



Anexa nr.6

## **REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE\***

TITLU : Determinare combinatorică în teoria aranjamentelor de  
hiperplane și curbe

Domeniul de abilitare: MATEMATICĂ

**Autor: Daniela-Anca Măcinic**

\*În cazul în care teza va fi redactată într-o limbă străină, textul în limba română va fi adaptat

În această teză studiem diverse manifestări ale combinatoricii în teoria aranjamentelor de hiperplane și curbe. Prin *aranjament* vom înțelege fie un aranjament de hiperplane (o mulțime finită de hyperplane într-un spațiu vectorial finit dimensional) fie un aranjament de curbe (o curbă văzută ca reuniune a componentelor sale ireductibile). Curbele cu care lucrăm sunt curbe în planul proiectiv complex.

Spunem că invarianti asociați sau proprietăți ale unui aranjament sunt *de natură combinatorială* (echivalent, sunt *combinatoric determinate*) dacă acestea sunt determinate exclusiv de combinatorica asociată aranjamentului. Pentru aranjamente de hiperplane, combinatorica constă în datele conținute în laticea de intersecție a aranjamentului. Pentru curbe, combinatorica este așa numită *combinatorică slabă* a curbei introdusă de Cogolludo. Aceasta poate fi văzută ca o generalizare a combinatoricii aranjamentelor de drepte proiective complexe. Există în teoria aranjamentelor de hiperplane o multitudine de rezultate dar și întrebări deschise legate de determinarea combinatorică. Un exemplu emblematic de determinare combinatorică este coomologia complementului unui aranjament de hiperplane, cu coeficienți întregi (Orlik-Solomon). Cogolludo și Cogolludo-Matei au demonstrat mult mai recent că și coomologia complementului unei curbe proiective plane este determinată combinatoric. Pe de altă parte, se știe că grupul fundamental al complementului unui aranjament nu este combinatorial, datorită unui contraexemplu dat de Rybnikov - o pereche de aranjamente de drepte proiective complexe izomorfe ca latices, dar cu topologii ale complementului distincte.

Prima parte a acestei teze, constând în primele trei capitole, se concentrează asupra influenței combinatoricii unui aranjament asupra monodromiei fibrei Milnor asociate acestuia. Mai precis, studiem monodromia indusă în primul grup de omologie, cu coeficienți raționali, al fibrei Milnor. Aceasta revine la a calcula/estima valorile proprii ale operatorului de monodromie  $h_1$  corespunzător, adică polinomul caracteristic al acestuia, așa numitul *polinom Alexander*, și a investiga natura combinatorială a acestuia. Însă, chiar și în cazul aranjamentelor de drepte proiective complexe, acestea sunt întrebări deschise majore, în ciuda interesului pe care aceste probleme l-au ridicat în domeniu. Cităm non-exhaustiv studii importante în această direcție având ca autori pe Dimca, Cohen-Suciu, Denham-Suciu, Libgober, Suciu, Papadima-Suciu, Yoshinaga, etc.

Primul capitol este bazat pe un articol scris în colaborare cu A. Dimca și D. Ibadula. Obținem rezultate de clasificare, listând complet, până la un izomorfism de latices, aranjamentele de tip  $(3; 3)$ -net, respectiv  $(3; 4)$ -net, în clasa aranjamentelor de drepte proiective complexe cu doar puncte duble și triple. Apartenența la o clasă de izomorfism este decisă de numărul de puncte triple ale aranjamentului. Spre deosebire de rezultatele de realizabilitate pentru  $(p; q)$ -neturi existente în literatură, luăm în considerare pentru clasificarea noastră nu doar punctele mixte, ci toate punctele multiple ale aranjamentului. Pentru  $(3; 3)$ -neturi, clasificarea este de fapt făcută în termeni de clase de izotopie de latices. Suntem motivați de un rezultat al lui Libgober care arată că în categoria aranjamentelor de drepte în spațiul proiectiv complex care admit doar puncte de multiplicitate 2 și 3 non-trivialitatea monodromiei pe modulul de omologie rațională în rang 1 a fibrei Milnor implică existența unei structuri de tip  $(3, m)$ -net pe laticea de intersecție a aranjamentului. Acest rezultat nu elucidează totuși natura combinatorială a nontrivialității monodromiei. Folosind metode combinatoriale, dăm un argument elementar rezultatului lui Libgober pentru aranjamente de cel mult 14 drepte proiective complexe și îl extindem la aranjamente având puncte de multiplicitate cel mult 5, arătând în același timp că în această situație monodromia  $h_1$  este determinată de combinatorică.

