



ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

Anexa nr. 6

REZUMAT AL TEZEI DE ABILITARE
ON STANLEY AND HILBERT DEPTHS
DOMENIUL DE ABILITARE: MATEMATICĂ

AUTHOR: BOGDAN NICOLAE ICHIM

Prin *graduare* ne vom referi la o $\mathbb{Z}$ -graduare, iar prin *multigraduare* ne vom referi la o $\mathbb{Z}^n$ -graduare. Fie K un corp și A o algebră finit generată pozitiv graduată sau multigraduată. Seriile Hilbert sunt cel mai important invariant numeric a modulelor finit generate graduate sau multigraduate peste A și formează puntea de legătură între algebră și aplicațiile sale combinatoriale. Ele joacă un rol crucial în mai multe domenii matematice, fiind cunoscute de exemplu ca funcții generatoare în teoria numerelor sau teoria probabilităților și ca serii Ehrhart în geometria discretă. Noțiunile de *polinoame Hilbert (Ehrhart)* și *cvasi-polinoame Hilbert (Ehrhart)* sunt consecințe imediate ale unor rezultate celebre datorate lui Hilbert, Serre, Ehrhart și Stanley care descriu structura seriilor Hilbert.

În legătură cu studiul sistemelor de ecuații diofantice liniare în [12], R. Stanley a introdus noțiunea de *descompunere Stanley* a unui modul finit generat multigraduat M peste K -algebra multigradată A . Asociată noțiunii de descompunere Stanley, el a introdus și o noțiune combinatorică de profunzime (depth), care a fost numită ulterior *Stanley depth*. Mai mult, în [12] a propus o conjectură care afirma că există întotdeauna o descompunere Stanley a unui modul finit generat multigraduat M peste A , astfel încât Stanley depth-ul său este marginit inferior de depth-ul modulului M .

În 2010, Bruns, Krattenthaler și Uliczka [2] au introdus o nouă descompunere a unui modul finit generat multigraduat M , pe care o numesc *descompunere Hilbert*, deoarece depinde doar de seria Hilbert a M . Asociată descompunerii Hilbert, ei introduc de asemenea o noțiune de profunzime (depth), numită *Hilbert depth*.

Rolul pe care autorul acestei teze l-a jucat în studiul descompunerilor Stanley și Hilbert, precum și al Stanley și Hilbert depth-urilor asociate este prezentat aici. Aceasta Teză de Abilitare conține o colecție de șapte lucrări [1, 6, 7, 8, 9, 10, 11] fiecare fiind legată de rezultate importante obținute pe

aceste teme. Acestea constituie o parte semnificativă a activității de cercetare efectuată de autor în ultimii ani.

Conținutul acestei teze este rezumat în cele ce urmează. În [1], a fost obținută o teoremă foarte eficientă care extinde un rezultat clasic al lui J. P. Serre asupra constanței coeficienților cvasipolinoamelor Hilbert. Lucrarea este inclusă în teză în **Capitolul 1**.

În [10] este dezvoltată pentru prima dată o metodă de calculare a Hilbert depth-ului unui modul finit generat multigradat M , care este prezentată aici în **Capitolul 2**. Un algoritm [11] bazat pe această metodă a fost ulterior dezvoltat, implementat și folosit pentru a răspunde la unele întrebări deschise ridicate de Herzog în [5]. Acest algoritm este inclus în această teză în **Capitolul 3**. Este de menționat faptul că algoritmul [11] a fost utilizat pentru a verifica foarte rapid cu un computer importantul contraexemplu dat în [3] la conjectura (veche de peste) 30 de ani propusă de R. Stanley în [12].

Este de remarcat faptul că descompunerile Hilbert pot fi utilizate pentru a calcula efectiv Stanley depth-ul unui modul finit generat multigradat peste inelul de polinoame. Aceasta a fost o problemă importantă (anterior deschisă) de calculabilitate propusă de Herzog în [5] și la care s-a răspuns în [9] prin introducerea unui algoritm pentru calcularea Stanley depth-ului pentru module finit generate multigradate peste inelul de polinoame. Algoritmul a fost utilizat eficient pentru a da un răspuns negativ la întrebarea dacă o versiune slabă a lemei depth-ului este valabilă și pentru Stanley depth. Algoritmul este prezentat în aceasta teza în **Capitolul 4**.

Un rezultat important publicat în [6] arată că conjectura Stanley pentru factorii inelelor de polinoame este echivalentă cu conjectura despre complexe simpliciale Cohen-Macaulay partiționabile formulată de A. Garcia în [4]. Articolul este inclus în această teză în **Capitolul 5**. În [7] se demonstrează că laticia lcm determină Stanley depth-ul, precum și depth-ul obișnuit. Acest rezultat important permite introducerea unor demonstrații simple într-un context unificat pentru multe rezultate noi sau deja cunoscute. De exemplu, se poate da o generalizare a unei teoreme importante despre polarizare obținută în [6]. Aceste rezultate sunt prezentate în această teză în **Capitolul 6**.

Mai mult, ca o consecință a rezultatelor importante ale articolului [7], idealele cu până la 5 generatori au fost clasificate complet în funcție de Stanley depth printr-un experiment computațional în [8], care este inclus în această teză în **Capitolul 7**.

Dorim să menționăm că cercetarea prezentată aici a fost susținută de un program pentru calcularea Hilbert depth-ului unui modul finit generat multigradat peste inelul de polinoame (implementat de autor în colaborare cu A. Zarojanu). Conform cu <http://www.swmath.org/software/12186> acest program a fost citat de **10** ori în articole publicate și indexate în Zentralblatt MATH.

La final, în **Capitolul 8** este schițată o bază pentru cercetarea viitoare pe termen mediu și lung a autorului.

BIBLIOGRAFIE

- [1] W. Bruns and B. Ichim, *On the coefficients of Hilbert quasipolynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), 1305 – 1308.
- [2] W. Bruns, Chr. Krattenthaler and J. Uliczka, *Stanley decompositions and Hilbert depth in the Koszul complex*. J. Comm. Alg. **2** (2010), 327–357.
- [3] A. Duval, B. Goeckner, C. Klivans and J. Martin. *A non-partitionable Cohen-Macaulay simplicial complex*. Advances in Mathematics **299** (2016), 381 – 395.
- [4] A. Garsia, *Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings*. Advances in Mathematics **38** (1980), 229–266.
- [5] J. Herzog, *A survey on Stanley depth*. In “Monomial Ideals, Computations and Applications”, A. Bigatti, P. Giménez, E. Sáenz-de-Cabezón (Eds.), Proceedings of MON-ICA 2011. Springer Lecture Notes in Mathematics **2083** (2013).
- [6] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández, *The behavior of Stanley depth under polarization*. Journal of Combinatorial Theory, Series A **135** (2015), 332 – 347.
- [7] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández, *Stanley depth and the lcm-lattice*. Journal of Combinatorial Theory, Series A **150** (2017), 295 – 322.
- [8] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández, *Lcm-lattices and Stanley depth: a first computational approach*. Exp. Math. **25** (2016), 46 – 53.
- [9] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández, *How to compute the Stanley depth of a module*. Mathematics of Computation **86** (2017), 455 – 472.
- [10] B. Ichim and J.J. Moyano-Fernández, *How to compute the multigraded Hilbert depth of a module*. Mathematische Nachrichten **287** (2014) 1274–1287.
- [11] B. Ichim and A. Zarojanu, *An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module*. Exp. Math. **23** (2014), 322 – 331.
- [12] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*. Invent. Math. **68** (1982), 175–193.