațiului $(\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}) \times \mathbb{C}$ prin acțiunea unui grup discret de automorfisme Γ, izomorf cu $\mathbb{Z}[1/d]/\mathbb{Z}$, unde $d \geq 2$ este gradul aplicației Hénon. Înțelegerea mulțimii U^+ este esențială pentru înțelegerea dinamicii aplicației Hénon.

În capitolul 4 studiem în ce măsură structura complex-analitică a mulțimii U^+ determină aplicația Hénon. Deși mulțimile U^+asociate aplicațiilor Hénon complexe admit spații de acoperire biholomorf echivalente, acțiunile de grup asociate depind de aplicația Hénon. În grad doi demonstrăm următorul rezultat de rigiditate: dacă mulțimile U^+ asociate a două aplicații Hénon sunt biholomorfe, atunci aplicațiile Hénon coincid. În grade superioare, această rigiditate nu mai este adevărată, deoarece structura analitică a lui U^+nu determină în mod unic aplicația Hénon (apare o ambiguitate care crește odată cu gradul topologic).

În capitolele 2 și 3 studiem varietatea critică a unei aplicații Hénon, definită ca mulțimea punctelor de tangență dintre foliațiile lui U^+ și U^- (mulțimea punctelor ale căror orbite scapă la infinit sub iterate negative). Notăm cu $J^{\pm}$ frontierele topologice ale mulțimilor $U^{\pm}$ și cu $J = J^- \cap J^+$ mulțimea Julia a aplicației Hénon.

În capitolul 2 analizăm clasa perturbărilor mici ale polinoamelor hiperbolice sau parabolice pentru care mulțimea Julia este conexă (din punct de vedere topologic, aceasta este câtul unui solenoid printr-o relație de echivalență), în timp ce în capitolul 3 analizăm aplicațiile Hénon din regiunea horseshoe, pentru care mulțimea Julia nu este conexă (este o mulțime Cantor). Studiul varietății critice necesită o bună înțelegere a geometriei mulțimilor $U^{\pm}$ și a foliațiilor acestora. În context perturbativ, Lyubich și Robertson au caracterizat varietatea critică pentru perturbări ale polinoamelor pentru care mulțimea Julia nu este conexă și au identificat o componentă primară a varietății critice, asimptotică la axa x. În capitolul 2 folosim componenta primară a varietății critice drept transversă comună pentru laminația lui J^+ și foliația lui U^+, care se îmbină continuu conform rezultatelor lui Bedford și Smillie din context hiperbolic. Extindem apoi teorema lui Hubbard și Oberste-Vorth la frontieră și reprezentăm mulțimea Julia J^+ drept câtul spațiului $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C})/\Gamma$ printr-o relație de echivalență. Pentru a extinde rezultatele capitolului 2 la cazul parabolic, utilizăm rezultate recente (în colectiv cu Radu) privind structura mulțimii Julia asociată unei aplicații Hénon semi-parabolice perturbate, precum și rezultatul nostru privind continuitatea foliațiilor și a laminațiilor. Mulțimea J^+ este laminată de copii ale lui $\mathbb{C}$, care corespund varietăților stabile ale punctelor din J. Acestea sunt însă scufundate într-un mod complicat în $\mathbb{C}^2$; de fapt, orice varietate stabilă a unui punct periodic de tip saddle este densă în întreaga mulțime J^+. Așadar, varietatea critică reprezintă un instrument util pentru studiul unei dinamici globale.

În capitolul 3 arătăm cum pot fi utilizate teoria foliațiilor, numărul Milnor al unei singularități, teorema de fibrație a lui Ehresmann și teorema de extensie a lui Hartogs pentru a descrie structura geometrică a varietăților critice ale aplicațiilor Hénon din regiunea horseshoe. Firsova a descris varietatea critică pentru acele aplicații Hénon obținute din perturbări ale polinoamelor pătratice ale căror mulțimi Julia nu sunt conexe. În capitolul 3 dezvoltăm tehnici noi în context general (nu doar pentru perturbări) și demonstrăm că varietatea critică este o suprafață Riemann de gen infinit homeomorfă cu o reuniune numărabilă de sfere trunchiate, conectate între ele prin mânere. Varietatea critică se află în complementul mulțimii Julia și completează în mod natural structura sistemelor dinamice de tip Hénon din regiunea horseshoe. Analizăm, de asemenea, acțiunea de monodromie și componentele frontierei varietății critice, precum și legătura acestuia cu mulțimile Julia și cu varietățile critice stabile și instabile introduse de Bedford și Smillie.

În această teză dezvoltăm tehnici de lucru care se pot aplica și în alte domenii, precum geometria algebrică, topologie, teoria singularităților, teoria foliațiilor, studiul bifurcațiilor, etc. În capitolul 1 prezentăm mai multe direcții de cercetare adecvate doctoranzilor și cercetătorilor postdoctorali.

*în cazul în care teza va fi redactată într-o limbă străină, textul în limba română va fi adaptat