Al doilea capitol este bazat pe un articol scris în colaborare cu Ș. Papadima și R. Popescu. Continuând explorarea naturii combinatoriale a fibrei Milnor asociate unui aranjament de hiperplane, arătăm că polinomul Alexander este de natură combinatorială în clasa aranjamentelor de reflexii complexe, folosind calcule explicite de numere Aomoto-Betti, obiecte prin definiție combinatoriale. Folosim în mod esențial inegalitățile modulare introduse de Cohen și generalizate de Papadima-Suciu, și arătăm că acestea devin egalități în toate cazurile de aranjamente de reflexii studiate.

Al treilea capitol este bazat pe două articole, unul dintre acestea fiind scris în colaborare cu J.I. Cogolludo-Agüstin.

Prezentăm rezultate foarte recente care dau instrumente noi pentru studiul polinomului Alexander asociat unei curbe proiective plane, redusă sau nu. Dezvoltăm două tipuri de inegalități, de tip limită superioară și inferioară, pentru a estima multiplicitățile rădăcinilor polinomului Alexander. Ca inegalități ce dau o limită superioară, generalizăm inegalitățile modulare la complemente de curbe, bazându-ne pe o construcție de tip complex Aomoto, asociată cu combinatorica slabă a unei curbe. În ce privește inegalitățile ce dau o limită inferioară, demonstrăm un rezultat în categoria curbelor cu o structură (aproape) de tip fibrat. Spre deosebire de inegalitățile modulare, rădăcinile polinomului Alexander ale căror multiplicități sunt estimate de acest rezultat nu trebuie să fie neapărat puteri de numere prime. Dăm o serie de exemple care arată cum cele două tipuri de inegalități pot fi folosite pentru a estima multiplicitățile rădăcinilor polinomului Alexander și o serie de aplicații care re-demonstrează rezultate cunoscute despre curbele Halphen, de Dimca-Pokora-Sticlaru. În ultima parte a capitolului al treilea aplicăm inegalitățile demonstrate anterior pentru a arăta că, pentru o subclasă a aranjamentelor de conice și drepte de tip pencil, multiplicitățile rădăcinilor polinomului Alexander sunt combinatoriale. Acest rezultat este surprinzător prin prisma faptului că se știe că polinomul Alexander asociat unei curbe nu este în general de natură combinatorială. Contraexemple la combinatorialitatea acestuia pot fi găsite printre așa-numitele *perechi Zariski*, obiecte de studiu intens în topologia grupului fundamental al complementului unei curbe proiective plane, așa cum arată lucrări ale lui Artal-Bartolo, Cogolludo-Agustin, Oka, etc.

În partea a doua a acestei teze studiem influența combinatoricii asupra structurilor algebrice și a proprietăților algebrice ale unui aranjament, cum ar fi modulul de derivări asociat unui aranjament, sau proprietatea aranjamentului de a fi liber sau plus-unu generat. Această cercetare este motivată de o problemă deschisă majoră în teoria aranjamentelor de hiperplane, care generează în mod constant interes din partea cercetătorilor din domeniu, **conjectura Terao**, conjectură care prezice natura combinatorială a proprietății unui aranjament de hiperplane de a fi liber.

Deși s-a demonstrat că există clase de aranjamente de hiperplane care satisfac conjectura Terao (notabil, aranjamentele supersolvabile, aranjamentele de tip Coxeter), și există un volum impresionant de articole de cercetare recentă care tratează acest subiect, de exemplu lucrări de Abe, Cuntz, Faenzi-Vallés, Yohinaga, etc., problema este încă deschisă în general. Mai mult, problema rămâne deschisă chiar și restricționată la cazul aranjamentelor de drepte în planul proiectiv complex. În studiul proprietății de a fi liber, clasa aranjamentelor *plus-unu generate* este în mod particular relevantă. Această noțiune a fost recent introdusă de Abe, care a arătat, în contextul aranjamentelor de drepte proiective, că aranjamentele plus-unu generate apar în mod natural în vecinătatea aranjamentelor libere, vecinătate definită prin procesul de adăugare sau eliminare a unei drepte plecând de la aranjamentul inițial. Aranjamentele *aproape libere* introduse de Dimca-Sticlaru sunt o subclasă a aranjamentelor plus-unu generate. Aranjamentele care pot fi obținute prin procedura de adăugare-eliminare de o dreaptă plecând de la un aranjament liber se numesc *lângă-un-liber*. Astfel, rezultatul lui Abe enunțat anterior afirmă că aranjamentele de drepte proiective lângă-un-liber sunt fie libere fie plus-unu generate. Noțiunile anterioare, de liber, plus-unu generat și lângă-un-liber pot fi extinse la curbe complexe proiective plane. Așadar, are sens să investigăm ce anume din proprietățile/întrebările/conjecturile legate de proprietatea de a fi liber sau plus-unu generat din domeniul aranjamentelor de hiperplane / drepte se pot traduce în termeni de aranjamente de curbe.

