

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE*

TITLUL : Sisteme dinamice în două dimensiuni

Domeniul de abilitare: *MATEMATICĂ*

Autor: Remus-Andrei RADU

În această teză analizăm dinamica aplicațiilor Hénon complexe, un prototip al unui sistem dinamic bidimensional care prezintă întindere, pliere, haos și diverse alte fenomene coexistente. Aplicațiile Hénon sunt obiecte centrale în studiul dinamicii olomorfe în 2D. Încă de la începutul anilor '80, studiul aplicațiilor Hénon reale și complexe a generat un interes deosebit. Enumerăm doar câteva lucrări mai apropiate de subiectul acestei teze: Benedicks și Carleson, Fornaess și Sibony, Hubbard și Oberste-Vorth (două lucrări fundamentale), Bedford și Smillie (o serie de 8 lucrări), Bedford, Smillie și Ueda, de Carvalho, Lyubich și Martens (renormalizare pentru aplicații Hénon reale), Berger, Gaidashev și Yampolsky (renormalizare perechi comutative în două dimensiuni), Yampolsky și Yang, Dujardin și Lyubich, Lyubich și Peters și mulți alții.

Oferim o viziune unificată a studiului aplicațiilor Hénon cu un punct fix semi-neutru (adică are o valoare proprie de valoare absolută unu și o valoare proprie de valoare absolută mai mică decât unu). Ca și în 1D, putem distinge trei cazuri: semi-parabolic, semi-Siegel și semi-Cremer. Subliniem comportamentul diferit (non-hiperbolic) în fiecare caz, discutăm progresele recente subliniind progresele importante în domeniu și facem analogii cu dinamica unu-dimensională. În fiecare caz, dezvoltăm tehnici care ar putea fi utilizate pentru studierea altor sisteme dinamice cu proprietăți similare. Ca atare, tehnicile dezvoltate în această teză sunt de interes independent și ar putea fi aplicate în alte domenii, cum ar fi geometria și topologia.

Mai întâi analizăm aplicațiile Hénon cu un punct fix semi-parabolic și Jacobian mic. Dacă Jacobianul este suficient de mic, atunci acestea sunt perturbații singulare ale unui polinom (pătratic) cu un punct fix parabolic. Demonstrăm că mulțimea Julia J^+ (mulțimea Julia forward) a aplicației Hénon intersectată cu un polidisc este un fascicul de fibre peste mulțimea Julia a polinomului din care perturbăm, cu fibre biolomorfe cu discuri. Mulțimea Julia este conexă și acumulată de puncte periodice de tip saddle (acesta este primul exemplu dincolo de hiperbolicitate pentru care mulțimea Julia este acumulată de puncta de tip saddle). Aplicația Hénon este parțial hiperbolică și se află la limita unei componente hiperbolice și în frontiera mulțimii de conectivitate din spațiul parametric doi-dimensional. Tehnica constă în recuperarea mulțimii Julia J^+ intersectată cu un polidisc ca imagine a punctului fix



ACADEMIA ROMÂNĂ

SCOSAAR

unic al unui operator de transformare grafică, slab contractant, într-un spațiu funcțional adecvat. Construim o metrică pe o vecinătate a lui J^+ din interiorul polidiscului pentru care aplicația Hénon expandează slab în conure orizontale. Apoi considerăm infimumul unui pull-back al unei metrici euclidiene într-o vecinătate tubulară mică a varietății locale puternic stabile (strong stable) a punctului fix semi-parabolic și un produs al unei metrici Poincaré cu o metrică euclidiană în exterior. Reținem că factorul de expansiune depinde de distanța față de varietatea locală puternic stabilă a punctului fix semiparabolic, deci este strict mai mare decât unu, dar nu există o constantă de expansiune uniformă.

Apoi, analizăm familia de aplicații complexe Hénon care au un punct fix semi-indiferent cu valori proprii λ și μ unde $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$, $|\mu| < 1$ și θ este un număr Brjuno. Aceste aplicații au un disc Siegel (un domeniu de rotație) și suntem interesați de proprietățile de regularitate ale frontierei sale. Discul Siegel este un disc olomorf unu-dimensional în C^2 , iar aplicația Hénon este liniarizabilă analitic într-o vecinătate a punctului fix semi-Siegel. Deși se cunosc multe despre frontiera discului Siegel pentru aplicații unu-dimensionale, prin lucrările lui Douady, Buff & Chéritat, Avila, Lyubich etc., nu se cunosc prea multe despre frontiera discului Siegel pentru aplicațiile Hénon. Pentru aplicații complexe Hénon, în colaborare cu Gaidashev și Yampolsky, am demonstrat că frontiera discului Siegel este un cerc topologic și că aplicația conjugată este cvasisimetrică. Demonstrația se bazează pe o tehnică de renormalizare pentru perechi comutative în 2D dezvoltată de Gaidashev și Yampolsky și pe hiperbolicitatea punctului fix al operatorului de renormalizare. Teorema ține și dacă numărul de rotație asociat discului Siegel este eventual periodic, în special pentru $[1; 1, 1, 1, \dots]$.

În ultimul capitol analizăm germeni de difeomorfisme holomorfe f ale lui $(C^n, 0)$ cu un punct fix la origine cu o singură valoare proprie neutră. Punctul fix semi-neutru are o varietate centrală locală de clasă C^1 (adesea non-unică). Dezvoltăm o nouă tehnică de studiu: demonstrăm că funcția f restricționată la varietatea centrală locală este conjugată cvasiconform la cu o funcție analitică g care acționează pe $(C, 0)$, astfel încât valoarea proprie neutră a lui df_0 să fie egală cu multiplicatorul lui g la origine. Această teoremă ne permite să transportăm rezultatele dintr-o dimensiune la dimensiuni mai mari. Compactii Siegel în dimensiune unu au fost introduși de Pérez-Marco în anii '90 pentru a studia proprietățile de liniarizare și dinamica germenilor univalenți holomorfi ai lui $(C, 0)$ cu un punct fix neutru. Un compact Siegel este o mulțime complet invariantă local, conexă, compactă, care conține originea. Demonstrăm că există întotdeauna compactii Siegel în interiorul fiecărei varietăți centrale locale și că toate varietățile centrale conțin compactul Siegel (fac contact pe compactul Siegel). Considerăm cazul patologic al aplicațiilor Hénon care nu sunt semi-parabolice sau liniarizabile în apropierea originii. Cu toate acestea, demonstrăm că dinamica compactului Siegel este recurentă și că nu există domenii rătăcitoare care converg către acesta. Mai mult, compactul Siegel este acumulat de puncte periodice de tip saddle.

Deși s-au obținut rezultate importante în studiul aplicațiilor Hénon cu un punct fix semi-neutru, acesta este încă un subdomeniu emergent al matematicii, cu multe probleme deschise și direcții de cercetare.