Al patrulea capitol este bazat pe un articol scris în colaborare cu A. Dimca și D. Ibadula. Prezentăm o demonstrație a conjecturii Terao pentru aranjamente de drepte proiective complexe de cardinal 13 (se știa anterior că aceasta este adevărată pentru aranjamente de drepte proiective de cardinal  $\leq 12$ , din lucrări Abe-Cuntz-Kawanoue-Nozawa și Faenzi-Vallés). Mai mult, demersul nostru este justificat și de faptul că 13 este cel mai mic cardinal unde există exemple de aranjamente libere, dar care nu sunt recursiv libere (proprietate folosită anterior pentru a demonstra conjectura în grade mai mici). Ulterior un articol Barakat-Behrends-Jefferson-Kühne-Leuner arată că conjectura este adevărată pentru aranjamente de drepte proiective de cardinal cel mult 14, metoda de demonstrație folosită fiind una computațională, implicând construcția unei baze de date de matroizi cu cel mult 14 atomi. Demonstrația noastră se bazează pe interacțiunea dintre proprietatea

de a fi liber și cea de a fi aproape liber a aranjamentelor de drepte proiective.

Al cincilea capitol este bazat pe un articol scris în colaborare cu T. Abe și D. Ibadula. Este cunoscut (Ziegler, Yoshinaga) că restricțiile Ziegler pentru un aranjament de drepte în planul proiectiv complex caracterizează proprietatea de a fi liber a aranjamentului. Folosind restricțiile Ziegler, introducem un criteriu de tip Yoshinaga pentru aranjamente plus-unu generate, mai precis, un rezultat de caracterizare, în termeni de module de derivări asociate cu restricții Ziegler și de funcția Ziegler corespunzătoare, a proprietății de plus-unu generare. Tot via restricții Ziegler, obținem că, în anumite condiții combinatoriale ori algebrice, proprietățile (pur algebrice) de a fi liber, respectiv aproape liber, sunt combinatoriale. În plus, arătăm că proprietatea (algebrică) a unui aranjament de a fi plus-unu generat induce restricții pentru combinatorica aranjamentului, mai precis, pentru numărul posibil de puncte multiple pe o dreaptă a aranjamentului, în termeni de exponenții și nivelul aranjamentului.

În general, determinarea tipurilor de splitare ale restricțiilor la drepte proiective arbitrare pentru un fibrat vectorial de rang 2 peste  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$  este o problemă dificilă. Arătăm că mulțimea posibilelor tipuri de splitare pentru restricția la o dreaptă proiectivă arbitrară  $L$  a fibratului câmpurilor vectoriale logaritmice  $\mathcal{T}_A$  asociat aranjamentului  $A$  este puternic restricționată de plus-unu generare, ceea ce în particular restricționează posibilele valori ale exponenților restricțiilor Ziegler ale unui aranjament plus-unu generat. Rafinăm aceste rezultate în capitolul al șaselea, bazat pe un articol scris în colaborare cu J. Vallès, dând o descriere geometrică a spațiului de drepte  $L$  în funcție de tipul de splitare al restricției la  $L$  a fibratului vectorial  $\mathcal{T}_A$ . În plus, dăm o caracterizare aranjamentelor de drepte proiective care sunt lângă-un-liber.

În capitolul șapte sunt demonstrate rezultate de tip *adăugare-eliminare* (a unei conice netede) pentru curbe complexe proiective plane libere, care generalizează rezultate Schenck-Tohăneanu privind aranjamente de conice și drepte cu singularități quasi-omogene. Descriem complet tipurile de curbe, în termeni de rezoluția modului de derivări asociat, care pot rezulta din adăugarea sau eliminarea unei componente ireductibile de tip conică netedă, plecând de la o curbă liberă. Formulăm condiții necesare și suficiente pentru ca rezultatul adăugării sau eliminării unei conice să fie liber, plus-unu generat sau nici una din acestea două (în acest al treilea caz demonstrăm că rezultatul este în mod necesar o curbă de tip 2). Incidental, aceste rezultate sunt instrumente eficiente pentru construcția de exemple noi de curbe libere, plus-unu generate și de tip 2. Mai mult, demonstrăm că există, pentru curbe, noi obstrucții de tip geometric și combinatoric induse de proprietatea de libertate.

În ultima parte a capitolului al șaptelea, parte bazată pe un articol scris în colaborare cu J. Vallès, extindem rezultate cunoscute în literatură de Abe și Faenzi-Vallès, arătând că există, pentru curbe, obstrucții de tip geometric și combinatoric induse de o consecință strict mai slabă a proprietății de a fi liber.

În ultimul capitol sunt prezentate câteva direcții generale de cercetare viitoare și unele probleme și întrebări deschise concrete, în linie cu rezultatele prezentate în această teză.